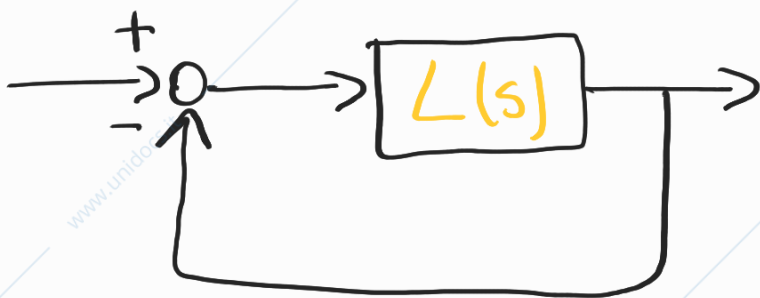


Luogo delle Radici

→ combinazione di metodi già studiati per le stabilità (studio dei sist. retroazion)

! → rappresentaz grafica di come si muovono i poli in un. chiuso al variare di un parametro (dipenderà dal guad della funz d'anello)

Definizione del problema:



↳ strumento aggiunto per analisi e sintesi di sistemi retroazionati

- z_i : zeri in A.A

- p_i : poli in A.A

$$L(s) = \underbrace{\mathcal{K}}_{\text{cost di trasferimento}} \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}$$

cost di trasferimento

$n > m$
funz. strett propria

$$L(s) = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}$$

polinomio grado m
(il num. comprenderebbe anche ρ)

Studiare poli del sist retroazionato:

$$Y_{AC}(s) = D(s) + \rho N^*(s)$$

polin.
ceratt in
an. chiuso

↳ sue radici sono i poli in an. chiuso → determinano dinamica del sist. retroaz.

$$S_i(\rho) \quad i = 1, \dots, n$$

poli in an. chiuso

radici di $Y_{AC}(s)$

(cercare per quali ρ
il sist è AS-STAB)

Problems: come variano i poli in A.C. $S_i(\rho)$
al variare di $\rho \in (-\infty, +\infty)$
(parametro reale)

abbiamo molte informazioni sul sist retroaz
possiamo valutare prestaz statiche e dinamiche
effettive del sistema (con base solo
prestaz dinamiche approx)

→ punto ∈ LDR utile per trovare la
caratterizzazione geometrica del luogo

Esempio:

$$L(s) = \frac{\beta}{(s+1)(s+2)}$$

$$p_1 = 1$$

$$p_2 = 2$$

NO zeri

$$N^*(s) = 1$$

$$D(s) = (s+1)(s+2)$$

poli in A.C: $\varphi_{AC}(s) = D(s) + \beta N^*(s) = 0$

$$= s^2 + 3s + 2 + \beta = 0$$

$$\Rightarrow s_{1,2}(\beta) = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8 - 4\beta}}{2} \rightarrow \sqrt{1 - 4\beta}$$

Discutere come variano le radici (i poli) al variare di β .

$\beta = 0$ $\Rightarrow s_1 = -1, s_2 = -2$ poli in AA
= poli in A.C
(aperta e' anello)

per valori piccoli di β fino a $\beta = \frac{1}{4}$ il discriminante è positivo:

$$0 < \beta < \frac{1}{4} \quad -2 < s_2 < s_1 < -1$$

$$\beta = \frac{1}{4}$$

$$S_1 = S_2 = -\frac{3}{2}$$

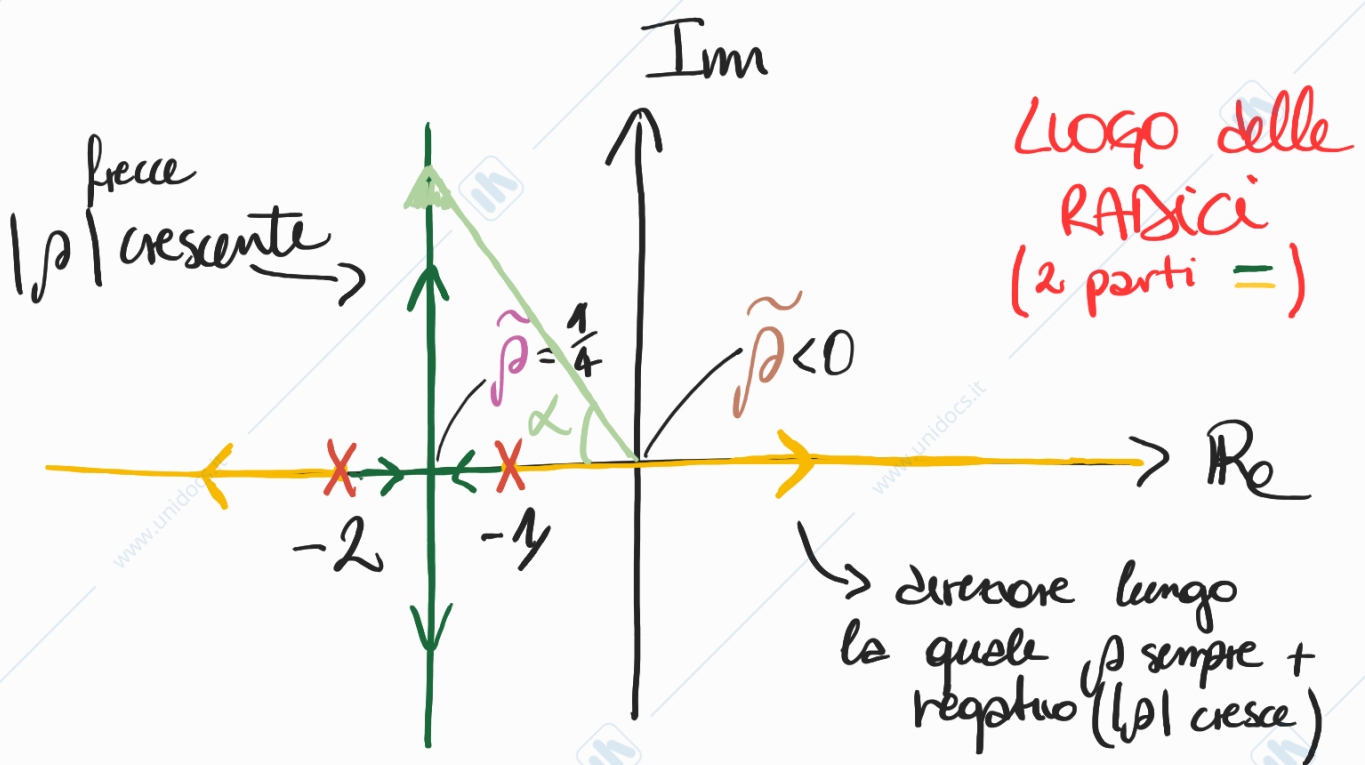
$$\beta > \frac{1}{4}$$

$$S_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm j \sqrt{\frac{4\beta - 1}{2}}$$

$\beta \uparrow$ parte Imm di $S_{1,2}$

$$\beta < 0$$

$$S_1 > -1, S_2 < -2$$



— LUOGO DIRETTO : $\beta > 0$
(asse segmento congiunge poli di partenza + segmento stesso)

— LUOGO INVERSO : $\beta < 0$
(2 poli reali \rightarrow 2 rami : dal polo + grande $\rightarrow +\infty$
dal polo + piccolo $\rightarrow -\infty$)

Nel LUOGO DIR c'è sempre AS. STAB
 mentre nel LUOGO INW non è detto
 → valore di β limite < 0 ($\tilde{\beta}$)
 che fa sì che il sistema diventi instabile

(uno degli usi: GIUDICARE la STAB ASINT
 facendo il grafico dei poli nel piano complesso)

per $\beta > 0$ ma valori MOLTO GRANDI
 poli hanno un BASSISSIMO SMORTZAM
 ⇒ risp allo scalo sarà MOLTO oscillante

∴ ↓ per $\beta \uparrow$ ($\xi > 0$) ($\xi = -\cos(\alpha)$)

Posso usare il grafico per calcolare la ubicata
 di risposta e il tempo di assestamento:

il sistema non può essere arbitrariamente veloce
 perché i poli non si possono spostare arbitrariamente
 verso SX ∴

luogo diretto NO distanza ∞ dall'origine
 (renderebbe nullo smorzamento)

Caratterizzazione del L.D.R.:

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

$$N^*(s) = \prod_{i=1}^m (s + z_i)$$

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s + p_i)$$

$$\frac{N^*(s)}{D(s)} = -\frac{1}{\rho} \iff$$

complesso = # reale

2 identità campo Re $\left\langle \begin{array}{l} \text{modulo} \\ \text{fase} \end{array} \right.$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{|N^*(s)|}{|D(s)|} = \frac{1}{|\rho|} \\ \angle N^*(s) - \angle D(s) = \begin{cases} \text{multiplo dispari} & \text{LD} \\ (2K+1) \cdot 180^\circ & \rho > 0 \\ \text{multiplo pari} & \text{LI} \\ 2K \cdot 180^\circ & \rho < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow s \in \text{LDR}$

senza vincoli

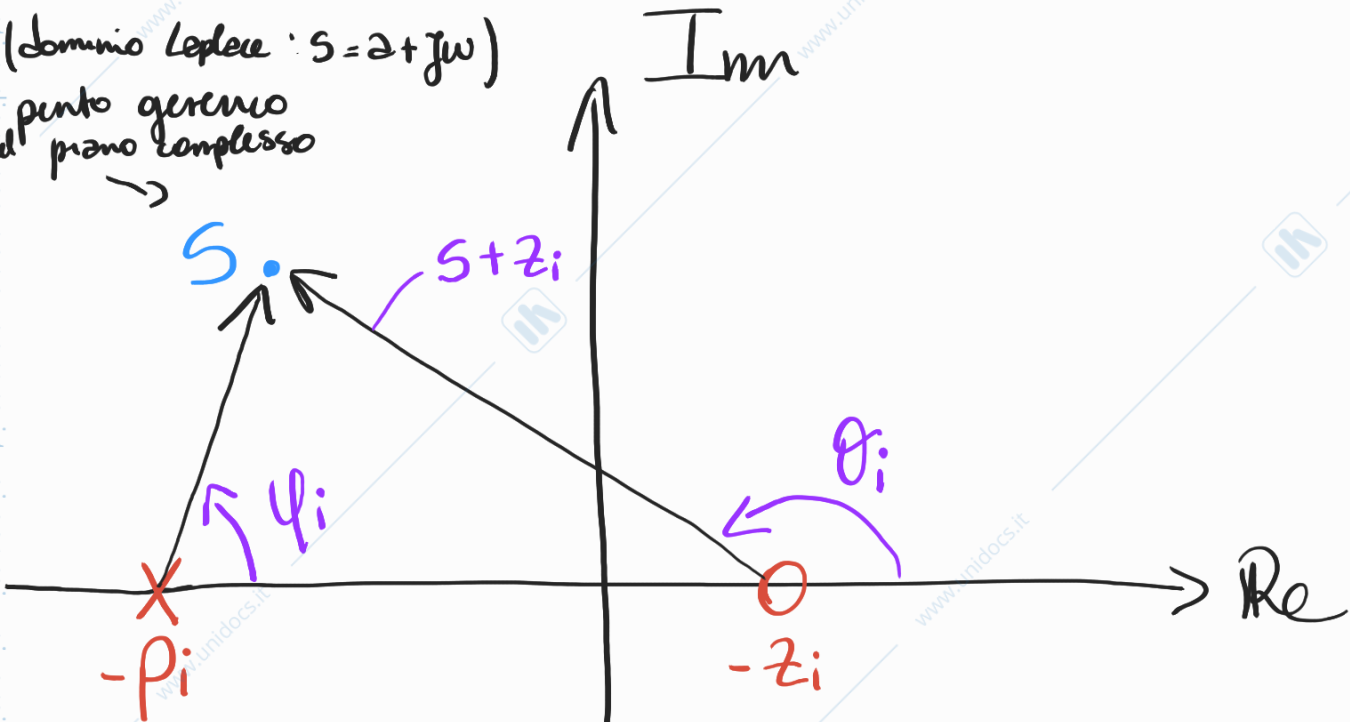
queste 2 relazioni

Interpretazione geometrica:

$$\neq N^*(s) = \sum_{i=1}^m \neq (s + z_i) \quad \theta_i$$

$$\neq D(s) = \sum_{i=1}^n \neq (s + p_i) \quad \varphi_i$$

(dominio Laplace: $s = \sigma + j\omega$)
 punto generico
 del piano complesso
 \rightarrow



(prendo tutti poli e zeri e sommo gli angoli che li collegano al generico punto s)

$$s \in \angle D \Leftrightarrow \sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i = (2K+1)180^\circ$$

$$s \in \angle I \Leftrightarrow \sum_i \theta_i - \sum_i \varphi_i = 2K \cdot 180^\circ$$

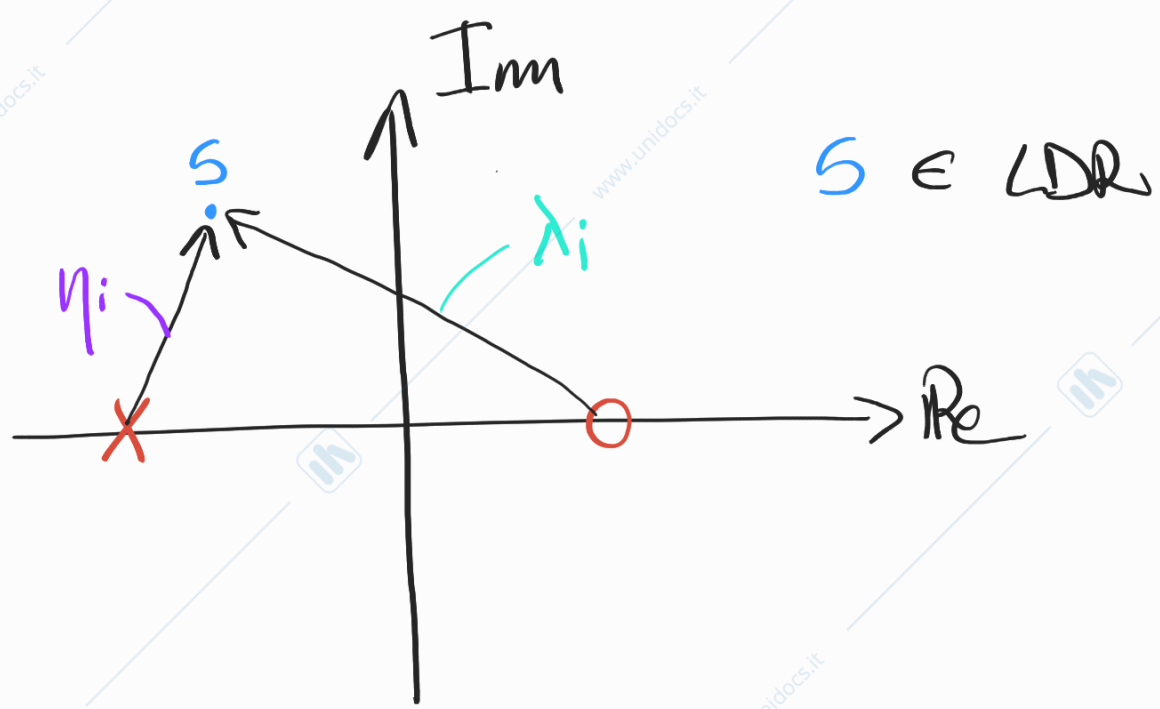
Identità tra modulo e fase serve per determinare la

Punteggiatura del LDR:

$$\frac{|N^*(s)|}{|D(s)|} = \frac{1}{|\rho|}$$

$$N^*(s) = \tilde{u}_i (s + z_i)$$

$$D(s) = \tilde{u}_i (s + p_i)$$



$$|N^*(s)| = \prod_{i=1}^m |s + z_i| = \tilde{u}_i \lambda_i$$

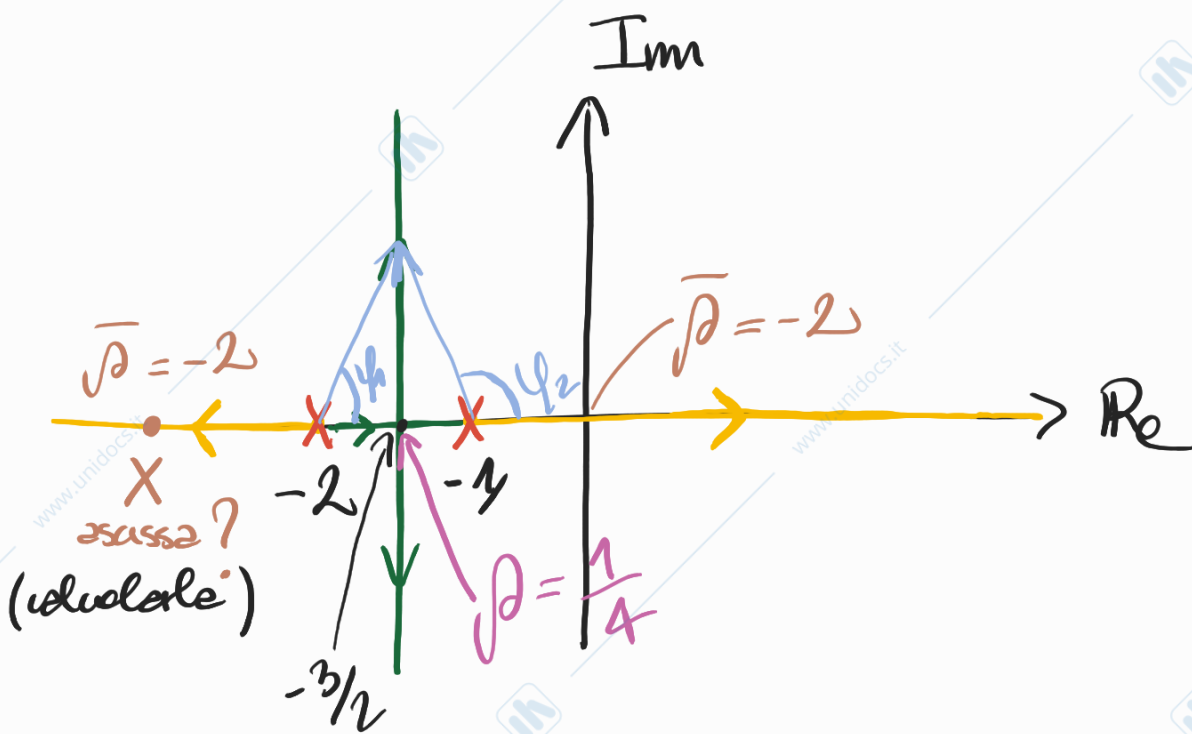
$$|D(s)| = \prod_{i=1}^n |s + p_i| = \tilde{u}_i \eta_i$$

$$\frac{\tilde{u}_i \lambda_i}{\tilde{u}_i \eta_i} = \frac{1}{|\rho|}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\rho| = \frac{\prod u_i \eta_i}{\prod u_i \lambda_i}} = \frac{\text{prodotto dist dai poli}}{\text{prodotto dist dagli zeri}}$$

regola della PUNTEGGIATURA

Esempio: dal grafico del luogo delle radici esempio prec.



$$\rho = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2 \quad ! \text{ OK}$$

$$\bar{\rho} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2 \quad ! \text{ OK}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$$

$$\sum \varphi_i = (2k+1)180^\circ$$

$$-\sum \varphi_i = 2k \cdot 180^\circ$$

Regole ^{universali} per il tracciamento:

$$L(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{i=1}^n (s+p_i)} = \rho \frac{N^*(s)}{D(s)}$$

$$\gamma^{nu} = n - m \quad \text{grado relativo}$$

$$X_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{(-p_i)}_{\text{poli}} \quad \text{baricentro in A.A.}$$

Regola 1:

LDR è costituito da n rami nel LD e da altri n rami nel LI

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

- eq polinomiale di grado n ha sempre n radici
- dipendenza continua delle radici rispetto a ρ

Regola 2 :

LDR è simmetrico rispetto all'asse Re
 sufficiente disegnare il luogo nel semipiano super per averlo completamente \rightarrow radici reali o complesse coniugate

Regola 3 : da dove partono i rami LDR

per $\rho = 0$ i rami partono dai poli di $L(s)$

per $|\rho| \rightarrow 0$: $D(s) + \rho N^*(s) = 0$
 ha radici in $-p_i$

Regola 4 : dove arrivano i rami per $\rho \rightarrow \infty$

per $|\rho| \rightarrow \infty$

m rami finiscono negli zeri di $L(s)$
 $r = n - m$ rami tendono all'infinito

$$D(s) + \rho N^*(s) = 0$$

$$\frac{D(s)}{N(s)} + N^*(s) = 0 \implies N^*(s) = 0$$

$|s| \rightarrow \infty$ ha (m) radici in $-z_i$

eq algebrica perde grado alcune radici vanno ∞

Regola 5 :

i rami che tendono all' ∞ , hanno **ASINTOTI** che :

- si intersecano sull'asse Re in

$$x_A = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^m z_i - \sum_{i=1}^n p_i \right)$$

- hanno pendenze :

$$\psi_{AK} = \begin{cases} \frac{1}{n} (2K+1) 180^\circ & \text{LD} \\ \frac{1}{n} 2K \cdot 180^\circ & \text{LI} \end{cases}$$

\uparrow
 \neq asintoti

Esempio con $n = 2$

$$\psi_{AK} = \frac{1}{2} (2K+1) 180^\circ$$

$$\{ 90^\circ, 270^\circ \} \quad \text{LD}$$

$$\{0, 180\}$$

LI

Esempio con $n=3$

$$\psi_{AK} = \frac{1}{3} (2K+1) 180^\circ$$

$$\{60^\circ, 180^\circ, 300^\circ\}$$

LD

$$\{0, 120^\circ, 240^\circ\}$$

LI

Angolo base : $\frac{180^\circ}{n}$

(distanza tra
z-simboli LD
e LI)

Regola 6 :

- l'intero asse reale appartiene al LDR

$$D(\bar{s}) + \rho N^*(\bar{s}) = 0$$

se \bar{s} reale $\rightarrow \rho = -\frac{D(s)}{N^*(s)}$ reale

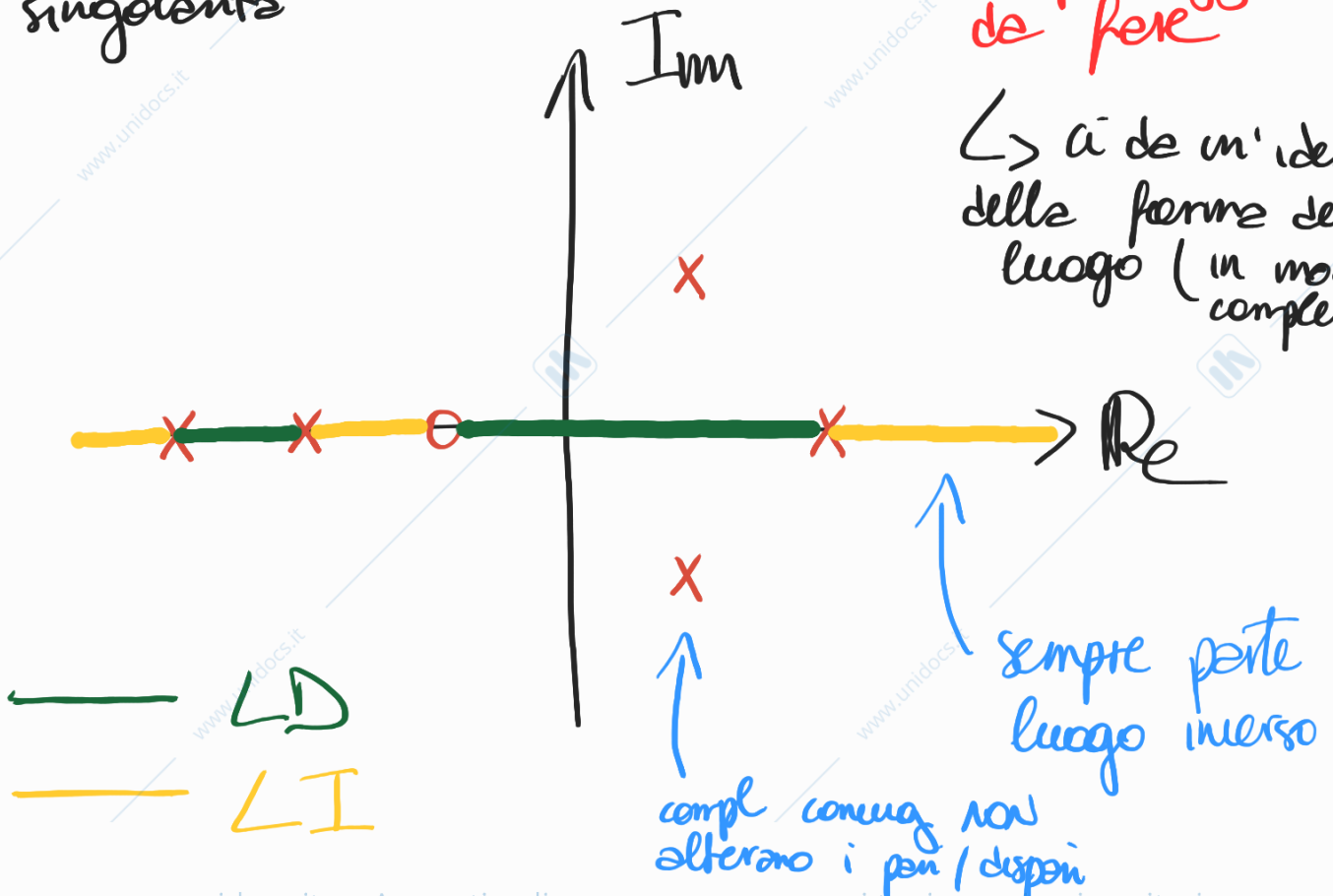
- punti a SX di un numero dispari di singolarità (poli o zeri) di $L(s) \in \mathcal{LD}$

- punti a SX di un numero pari di singolarità (poli o zeri) di $L(s) \in \mathcal{LI}$

\Rightarrow Regole permettono di individuare tutti i punti che appartengono all'asse Re in 2 sottosistemi: $\in \mathcal{LD}$, $\in \mathcal{LI}$

Esempio:

6 singolarità



Regola 7 :

- se $n \geq 2$ il baricentro in un chiuso coincide con il baricentro in un aperto
- \nearrow non dipende da ρ

$$X_B(\rho) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(\rho) = X_B$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-p_i)$$

baricentro si conserva

$$q_i = \sum_i S_i(\rho)$$

$$D(s) + \rho N^*(s) = S^n + q_1 S^{n-1} + q_2 S^{n-2} + \dots + q_n$$

\hookrightarrow non dipendono da ρ

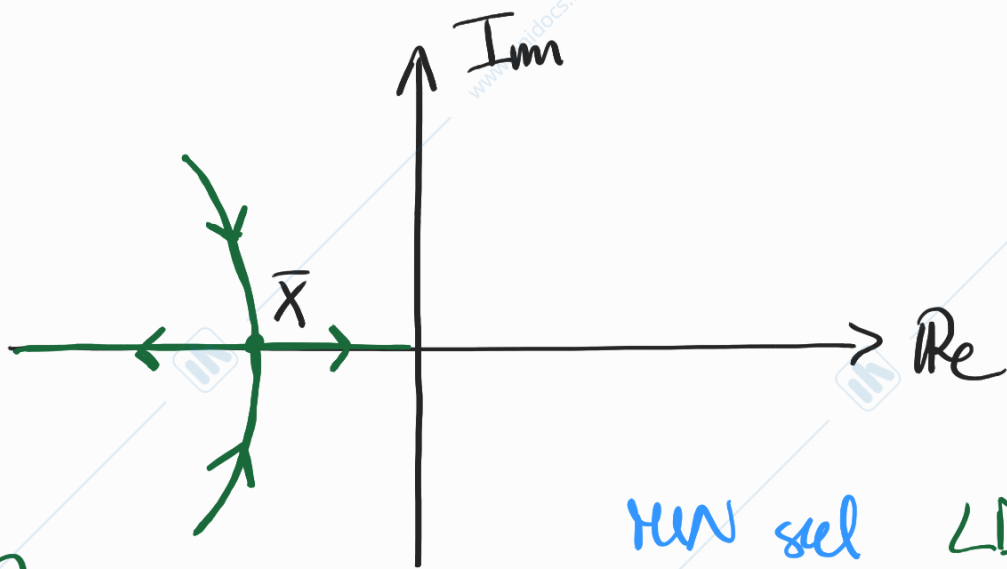
Regola 8 :

individuare punti incrocio rami su asse Re

\nearrow punti del piano che descrivono i poli in A.C.

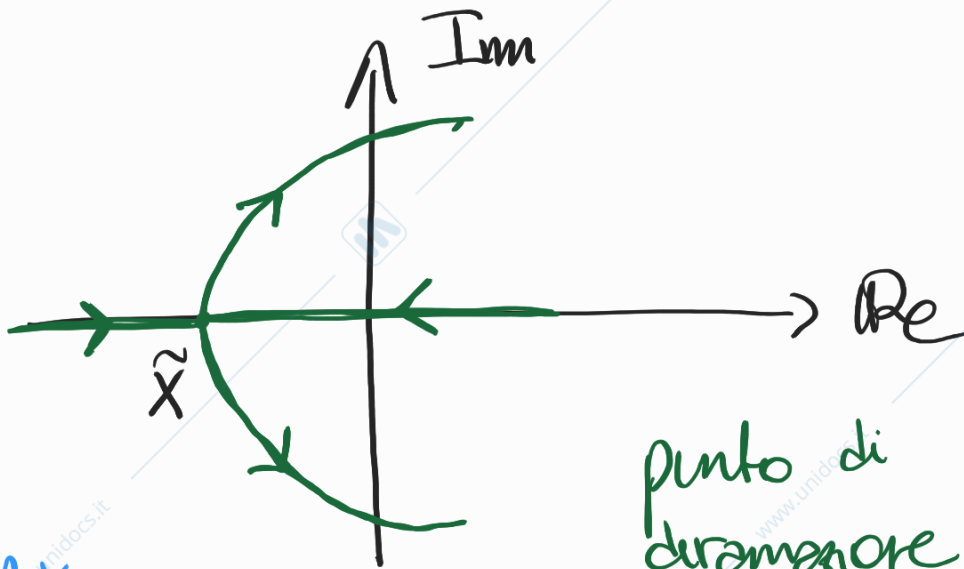
- i punti d'incrocio di rami sull'asse Re si trovano come punti di min/max di

$$P(x) = -\frac{D(x)}{N^*(x)}, \quad x \text{ reale}$$



punto di
confluenza

MIN	sel	LD
MAX	sel	LI



punto di
divergenza

MAX	sw	LD
MIN	sw	LI