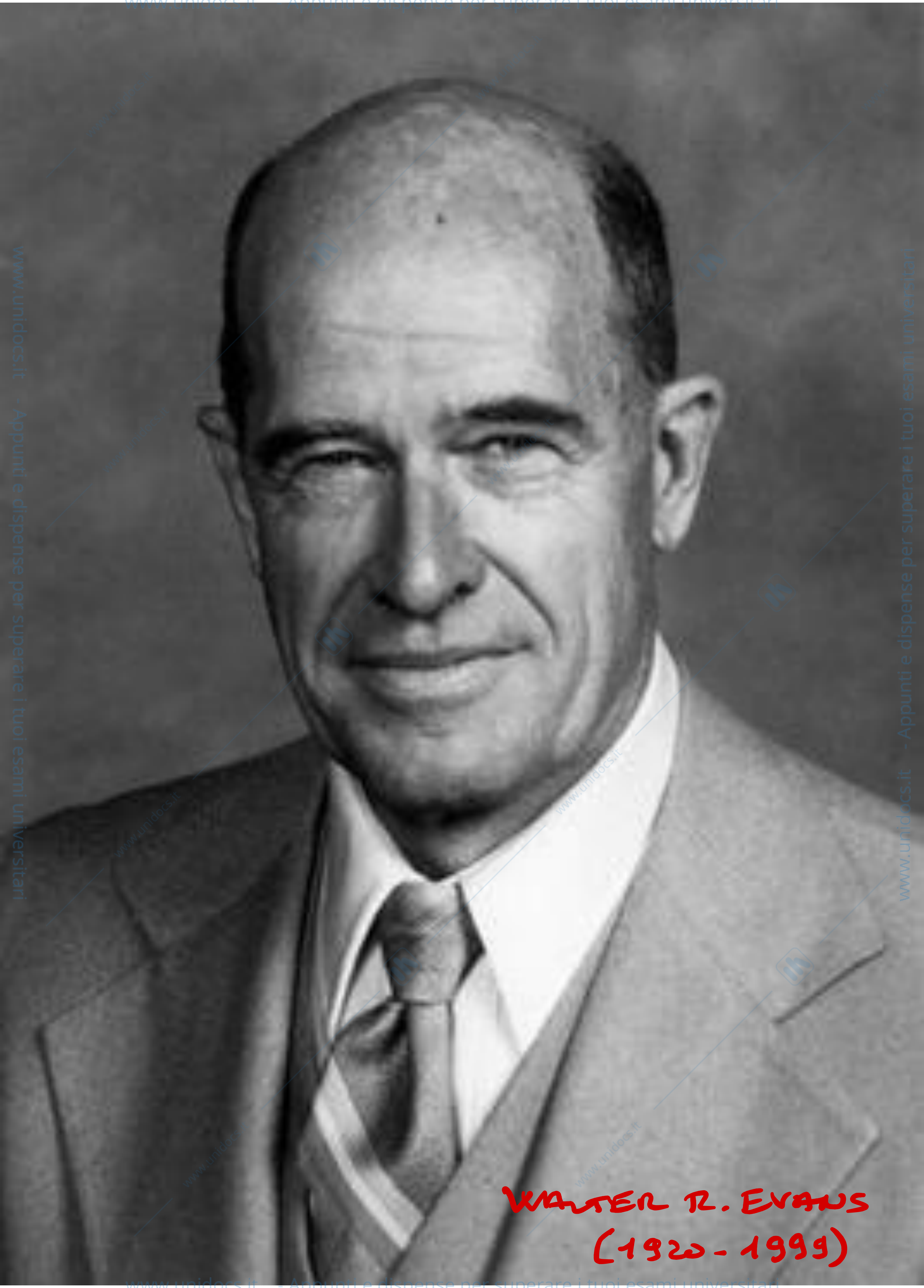
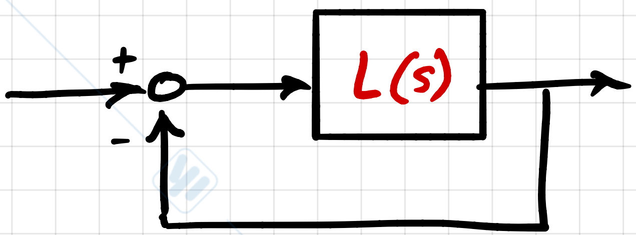
LUOGO DELLE RADICI


WALTER R. EVANS
(1920 - 1999)

- DEFINIZIONE DEL PROBLEMA



$$L(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^{m} (s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s+p_i)} = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}$$

$m < n$

$\varphi_{AC}(s) = D(s) + \rho N^*(s)$ POLINOMIO CARATTERISTICO IN A.C.

$s_i(\rho)$ RADICI DI $\varphi_{AC}(s)$ POLI IN A.C.

- PROBLEMA: COME VARIANO I POLI IN A.C. $s_i(\rho)$ AL VARIARE DI $\rho \in (-\infty, +\infty)$?

- ESEMPIO 1

$$L(s) = \frac{\rho}{(s+1)(s+2)} \qquad N^*(s) = 1$$
$$D(s) = (s+1)(s+2)$$

$$\varphi_{ac}(s) = D(s) + \rho N^*(s) = s^2 + 3s + 2 + \rho$$
$$\Longrightarrow s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1-4\rho}}{2}$$

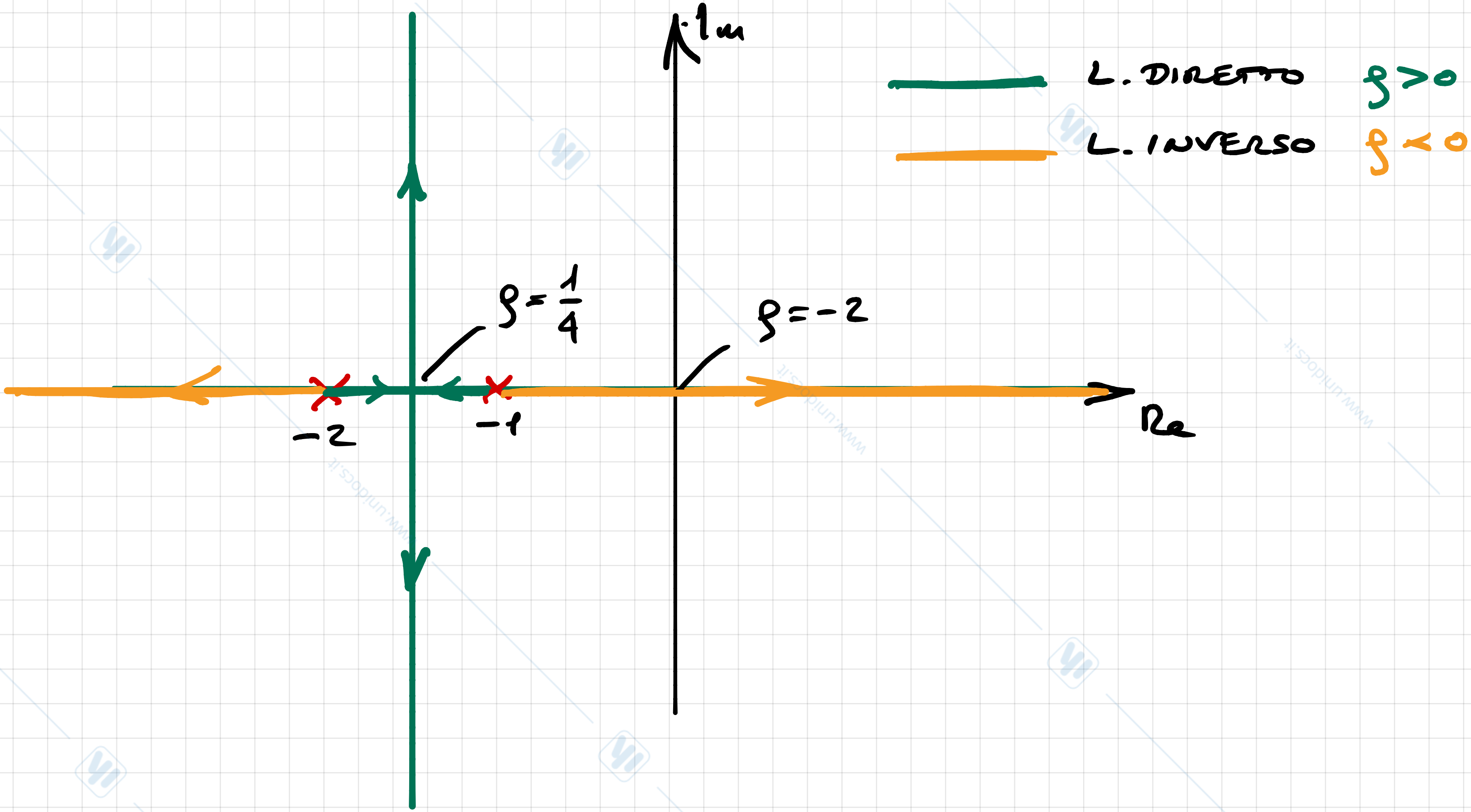
$\rho = 0$ $\quad s_1 = -1,\ s_2 = -2$ POLI IN A.A.

$0 < \rho < \frac{1}{4}$ $\quad -2 < s_2 < s_1 < -1$

$\rho = \frac{1}{4}$ $\quad s_1 = s_2 = -\frac{3}{2}$

$\rho > \frac{1}{4}$ $\quad s_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm j\,\frac{\sqrt{4\rho - 1}}{2}$

$\rho < 0$ $\quad s_1 > -1,\ s_2 < -2$


Im
Re
-2
-1
$\rho = \frac{1}{4}$
$\rho = -2$
L. DIRETTO $\rho > 0$
L. INVERSO $\rho < 0$

- CARATTERIZZAZIONE DEL L.D.R.

$$N^*(s) = \prod_i (s+z_i)$$
$$D(s) = \prod_i (s+p_i)$$

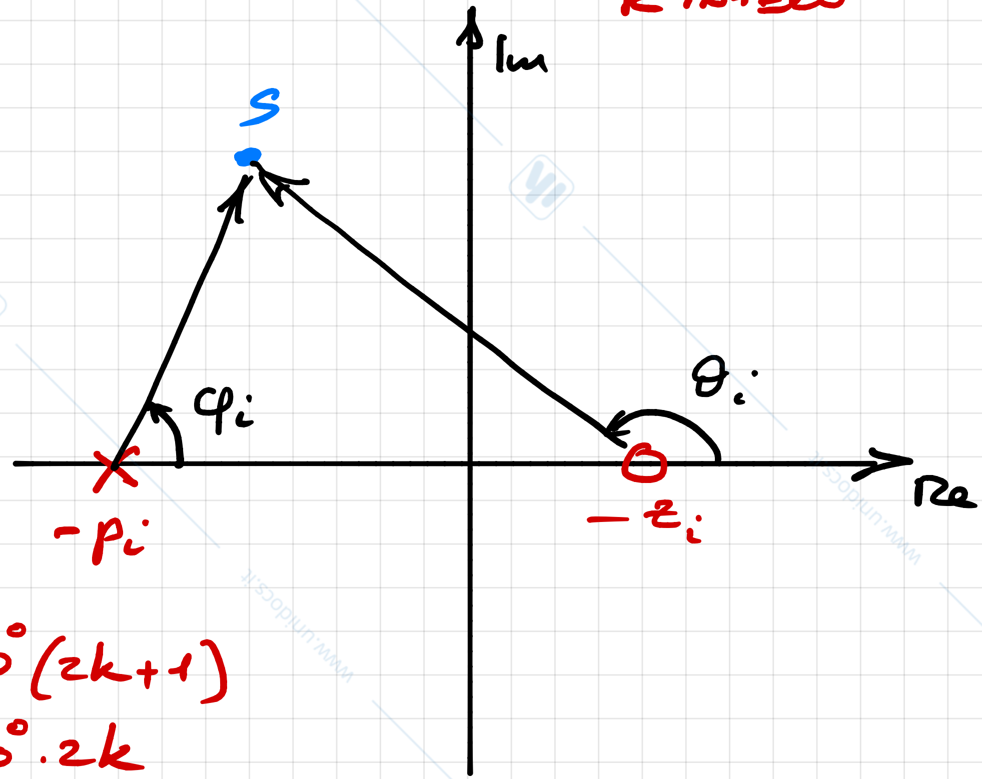
$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

$$\frac{N^*(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho} \iff \begin{cases} \dfrac{|N^*(s)|}{|D(s)|} = \dfrac{1}{|\rho|} \\ \measuredangle N^*(s) - \measuredangle D(s) = \begin{cases} 180^\circ(2k+1) & \rho > 0 \quad \text{L.D.} \\ 180^\circ \cdot 2k & \rho < 0 \quad \text{L.I.} \end{cases} \end{cases}$$

k INTERO

- INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

$$\measuredangle N^*(s) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\measuredangle(s+z_i)}_{\theta_i}$$
$$\measuredangle D(s) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\measuredangle(s+p_i)}_{\varphi_i}$$



S e L.D. $\iff \sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i = 180^\circ(2k+1)$

S e L.I. $\iff \sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i = 180^\circ \cdot 2k$

- Punteggiatura del L.D.R.

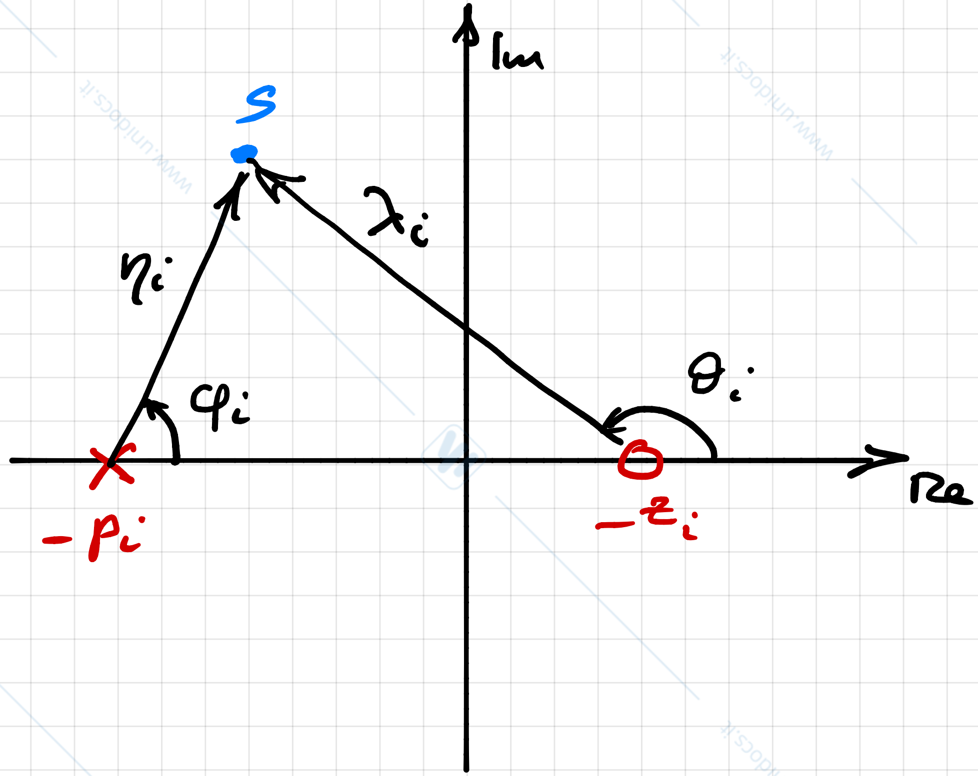
$$\frac{|N^*(s)|}{|D(s)|} = \frac{1}{|\rho|}$$

$$N^*(s) = \prod_i (s+z_i)$$

$$D(s) = \prod_i (s+p_i)$$

$$|N^*(s)| = \prod_i \underbrace{|s+z_i|}_{\lambda_i}$$

$$|D^*(s)| = \prod_i \underbrace{|s+p_i|}_{\eta_i}$$



$$\frac{\prod_i \lambda_i}{\prod_i \eta_i} = \frac{1}{|\rho|}$$

$$|\rho| = \frac{\prod_i \eta_i}{\prod_i \lambda_i} = \frac{\text{PRODOTTO DIST. DAI POLI}}{\text{PRODOTTO DIST. DAGLI ZERI}}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- REGOLE PER IL TRACCIAMENTO

$$L(s) = \rho \frac{\prod_{1}^{m} (s+z_i)}{\prod_{1}^{n} (s+p_i)} = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}$$

$\nu = n-m$ GRADO RELATIVO

$x_B = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (-p_i)$ BARICENTRO IN A.A.

- REGOLA 1

L.D.R. È COSTITUITO DA n RAMI NEL L.D. E n RAMI NEL L.I.

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

- EQ. POLINOMIALE DI GRADO n $\Rightarrow$ n RADICI
- DIPENDENZA CONTINUA DELLE RADICI DA ρ

- REGOLA 2

L.D.R. È SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE REALE

- LE RADICI SONO REALI O COMPLESSE CONIUGATE

- REGOLA 3
  - PER $\rho = 0$, I RAMI PARTONO DAI POLI DI $L(s)$

    POLI IN A.A.

    PER $|\rho| \to 0$ $\quad D(s) = 0$ HA RADICI IN $-p_i$

- REGOLA 4
  - PER $|\rho| \to \infty$,

    m RAMI FINISCONO NEGLI ZERI DI $L(s)$

    $\nu = n - m$ RAMI TENDONO ALL'INFINITO

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

$$\frac{D(s)}{\rho} + N^*(s) = 0 \xRightarrow{|\rho| \to \infty} N^*(s) = 0$$

ZERI IN A.A.

HA RADICI IN $-z_i$

LE ALTRE RADICI TENDONO ALL'INFINITO

- REGOLA 5

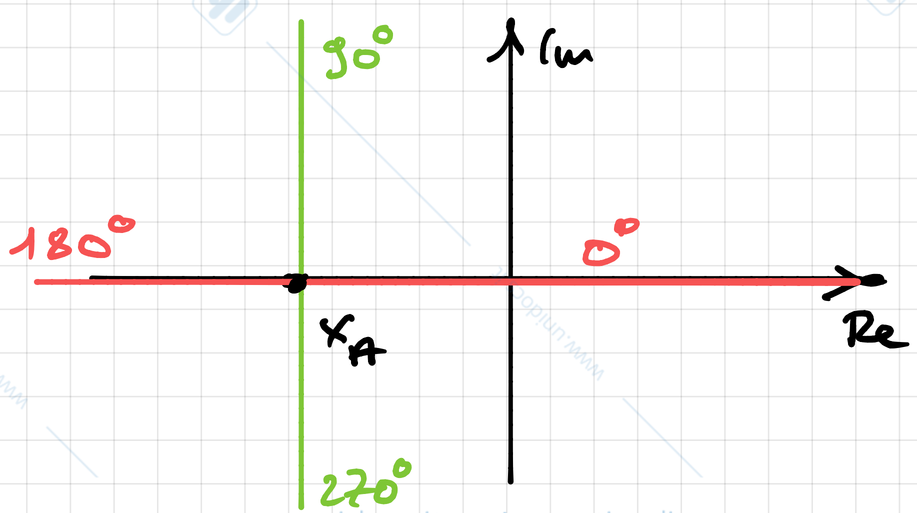
- I RAMI CHE TENDONO ALL'∞, HANNO ASINTOTI CHE
  - SI INTERSECANO SULL'ASSE REALE IN

$$x_A = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{1}^{m} z_i - \sum_{1}^{n} p_i\right)$$

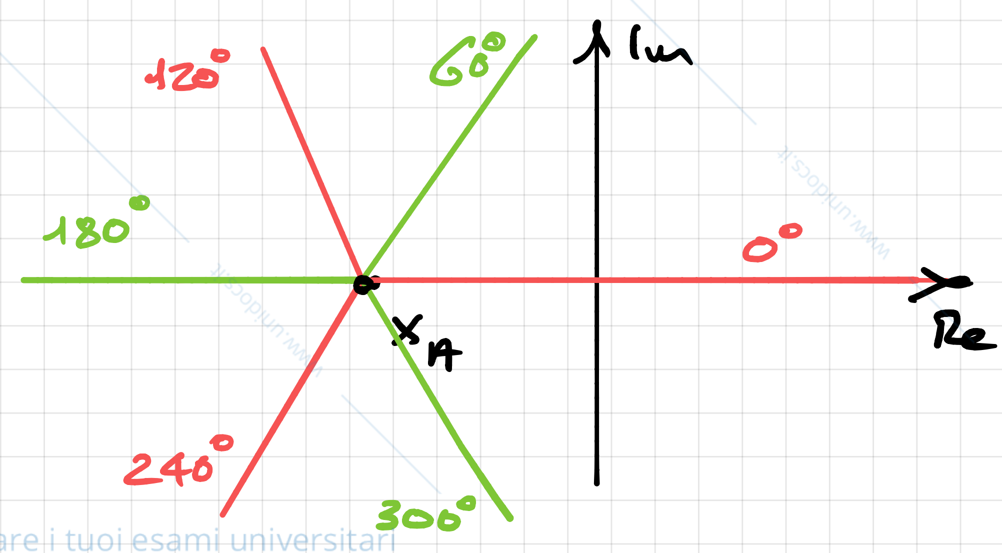
  - HANNO PENDENZE

$$\varphi_{Ak} = \begin{cases} \frac{1}{\nu}(2k+1)\cdot 180^\circ & \text{L.D.} \\ \frac{1}{\nu}\, 2k \cdot 180^\circ & \text{L.I.} \end{cases}$$

- ESEMPIO $\nu = 2$



- ESEMPIO $\nu = 3$



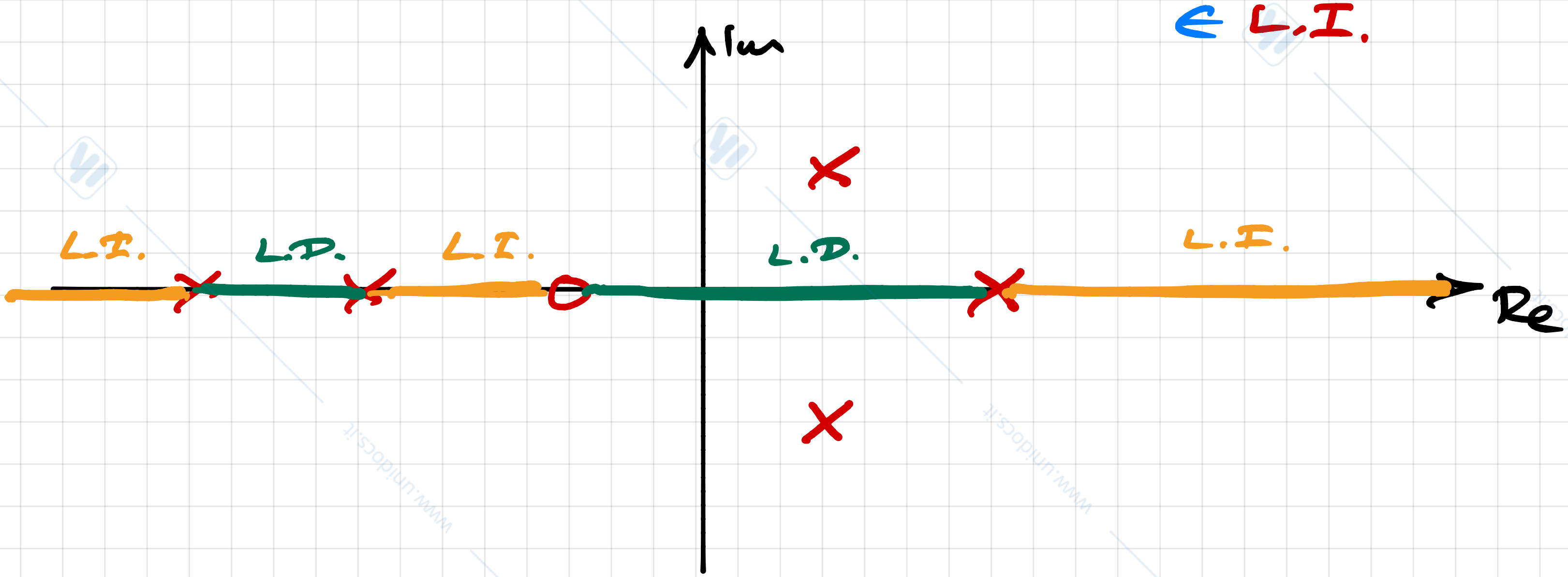
- REGOLA 6
  - L'INTERO ASSE REALE APPARTIENE AL L.D.R.

$$D(\bar{s}) + \rho N^*(\bar{s}) = 0 \qquad \bar{s} \text{ REALE}$$

$$\rho = -\frac{D(\bar{s})}{N^*(\bar{s})} \qquad \text{REALE}$$

POLI E ZERI

- PUNTI A SINISTRA DI UN NUMERO DISPARI DI SINGOLARITÀ DI $L(s)$ $\in$ L.D.
- PUNTI A SINISTRA DI UN NUMERO PARI DI SINGOLARITÀ DI $L(s)$ $\in$ L.I.



- REGOLA 7

- SE $\nu \geq 2$ IL BARICENTRO IN A.C. COINCIDE CON IL BARICENTRO IN A.A. x_B

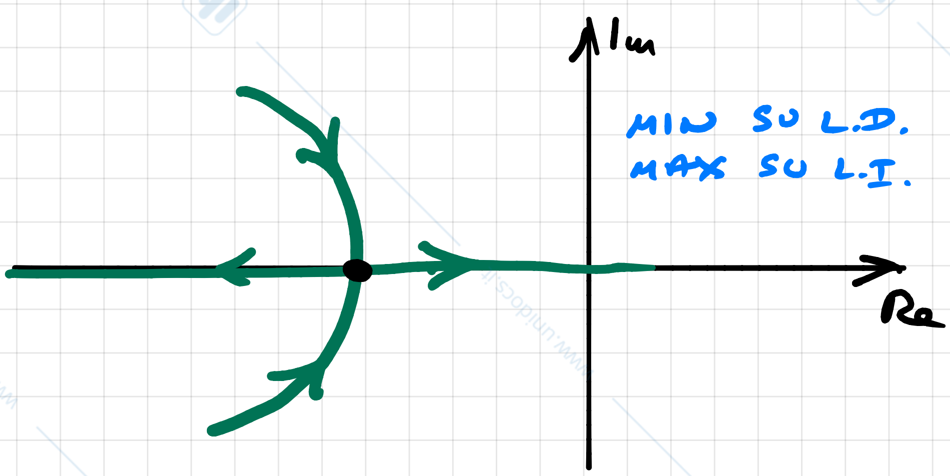
$$x_B(\rho) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i(\rho) \qquad x_B(0) = x_B = \sum_{i=1}^{n}(-p_i)$$

- REGOLA 8

- I PUNTI DI INCONTRO DI RAMI SULL'ASSE REALE SI TROVANO COME PUNTI DI MIN/MAX DI

$$\gamma(x) = -\frac{D(x)}{N^*(x)}, \quad x \text{ REALE}$$

- ESEMPIO - PUNTO DI CONFLUENZA



- ESEMPIO - PUNTO DI DIRAMAZIONE