





# Capitolo 1

## Equazioni di conservazione

In questo capitolo sono derivate le equazioni della massa, dell'energia e della quantità di moto di elementi caratterizzati da volumi in cui non è prevalente una dimensione, cioè zero-dimensionali, quali i serbatoi, o di elementi in cui invece si ha uno sviluppo prevalente in una direzione, quali le condotte. Tali equazioni saranno impiegate nel seguito per ricavare il modello di alcuni componenti tipici dei circuiti idraulici e pneumatici.

### 1.1 Equazione di conservazione della massa in un volume assegnato

Si consideri un sistema aperto, che può scambiare massa ed energia con l'esterno tramite il moto di un fluido, e si faccia l'ipotesi che le dimensioni geometriche principali non coincidano con quelle del moto del fluido e che siano prevalenti fenomeni di accumulo più che di trasporto. Tali ipotesi sono valide tipicamente per serbatoi, reattori, larghi collettori e i corrispondenti modelli sono detti *zero dimensionali*.

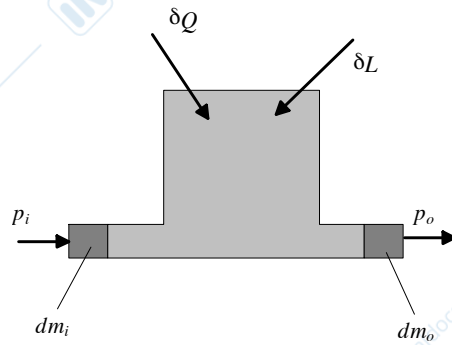
Si supponga che all'interno del sistema, le grandezze termodinamiche (pressione, temperatura, densità,...) possano ritenersi costanti e si definiscano con  $m(t)$  la massa contenuta nel volume di riferimento, con  $w_i(t)$  la portata (in massa) entrante e con  $w_o(t)$  la portata (in massa) uscente. Risulta

$$\frac{dm(t)}{dt} = w_i(t) - w_o(t)$$

### 1.2 Equazione di conservazione dell'energia in un volume assegnato

Si consideri il sistema aperto mostrato nella figura 1.2

A. U. Thor



VOLUME assegnato.

Il principio di conservazione dell'energia riferito a un intervallo infinitesimo  $dt$  è espresso dall'equazione

$$dE_t(t) = \delta Q(t) + \delta L(t) + dm_i(t)e_{t_i}(t) - dm_o(t)e_{t_o}(t) + p_i(t)dV_i(t) - p_o(t)dV_o(t)$$

dove  $dE_t(t)$  è la variazione di energia totale del sistema,  $\delta Q(t)$  e  $\delta L(t)$  sono il calore e il lavoro forniti esternamente al sistema,  $dm_i(t)e_{t_i}(t)$  e  $dm_o(t)e_{t_o}(t)$  sono le energie portate dalle masse entranti e uscenti  $dm_i(t)$  e  $dm_o(t)$  e i termini  $p_i(t)dV_i(t)$  e  $p_o(t)dV_o(t)$  rappresentano il lavoro compiuto sul sistema o eseguito dal sistema per mezzo delle masse entranti e uscenti. Definendo

$$\Phi(t) = \frac{\delta Q(t)}{dt} = \text{flusso di calore}$$

$$\Psi(t) = \frac{\delta L(t)}{dt} = \text{potenza}$$

ricordando che  $dV_i = \frac{dm_i}{\rho}$ ,  $dV_o = \frac{dm_o}{\rho}$ , dividendo l'espressione precedente per  $dt$ , e tralasciando per semplicità di notazione la dipendenza da  $t$ , si ottiene

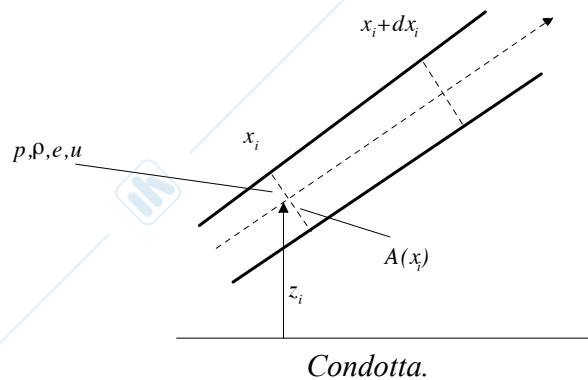
$$\begin{aligned} \frac{dE_t}{dt} &= \Phi + \Psi + w_i e_{t_i} - w_o e_{t_o} + w_i \frac{p_i}{\rho} - w_o \frac{p_o}{\rho} \\ &= \Phi + \Psi + w_i \left( e_{t_i} + \frac{p_i}{\rho} \right) - w_o \left( e_{t_o} + \frac{p_o}{\rho} \right) \\ &= \Phi + \Psi + w_i \left( e_i + \frac{1}{2}u_i^2 + gz_i + \frac{p_i}{\rho} \right) - w_o \left( e_o + \frac{1}{2}u_o^2 + gz_o + \frac{p_o}{\rho} \right) \\ &= \Phi + \Psi + w_i \left( h_i + \frac{1}{2}u_i^2 + gz_i \right) - w_o \left( h_o + \frac{1}{2}u_o^2 + gz_o \right) \end{aligned}$$

## Capitolo 1 Equazioni di conservazione

### 1.3 Equazione di conservazione della massa nelle condotte

Nelle condotte lunghe le coordinate termodinamiche (pressione, volume, temperatura, densità, ...) non possono più essere ritenute costanti, ma variano con continuità lungo la coordinata principale  $x$  del sistema. Ipotizzando comunque che le caratteristiche del fluido siano omogenee all'interno di una generica sezione perpendicolare al moto del fluido, cioè che il moto del fluido sia di tipo turbolento, è possibile ancora scrivere le equazioni di conservazione. I modelli ricavati da queste equazioni dipenderanno a priori sia dal tempo  $t$ , sia dalla coordinata  $x$ ; per questo motivo sono detti monodimensionali.

Nella trattazione che segue si fa anche l'ipotesi che non vi siano brusche curvature o cambiamenti di sezione.



Consideriamo un tratto di tubazione di lunghezza infinitesima  $dx$ , con  $x$  ascissa (curvilinea) lungo il percorso e sezione  $A(x)$  funzione solo della coordinata spaziale. La massa contenuta è

$$m(t) = \rho(x, t)A(x)dx$$

e le portate di ingresso e uscita sono

$$w_i(x, t) = \rho(x, t)A(x)u(x, t)$$

$$w_o(x, t) = \rho(x, t)A(x)u(x, t) + \frac{\partial (\rho(x, t)A(x)u(x, t))}{\partial x}dx$$

L'equazione di conservazione della massa

$$\frac{dm(t)}{dt} = w_i(t) - w_o(t)$$

A. U. Thor

dividendo entrambi i termini per  $dx$ , diventa

$$\frac{\partial (\rho(x, t)A(x))}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho(x, t)A(x)u(x, t))}{\partial x}$$

Il termine a sinistra dell'uguale è il termine di accumulo all'interno del tratto considerato, dovuto a una variazione di densità o di sezione, mentre quello a destra è dovuto al fenomeno di trasporto.

### 1.3.1 Condizioni stazionarie

In condizioni stazionarie, la derivata rispetto al tempo è nulla e l'equazione di conservazione della massa diventa

$$\frac{dw(x)}{dx} = 0$$

### 1.4 Equazione di conservazione dell'energia nelle condotte

Applichiamo alla condotta il principio di conservazione dell'energia riferito a un intervallo infinitesimo  $dt$ :

$$\begin{aligned} dE_t(x, t) = & \phi(x, t)dxdt + \psi(x, t)dxdt + \\ & + dm_i(x, t)e_{t_i}(x, t) - dm_o(x + dx, t)e_{t_o}(x + dx, t) + \\ & + dL_i(x, t) - dL_o(x + dx, t) \end{aligned}$$

dove

$$\phi(x, t) = \frac{\Phi(x, t)}{dx} = \frac{\delta Q(x, t)}{dxdt}$$

è il flusso termico fornito per unità di lunghezza e

$$\psi(x, t) = \frac{\Psi(x, t)}{dx} = \frac{\delta L(x, t)}{dxdt}$$

è la potenza fornita per unità di lunghezza,  $dm_i(x, t)$  e  $dm_o(x, t)$  sono le masse entranti e uscenti nell'intervallo e  $dL_i(x, t)$ ,  $dL_o(x, t)$  sono i lavori da

## Capitolo 1 Equazioni di conservazione

esse compiuti. Posto

$$\begin{aligned} dm_i(x, t)e_{t_i}(x, t) &= \rho(x, t)A(x)u(x, t)dt \left( e(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) + gz(x) \right) \\ dm_o(x + dx, t)e_{t_o}(x + dx, t) &= dm_i(x, t)e_{t_i}(x, t) + \frac{\partial dm_i(x, t)e_{t_i}(x, t)}{\partial x}dx \\ dL_i(x, t) &= p(x, t)A(x)u(x, t)dt \\ dL_o(x + dx, t) &= dL_i(x, t) + \frac{\partial dL_i(x, t)}{\partial x}dx \end{aligned}$$

l'equazione, tralasciando la dipendenza da  $x$  e  $t$  per semplicità di notazione, diventa

$$\begin{aligned} dE_t &= \phi dxdt + \psi dxdt - \frac{\partial \rho Au (e + \frac{1}{2}u^2 + gz)}{\partial x} dxdt - \frac{\partial p Au}{\partial x} dxdt \\ &= \phi dxdt + \psi dxdt - \frac{\partial \rho Au \left( e + \frac{1}{2}u^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right)}{\partial x} dxdt \\ &= \phi dxdt + \psi dxdt - \frac{\partial \rho Au (h + \frac{1}{2}u^2 + gz)}{\partial x} dxdt \end{aligned}$$

Dividendo per  $dt$  si ha

$$\frac{dE_t}{dt} = \phi dx + \psi dx - \frac{\partial \rho Au (h + \frac{1}{2}u^2 + gz)}{\partial x} dx$$

Ma

$$dE_t(x, t) = \rho(x, t)A(x)dx \left( e(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) + gz(x) \right)$$

Sostituendo, dividendo per  $dx$  infine risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)A(x) \left( e(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) + gz(x) \right)}{\partial t} &= \phi(t) + \psi(t) + \\ &\quad - \frac{\partial w(x, t) \left( h(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) + gz(x) \right)}{\partial x} \end{aligned}$$

### 1.4.1 Condizioni stazionarie

In condizioni stazionarie l'equazione diventa

$$\frac{dw(x) \left( h(x) + \frac{1}{2}u^2(x) + gz(x) \right)}{dx} = \phi + \psi$$

A. U. Thor

### 1.5 Equazione di conservazione della quantità di moto nelle condotte

Ricordiamo che la quantità di moto, o momento ( $M$ ), è definita come  $mu$  [ $kgm/s = Ns$ ] e ha quindi la dimensione di un impulso di forza. L'equazione di bilancio è quindi di tipo vettoriale e i suoi componenti vanno proiettati lungo l'asse  $x$ , direzione del vettore velocità. L'equazione da scrivere è quindi:

variazione del momento  $M =$  momento entrante ( $M_i$ ) - momento uscente ( $M_o$ )  
 + impulso di forza nella sezione di ingresso ( $P_i$ )  
 - impulso di forza nella sezione di uscita ( $P_o$ )  
 + impulso di forze sulle pareti laterali ( $P_l$ )  
 - impulso delle forze di attrito ( $P_a$ )  
 - impulso della forza di gravità ( $P_g$ )

dove

$$\begin{aligned} M(x, t) &= m(x)u(x, t) = \rho(x, t)A(x)dxu(x, t) \\ M_i(x, t) &= \rho(x, t)A(x)u(x, t)dtu(x, t) \\ M_o(x + dx, t) &= M_i(x, t) + \frac{\partial M_i(x, t)}{\partial x}dx \\ P_i(x, t) &= p(x, t)A(x)dt \\ P_o(x + dx, t) &= P_i(x, t) + \frac{\partial P_i(x, t)}{\partial x}dx \\ P_l(x, t) &= p(x, t)(A(x + dx) - A(x))dt \\ P_a(x, t) &= \tau\pi D(x)dxdt \\ P_g(x, t) &= \rho(x, t)A(x)gdzdt \end{aligned}$$

Nella definizione di  $P_a(x, t)$  si è supposto che le forze di attrito siano concentrate sulle pareti. Inoltre  $D(x)$  è il diametro del condotto e  $\tau(x, t)$  [ $N/m^2$ ] è il coefficiente di attrito, usualmente considerato proporzionale a densità e velocità tramite la relazione

$$\tau(x, t) = \frac{1}{2}C_f\rho(x, t)u(x, t)|u(x, t)|$$

in cui  $C_f$  è un coefficiente adimensionale.

## Capitolo 1 Equazioni di conservazione

L'equazione è quindi

$$\begin{aligned}
 d(\rho(x, t)A(x)dxu(x, t)) &= \rho(x, t)A(x)u^2(x, t)dt + \\
 &\quad - \left( \rho(x, t)A(x)u^2(x, t)dt + \frac{\partial \rho(x, t)A(x)u^2(x, t)dt}{\partial x} dx \right) + \\
 &\quad + p(x, t)A(x)dt - \left( p(x, t)A(x)dt + \frac{\partial p(x, t)A(x)dt}{\partial x} dx \right) + \\
 &\quad + p(x, t) (A(x + dx) - A(x)) dt + \\
 &\quad - \frac{1}{2} C_f \rho(x, t) u(x, t) |u(x, t)| \pi D(x) dx dt \\
 &\quad - \rho(x, t) A(x) g dz dt
 \end{aligned}$$

Dividendo per  $dxdt$ , ricordando che  $w(x, t) = \rho(x, t)A(x)u(x, t)$  e semplificando si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= - \frac{\partial \rho(x, t)A(x)u^2(x, t)}{\partial x} - A(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \\
 &\quad - \frac{1}{2} C_f \rho(x, t) u(x, t) |u(x, t)| \pi D(x) - \rho(x, t) A(x) g \frac{dz(x)}{dx}
 \end{aligned}$$

### 1.5.1 Condizioni stazionarie

In condizioni stazionarie si ha

$$\frac{d\rho(x)A(x)u^2(x)}{dx} + A(x) \frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{2} C_f \rho(x) u(x) |u(x)| \pi D(x) + \rho(x) A(x) g \frac{dz(x)}{dx} = 0$$

### 1.6 Equazione di Bernoulli

In condizioni stazionarie, e supponendo che la densità  $\rho$  sia costante, l'equazione di bilancio di massa mostra che la portata  $w$  è costante e l'equazione di conservazione della quantità di moto, in assenza di attrito ( $C_f = 0$ ), (tralasciando la dipendenza da  $x$ ) può essere scritta come

$$\frac{d\rho Au^2}{dx} + A \frac{dp}{dx} + \rho Ag \frac{dz}{dx} = 0$$

A. U. Thor

o anche ( $w = \rho Au = \text{cost}$ )

$$\rho Au \frac{du}{dx} + A \frac{dp}{dx} + \rho Ag \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{du^2/2}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + g \frac{dz}{dx} = 0$$

che, integrata tra la generica sezione 1 e la generica sezione 2, fornisce

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} u_1^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} u_2^2 + gz_2$$