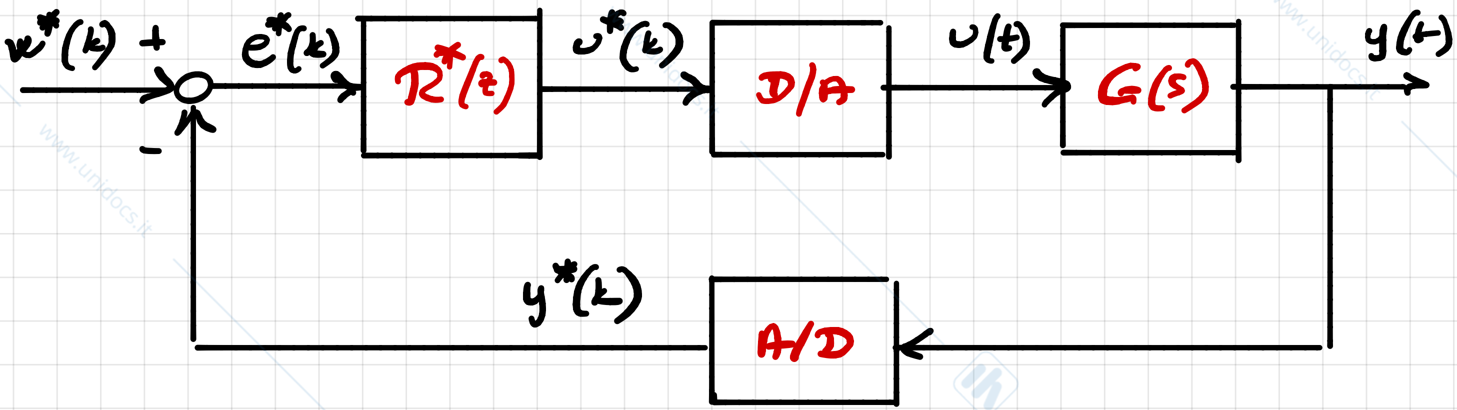
ESERCITAZIONE SUL CONTROLLO DIGITALE

– ESERCIZIO 1



$G(s) = \frac{1}{s}$

$R^*(z) = \mu > 0$

$T > 0$

– VALUTARE LA STABILITÀ AL VARIARE DI T E μ CON:

- ANALISI A T. CONTINUO
- ANALISI A T. DISCRETO

- ANALISI A T. CONTINUO

$$\tilde{R}(s) \simeq \mu e^{-sT/2} \implies \tilde{L}(s) = \frac{\mu}{s} e^{-sT/2}$$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_c = \mu \\ \tilde{\varphi}_c = -90^\circ - \tilde{\omega}_c \frac{T}{2} \frac{180^\circ}{\pi} \\ \tilde{\varphi}_m = 90^\circ - \mu T \frac{90^\circ}{\pi} \end{cases}$$

AS. STAB $\iff \begin{cases} \mu > 0 \quad \text{OK} \\ \tilde{\varphi}_m > 0 \iff \mu T < \pi \end{cases}$

OVVERO

$$\boxed{\mu < \frac{\pi}{T}}$$

ATTENZIONE! È UNA STIMA IMPRECISA

- ANALISI A TEMPO DISCRETO

- CALCOLO DI $G^*(z)$ - METODO 1

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t \,, \quad t \geq 0$$

$$y^*(k) = y(kT) = kT \,, \quad k \geq 0$$

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}[y^*(k)] = \frac{Tz}{(z-1)^2} \implies \boxed{G^*(z) = Y^*(z)\frac{z-1}{z} = \frac{T}{z-1}}$$

- CALCOLO DI $G^*(z)$ - METODO 2

$$G(s) = \frac{1}{s} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=0,\ B=1 \\ C=1,\ D=0 \end{matrix}$$

$$A^* = e^{AT} = 1$$

$$B^* = \int_0^T e^{A\sigma} B \, d\sigma = \int_0^T 1 \, d\sigma = T$$

$$\implies G^*(z) = C(zI - A^*)^{-1}B^* = \frac{T}{z-1}$$

OK

. FDT D'ANELLO

$$L(z) = R^*(z)\,G^*(z) = \frac{\mu T}{z-1} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\varphi_{AC}(z) = D(z) + N(z) = z - 1 + \mu T = 0$$ POLO IN A.C. $\bar{z} = 1 - \mu T$

$\boxed{\text{AS. STAB.}} \iff |\bar{z}| < 1$

OVVERO

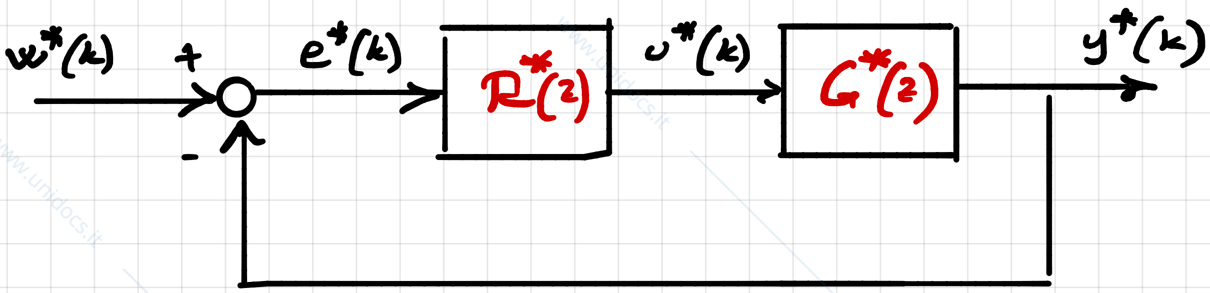
$-1 < 1 - \mu T < 1$ SEMPRE VERIFICATA PER $\mu > 0$, $T > 0$

OVVERO

$\mu T < 2 \iff \boxed{\mu < \frac{2}{T}}$

. CONFRONTARE CON VINCOLO APPROX: $\mu < \frac{\pi}{T}$
(OTTENUTO CON L'ANALISI A T. CONTINUO)

_ ESERCIZIO 2



$$G^*(z) = \frac{z}{z^2 + 0.25}$$

$$R^*(z) = \mu$$

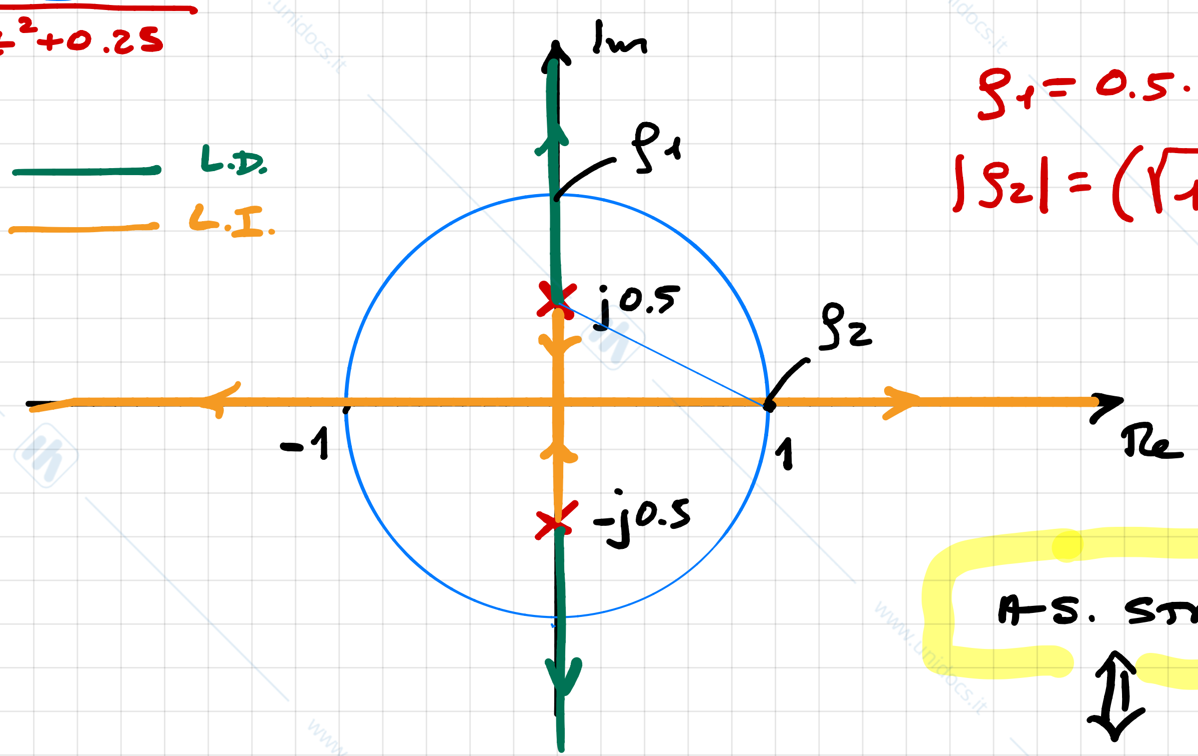
1. MEDIANTE LDR VALUTARE LA STABILITÀ AL VARIARE DI μ

2. DETERMINARE μ PER CUI $G_{yw}(z)$ È UN FIR

3. CON TALE VALORE DI μ CALCOLARE $e^*(\infty)$ QUANDO $w^*(k) = sca^*(k)$

1 . Luogo delle radici

$$L(z) = \frac{\overbrace{2\mu}^{\rho}}{z^2 + 0.25}$$



$\rho_1 = 0.5 \cdot 1.5 = 0.75$

$|\rho_2| = \left(\sqrt{1+0.25}\right)^2 = 1.25$

$\boxed{\text{AS. STAB.}}$

$\Updownarrow$

$-1.25 < \rho < 0.75$

OVVERO

$$\boxed{-0.625 < \mu < 0.375}$$

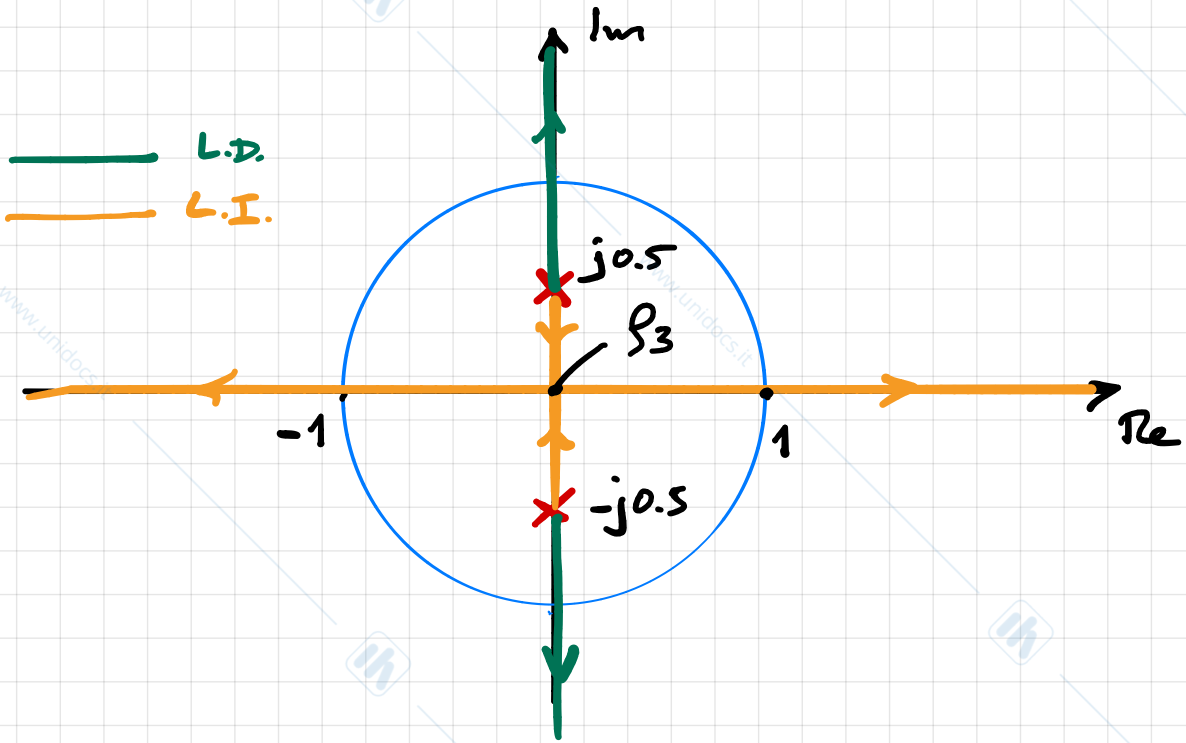
②

$$G_{yw}(z) = F(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{2\mu}{z^2+0.25+2\mu}$$

F(z) È UN FIR $\iff$ $0.25+2\mu=0$

OVVERO

$$\mu = -0.125$$



- OPPURE, DAL LDR

$$\rho_3 = -0.5 \cdot 0.5 = -0.25$$

$$\mu = \frac{\rho_3}{2} = -0.125$$

OK

3

$$e^*(\infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{1+L(z)} \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{z}{1 - \frac{0.25}{z^2+0.25}} = \lim_{z \to 1} \frac{\cancel{z}(z^2+0.25)}{z^{\cancel{2}}} = 1.25$$

- ALTERNATIVAMENTE:

$$g = 0 \implies e^*(\infty) = \frac{1}{1+L(1)} = \frac{1}{1+\frac{2\mu}{1.25}} = \frac{1}{1-\frac{0.25}{1.25}} = 1.25$$

OK

\- ESERCIZIO 3

$$G(s) = \frac{10}{s-2} \quad , \quad T = 1$$

1. PROGETTARE $R^*(z)$ CON IL METODO DI ASSEGNAMENTO DEL MODELLO IN MODO DA ASSICURARE:
   - L'ASINTOTICA STABILITÀ
   - LA PRECISIONE STATICA IN RISPOSTA A UNO SCALINO

2\. CALCOLARE IL VALORE DI REGIME $u^*(\infty)$ QUANDO $w^*(k) = 10\,sca^*(k)$

1

$$G(s) = -5\,\frac{-2}{s-2}$$

SISTEMA A SEGNALI CAMPIONATI

$$\Rightarrow G^*(z) = -5\,\frac{1-e^2}{z-e^2} \simeq -5\,\frac{-6.4}{z-7.4} = \frac{32}{z-7.4}$$

- VINCOLI

$$\nu_F \geq \nu_{G^*} = 1$$

$A(7.4) = B(7.4)$ NO CANC. POLO INSTABILE

$A(1) = B(1)$ PRECISIONE STATICA

- Scelta di $F(z)$

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{az+b}{z^2}$$

$$\begin{cases} (7.4)^2 = 7.4a+b \\ 1 = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1-a \\ (7.4)^2 = 6.4a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \simeq 8.4 \\ b \simeq -7.4 \end{cases}$$

$$F(z) = \frac{8.4z-7.4}{z^2}$$

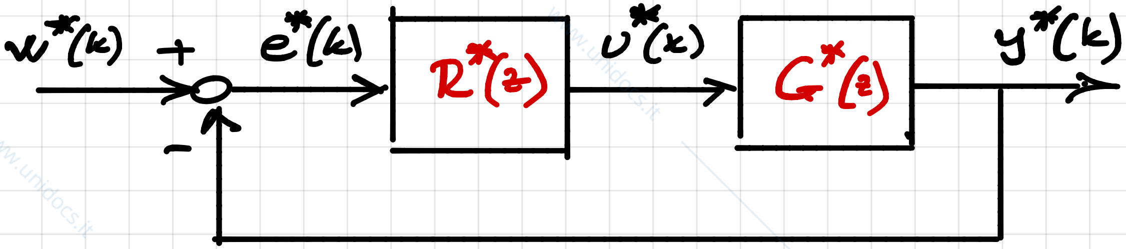
- Calcolo di $R^*(z)$

$$R^*(z) = \frac{z-7.4}{32}\cdot\frac{8.4z-7.4}{z^2-8.4z+7.4} = \frac{\cancel{z-7.4}}{32}\cdot\frac{8.4z-7.4}{(z-1)\cancel{(z-7.4)}} = \frac{1}{32}\,\frac{8.4z-7.4}{z-1}$$

- Algoritmo di controllo

$$u^*(k) = u^*(k-1) + \frac{1}{32}\left(8.4e^*(k) - 7.4e^*(k-1)\right)$$

2



$$G^*(z) = \frac{32}{z - 7.4}$$

$$R^*(z) = \frac{1}{32} \, \frac{8.4z - 7.4}{z - 1}$$

$$G_{uw}(z) = \frac{R^*(z)}{1 + R^*(z)G^*(z)} = \frac{\frac{1}{32}\,\frac{8.4z-7.4}{z-1}}{1 + \frac{8.4z-7.4}{(z-1)(z-7.4)}} =$$

$$= \frac{1}{32} \, \frac{(z-7.4)(8.4z-7.4)}{(z-1)(z-7.4) + 8.4z - 7.4} = \frac{1}{32} \, \frac{(z-7.4)(8.4z-7.4)}{z^2}$$

$$w^*(k) = 10\,\mathrm{sca}^*(k) \implies u^*(\infty) = G_{uw}(1)\,10 = -\frac{1}{5}\,10 = -2$$

- VERIFICA

- A REGIME $y^*(\infty) = 10 = G^*(1)\,u^*(\infty) \implies u^*(\infty) = \frac{10}{G^*(1)} = \frac{10}{-5} = -2$

OK

. ESERCIZIO 4

$$u^*(k) \longrightarrow \boxed{D/A} \xrightarrow{u(t)} \boxed{G(s)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{A/D} \xrightarrow{y^*(k)}$$

$$G(s) = \frac{0.8(1+4s)}{(1+2s)(1+3s)(1+5s)}$$

$$T > 0$$

1. SAPENDO CHE

$$G^*(z) \simeq \frac{\rho\,(z-0.735)(z+0.725)}{(z-0.782)(z-0.664)(z-0.541)}$$

DETERMINARE ρ E T

2. VALUTARE TEMPO DI LATENZA E TEMPO DI ASSESTAMENTO DI $G^*(z)$

3. PROGETTARE $R^*(z)$ CON IL METODO DI ASS. DEL MODELLO IN MODO CHE $F(z) = \frac{1}{z^2}$

1

- I poli di $G^*(z)$ si ottengono da quelli di $G(s)$ mediante la trasf. di campionamento $z = e^{sT}$

$$s_1 = -\frac{1}{5}, \quad s_2 = -\frac{1}{3}, \quad s_3 = -\frac{1}{2}$$

Polo dom.

$$z_1 = 0.782 = e^{-T/5} \Longrightarrow \boxed{T = -5\ln(0.782) \simeq 1.23}$$

$$z_2 = 0.664 = e^{-T/3} \Longrightarrow T = -3\ln(0.664) \simeq 1.23$$

$$z_3 = 0.541 = e^{-T/2} \Longrightarrow T = -2\ln(0.541) \simeq 1.23$$

OK

- Il guadagno statico si conserva

$$G^*(1) = g\,\frac{0.265 \cdot 1.725}{0.218 \cdot 0.336 \cdot 0.459} = G(0) = 0.8$$

$$\Longrightarrow \boxed{g \simeq 0.06}$$

2

- TEMPO DI LATENZA: $k_\ell = \nu_{G^*} - 1 = 0$

- TEMPO DI ASSESTAMENTO: $k_a \simeq -\dfrac{5}{\ln|z_{dom}|} = -\dfrac{5}{\ln 0.782} \simeq 20$

3

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{z^2}$$

$$R^*(z) = \frac{1}{G^*(z)} \frac{B(z)}{A(z)-B(z)} = \frac{(z-0.782)(z-0.664)(z-0.541)}{0.06(z-0.735)(z+0.725)} \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

- ESERCIZIO 5

. SI CONSIDERI UN CONTROLLORE DIGITALE CHE OPERA CON PERIODO $T = 0.1$ SECONDO LA LEGGE DI CONTROLLO:

$$u^*(k) = 1.5\,u^*(k-1) - 0.5\,u^*(k-2) + 4\,e^*(k-1) + 0.5\,e^*(k-2)$$

1. RICAVARE LA FDT $R^*(z)$

2. CALCOLARE POLI E ZERI DI $R^*(z)$ E VERIFICARE LA PRESENZA DI UN'AZIONE INTEGRALE (A T. DISCRETO)

3. RICAVARE LA FDT "EQUIVALENTE" A T. CONTINUO $\tilde{R}(s)$

4. VERIFICARE CHE $\tilde{R}(s)$ CONTIENE UN'AZIONE INTEGRALE (A T. CONTINUO)

① . USANDO LA TRASFORMATA ZETA:

$$\left(1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}\right)U^*(z)=\left(4z^{-1}+0.5z^{-2}\right)E^*(z)$$

$$R^*(z)=\frac{U^*(z)}{E^*(z)}=\frac{4z^{-1}+0.5z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=\frac{4z+0.5}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{4z+0.5}{(z-1)(z-0.5)}$$

② POLI: $z=1$, $z=0.5$ ZERO: $z=-\frac{1}{8}$

AZIONE INTEGRALE

③
$$\tilde{R}(s)=\frac{H_0(s)}{T}R^*(e^{sT})=\frac{1-e^{-sT}}{sT}\,\frac{4e^{sT}+0.5}{(e^{sT}-1)(e^{sT}-0.5)}\quad,\quad T=0.1$$

④ . C'È AZIONE INTEGRALE SE $\lim_{s\to 0}\tilde{R}(s)=\infty$

$$\lim_{s\to 0}\frac{H_0(s)}{T}=\lim_{s\to 0}\frac{1-e^{-sT}}{sT}=\lim_{s\to 0}\frac{Te^{-sT}}{T}=1$$ (REGOLA DE L'HOSPITAL)

$$\lim_{s\to 0}\tilde{R}(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4e^{sT}+0.5}{(e^{sT}-1)(e^{sT}-0.5)}=\lim_{s\to 0}\frac{4.5}{(e^{sT}-1)\,0.5}=\infty$$ OK