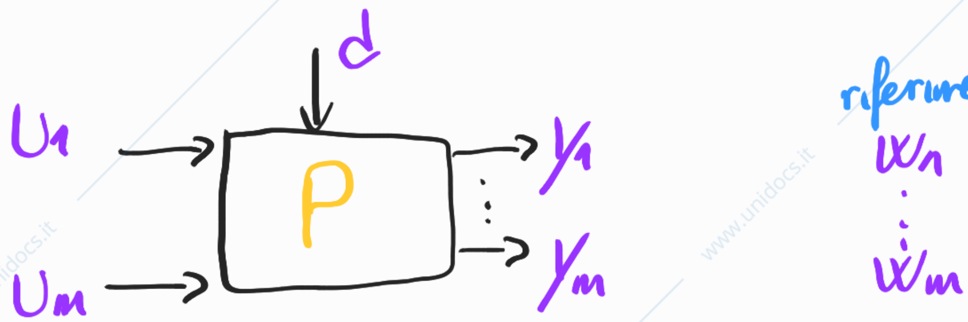
Controllo Multivariabile

sia variabile controllata sia u sono VETTORI
→ dobbiamo contemporaneam. controllare un certo numero di variabili ($\neq 1$)
Quali strumenti per controllo SISO possono essere utilizzati nel controllo multivariabile

(multi INPUT multi OUTPUT)

Sistemi Controllo MIMO :



Controllare un processo P che presenta un certo numero di uscite da controllare (m) e abbiamo a disposizione un certo numero di ingressi (m), ci possono essere anche dei disturbi (d)
→ riferimenti da perseguire (w)

Problema: Controllo congiunto di y_i mediante u_j

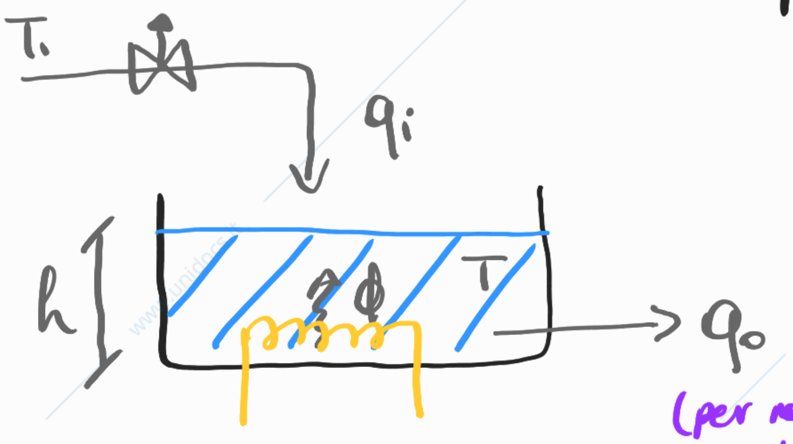
$$y_i(t) \simeq w_i(t)$$

Difficoltà: cambiamento di u_i può avere effetto su + uscite (generare disturbi)

→ possibili interazioni

3 esempi di interazione in cui nasce questa problematica (trascurabile, parziale o insidiosa)

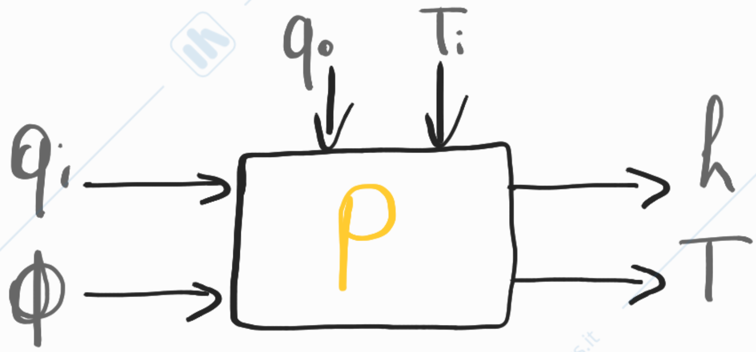
Esempio 1: controllo di livello e temperatura



(per noi come disturbo)

Controllare congiuntam. T e h

2 IN : q_i e ϕ



$m = 2$

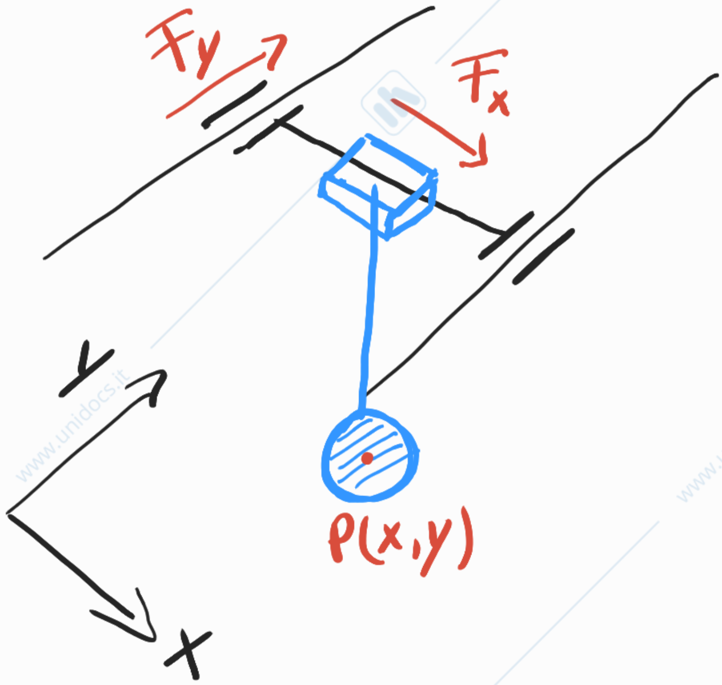
Interazioni tra $\neq$ variabili :

manovrando $q_i \rightarrow$ effetto T e h

manovrare $\phi \rightarrow$ effetto T ma non su h

interazione PARZIALE (o triangolare)

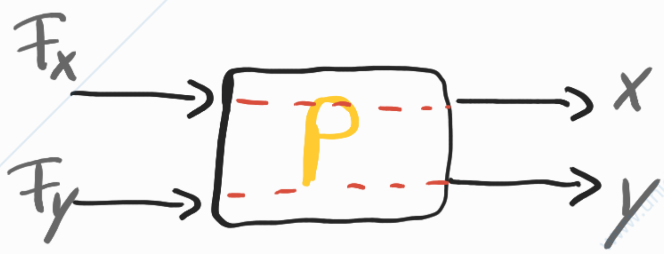
Esempio 2 : carroponte



Vogliamo controllare p_x e p_y

2 forze motrici (INPUT)

comportamento **manipolatori cartesiani** (per robot)



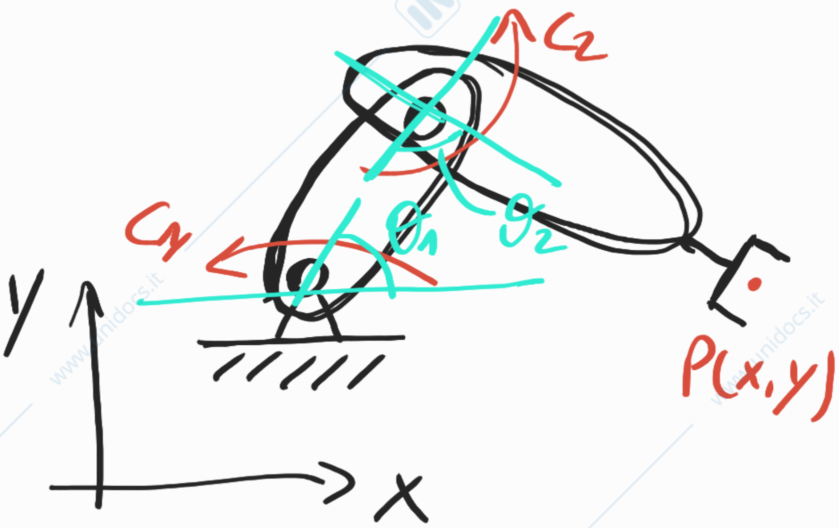
Debolissime interazioni tra F_x e y e F_y e x

Interazione "NULLA"

finto problema MIMO → insieme di 2 problemi SISO

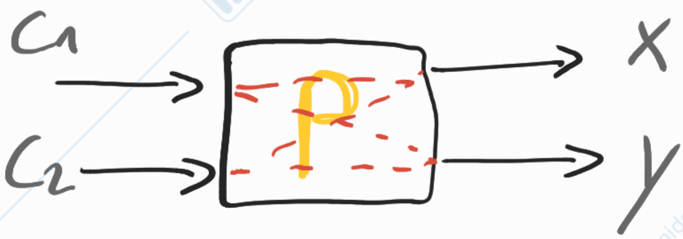
Esempio 3: manipolatore antropomorfo

↳ semplificazione: braccio robotico con 2 link



robot planare (x e y)

c_i : coppia i



Entrambe variabili OUT sono influenzate da entrambe variabili di controllo (c_i) (non lineare)

Interazione "COMPLETA"

Nella robotica si preferisce sostituire alle var. cartesiane le var di giunto (θ) $\Longrightarrow$

In questo modo si hanno dei legami separati scegli OUT (cinematica dir/inversa)

Abbiamo bisogno di metodologie per passare al controllo multivariabile:

MATRICE di trasferimento

(sostituisce funzione di trasferimento caso SISO)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underset{n \times n}{A} x(t) + \underset{n \times m}{B} u(t) \\ y(t) = \underset{p \times n}{C} x(t) + \underset{p \times m}{D} u(t) \end{cases}$$

$$x(t) = \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}, \quad u(t) = \underset{m \times 1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}, \quad y(t) = \underset{p \times 1}{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}}$$

Matrice di trasferimento:

$$\underset{\text{trasf di Laplace di } y(t)}{Y(s)} = \underset{p \times m}{G(s)} U(s) \quad \text{con } x(0) = 0$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & & \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

un modo per ottenere la trasformata dell'uscita partendo dalla trasformata ingresso

$G(s)$ è funz razionale (rapp polinomi)

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(s)\, U_j(s)$$

(elementi i-esima riga di $G(s)$ moltiplico elemento j-esimo di $U(s)$ e sommo elementi per tutte le j (faccio somme))

$$\boxed{G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}}$$ con $U_K(s) = 0,\ K \neq j$, $x(0) = 0$

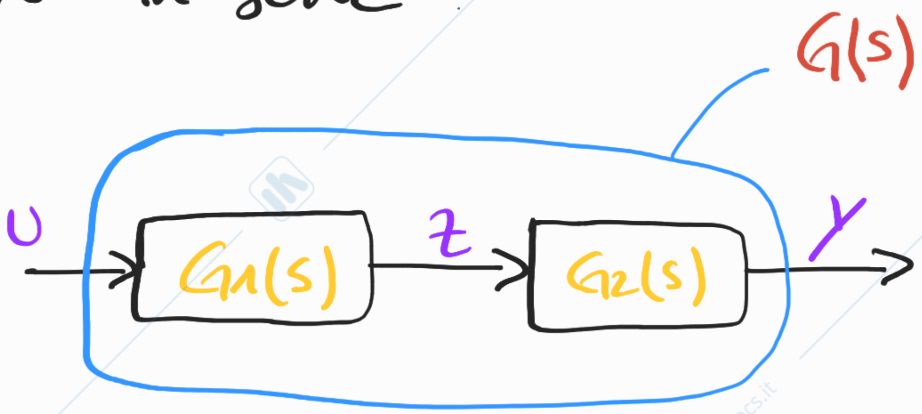
descrive effetto di $U_j(t)$ su $Y_i(t)$

Come elaboro gli schemi a blocchi che contengono le matrici di trasferimento:

Schemi a blocchi MIMO : con CI nulle

$$\underset{p\times 1}{Y(s)} = \overset{p\times m}{G(s)}\,\underset{m\times 1}{U(s)}$$

Blocchi in serie :

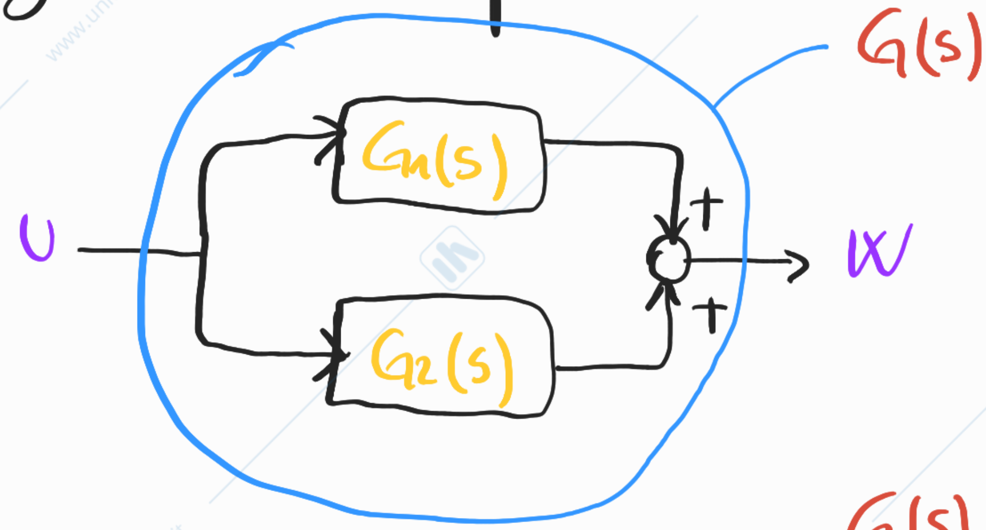


$$Y(s) = G_2(s)U(s) = \underbrace{\boxed{G_2(s)G_1(s)}}_{G(s)}U(s)$$

attenzione all'ordine!

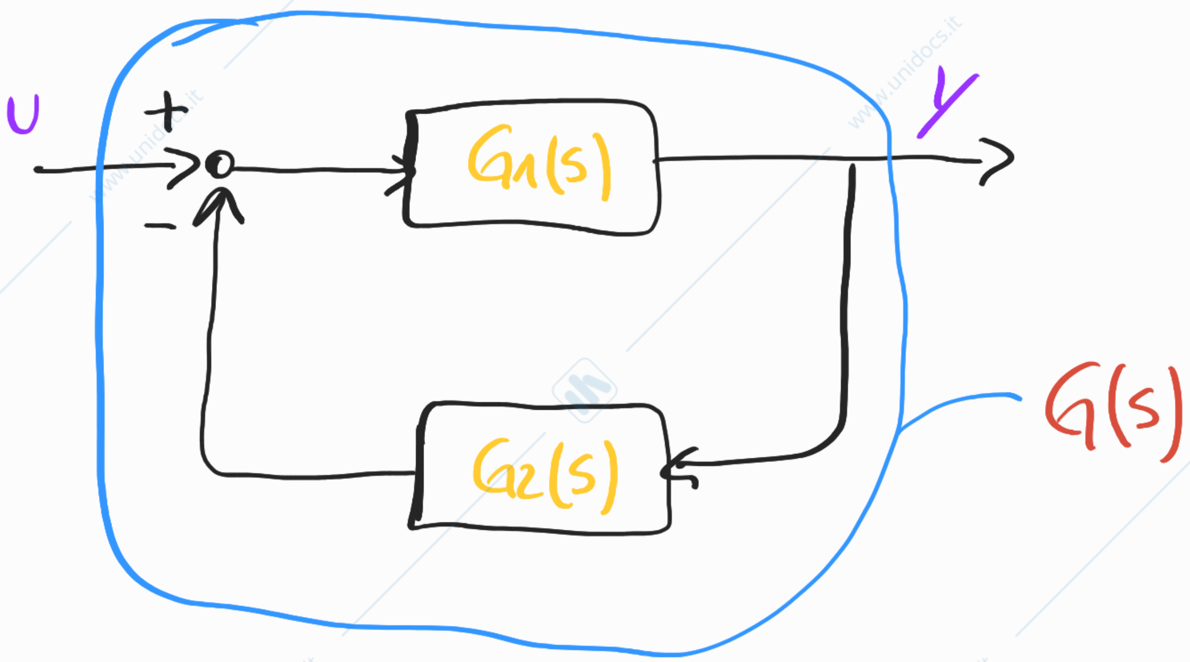
partire dall'ultimo e risalire nella catena per moltiplicazione matrici

Blocchi in parallelo:



$$Y(s) = \overbrace{\left(G_1(s) + G_2(s)\right)}^{G(s)} U(s)$$

Blocchi in retroazione:



$$Y(s) = G_1(s)\left(U(s) - G_2(s)Y(s)\right)$$

$$\left(I + G_1(s)G_2(s)\right) Y(s) = G_1(s)U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\left(I + G_1(s)G_2(s)\right)^{-1} \cdot G_1(s)}_{G(s)} U(s)$$

Poli e zeri di un sistema MIMO:

(no definiz. rigorose)

Caso $m = p$ (quadrato):

$G(s)$ matrice di trasferim. $m \times m$

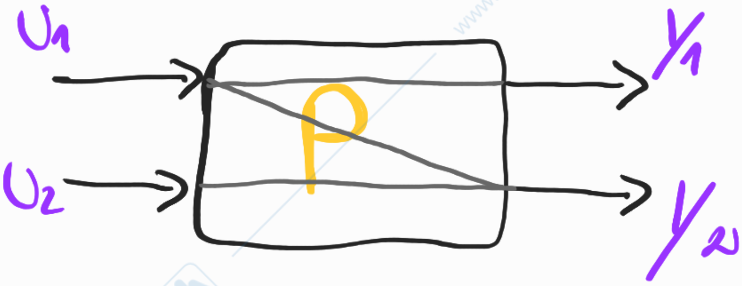
- POLI : tutte le radici dei denominatori di $G_{ij}(s)$
- ZERI : tutte le radici di $\det G(s) = 0$

coincidono con gli autovalori di A (salvo parti nascoste)

AS. STAB $\Longleftrightarrow$ tutti i poli hanno Re<0

(solo parti nascoste)

Disaccoppiamento di sistemi "triangolari"



$m = 2$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

matrice triangolare (inferiore)

Interazione "PARZIALE"

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

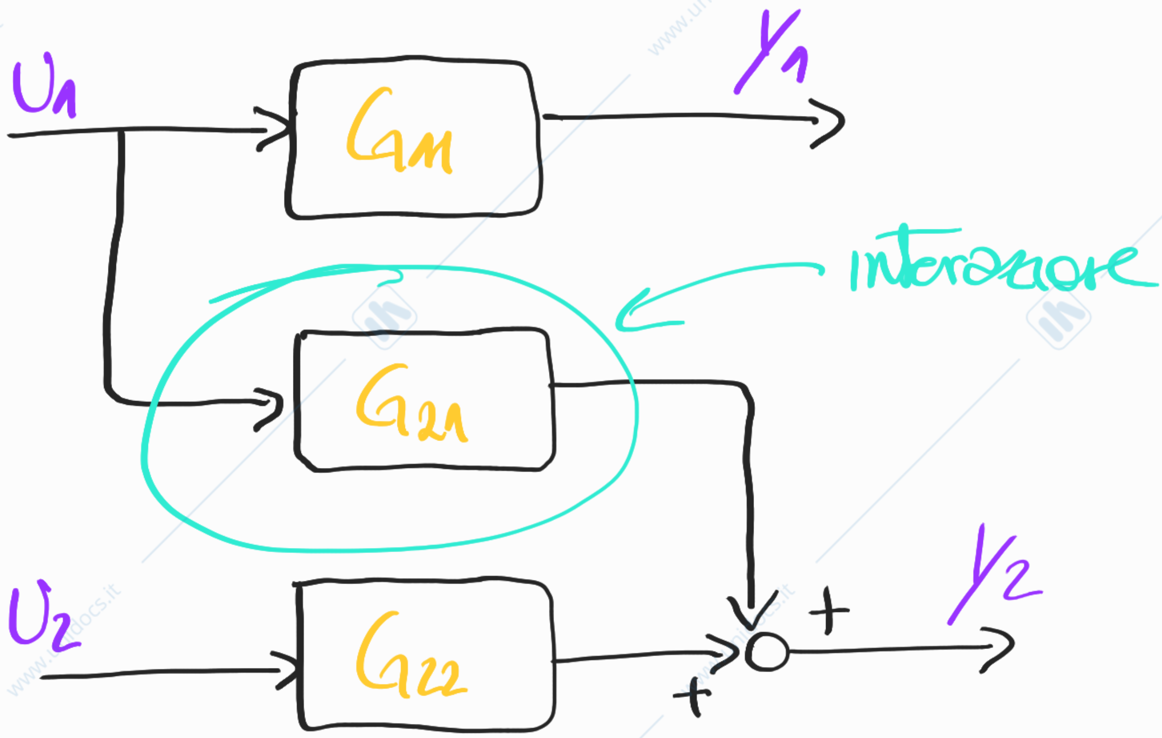
$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}U_2(s) \end{cases}$$

Possiamo ricondurci al progetto di 2 sistemi di controllo SISO ?

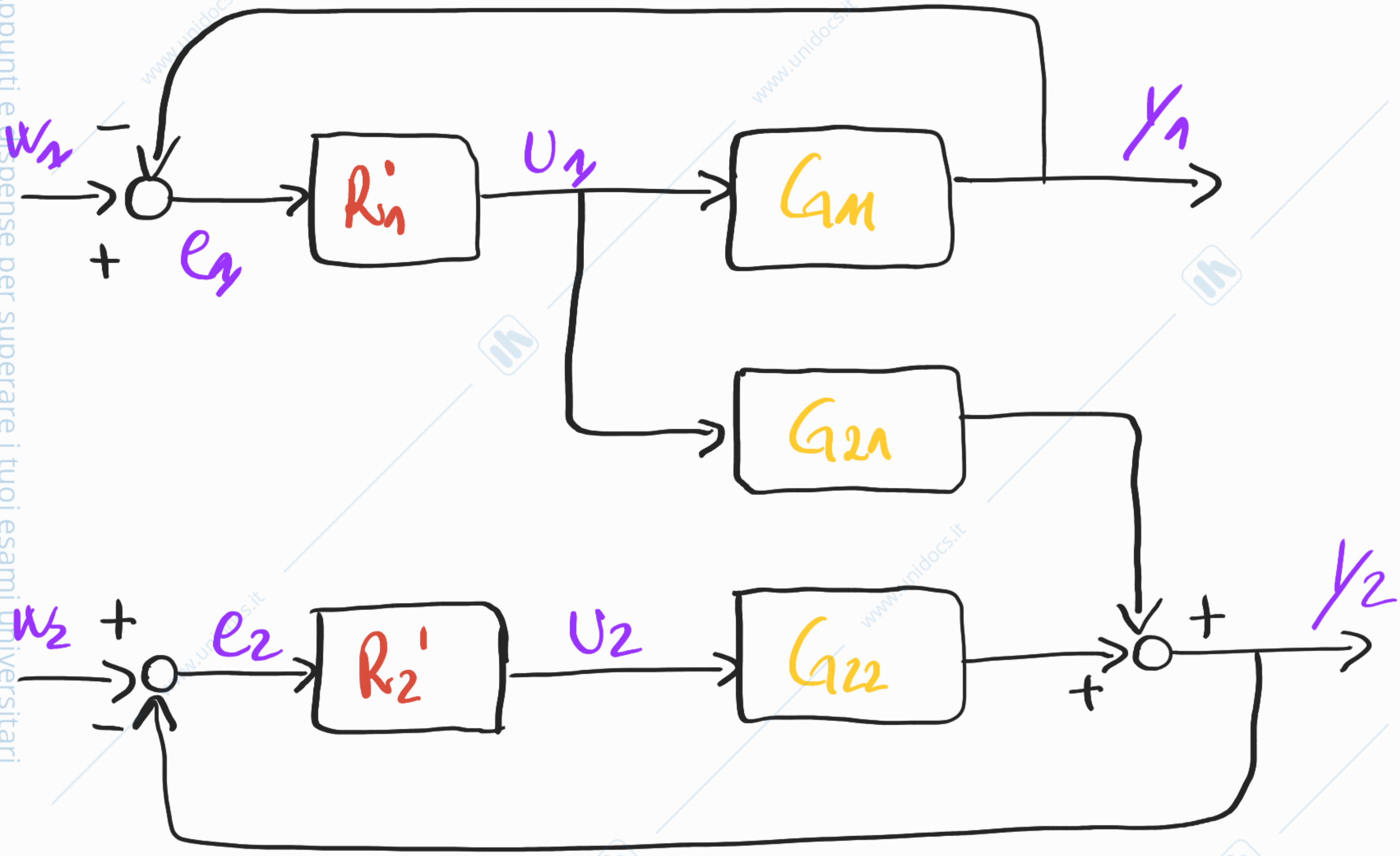
1° reg che chiude il 1° anello e 2° reg che chiude il 2° anello senza preoccuparmi dell'interazione ?

→ posso progettarli in maniera ⊥ o devo tener conto interazione

Disaccoppiamento :



1° regolatore su U_1 non presenta nessun problema → non è influenzato da U_2 ⇒ progetto 1° reg posso basarmi solo su G_{11} (⊥)

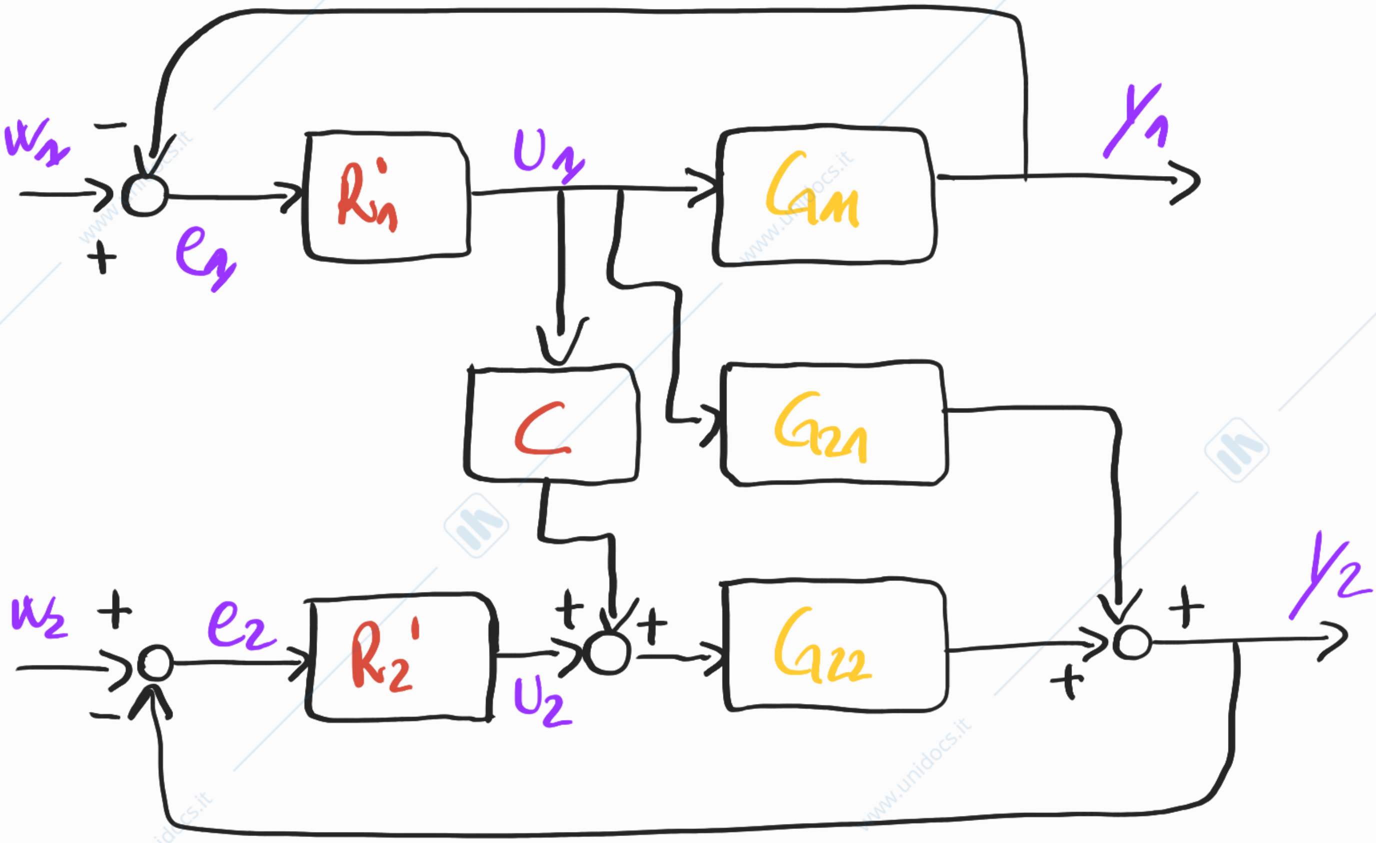


1. Progetto di $R_1'(s)$ su $G_{11}(s)$

Per prog di R_2 attenuare effetto di U_1 → agisce come un disturbo su y_2

(disturbo misurabile)

2. Progetto di $R_2'(s)$ su $G_{22}(s)$ + compensatore "in AA" del "disturbo" u_1



disaccoppiatore

$$C(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)}$$

schema di DISACCOPPIAM per sistemi triangolari

progetto ⊥ di 2 sistemi SISO compensando a posteriori l'effetto del 1° disturbo sul 2° sistema

Esempio:

$$G_{11}(s) = \frac{10(1+s)}{(1+10s)(1+2s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{4}{1+2s}$$

$$G_{22}(s) = \frac{1+5s}{(1+10s)(1+s)}$$

Specifiche:
(a) $e_\infty = 0$ con rif. a scalino
(b) $\omega_c \simeq 5$
(c) $\varphi_m \geq 60°$

Progetto:

1. $R_1'(s) = \dfrac{1+10s}{s} \Rightarrow$

$$L_1'(s) = R_1'(s)G_{11}(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+2s)}$$

$\omega_{c1} \simeq 5$

$\varphi_{m1} \simeq 84°$

2. $R_2'(s) = \frac{10(1+s)}{s} \Longrightarrow$

$$L_2'(s) = R_2'(s)G_{22}(s) = \frac{10(1+5s)}{s(1+10s)}$$

$\omega_{c2} \simeq 5$

$\varphi_{m2} \simeq 89°$

(2 prog $\perp$)

$\Longrightarrow$ Compensatore: proviamo quello IDEALE

$$C^{\circ}(s) = -\frac{G_{21}(s)}{G_{22}(s)} = -\frac{4(1+10s)(1+s)}{(1+2s)(1+5s)}$$

comp dinamico

$$\overline{C}(s) = -\frac{G_{21}(0)}{G_{22}(0)} = -4$$

comp statico

Simulazioni:

$w(t) = sca(t)$

$d_1(t) = sca(t-3)$

$w_2(t) = sca(t-5)$

① senza $C(s)$

② con $C(s)$ — $C^{\circ}(s)$ comp dinamico; $\bar{C}(s)$ comp statico

sist MIMO causale se sono causali tutte le FdT