Esercitazione sulla

Trasformata Zeta

- DEFINIZIONE DI TRASFORMATA ZETA

$f(k)$ FUNZIONE A T. DISCRETO

z VAR. COMPLESSA

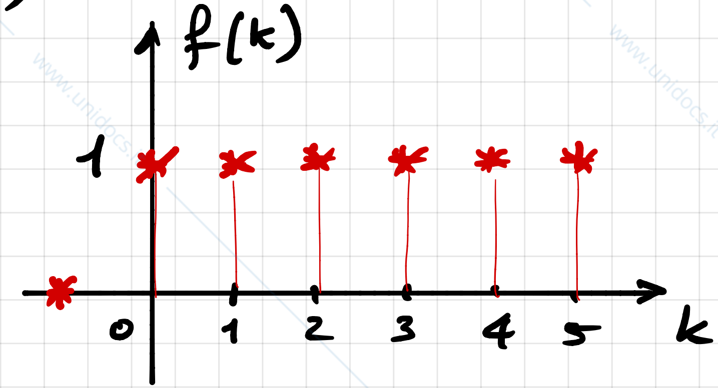
$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1) z^{-1} + \dots\dots$$

F. COMPLESSA DI VAR. COMPLESSA z

- OSSERVAZIONI

- ANALOGIA CON $\mathcal{L}$
- I VALORI $f(k)$, $k<0$ NON CONTANO
- A VOLTE OCCORRONO IPOTESI SU z PERCHÈ LA SERIE CONVERGA (POI SI POSSONO DIMENTICARE)

- Trasformata dello Scalino (discreto)



$$f(k) = sca^*(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

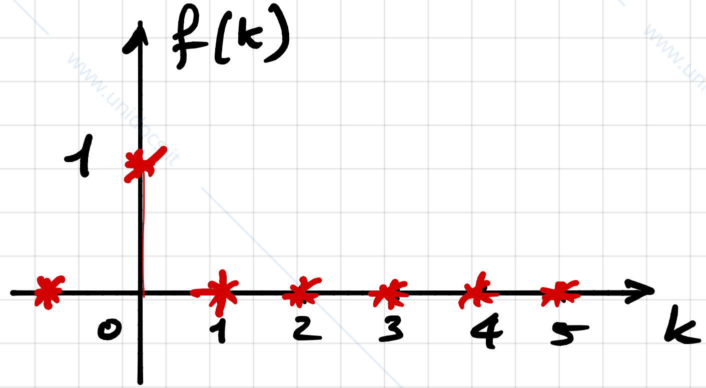
$$F(z) = Z\left[sca^*(k)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

IPOTESI

$|z| < 1$

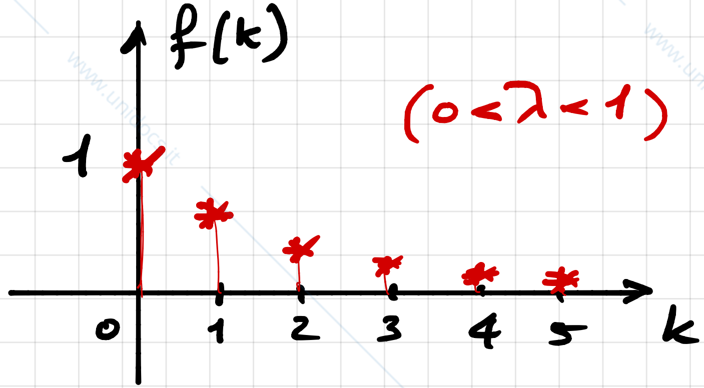
- Trasformata dell'impulso (discreto)

$$f(k) = imp^*(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



$$F(z) = \boxed{\mathcal{Z}\left[imp^*(k)\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k} = f(0) = \boxed{1}$$

- Trasformata di λ^k (esp. discreta)



$$f(k) = \lambda^k$$

IPOTESI

$|\lambda z^{-1}| < 1$

$$F(z) = \boxed{\mathcal{Z}[\lambda^k]} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^k =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda z^{-1}} = \boxed{\frac{z}{z-\lambda}}$$

- Proprietà della Trasformata Zeta

1 - Linearità

$$\mathcal{Z}[\alpha f(k)+\beta g(k)] = \alpha F(z)+\beta G(z)$$

2 - Anticipo unitario

$$g(k) = f(k+1) \Rightarrow G(z) = z\left(F(z)-f(0)\right)$$

3 - Ritardo unitario

$$\begin{aligned} g(k) &= f(k-1) \\ f(k) &= 0, \quad k<0 \end{aligned} \Rightarrow G(z) = z^{-1}F(z)$$

4 - Convoluzione

$$h(k) = f(k) * g(k) = \sum_{m=0}^{k} f(k-m)g(m) \Rightarrow H(z) = F(z)G(z)$$

5 - Derivata in z

$$-z\frac{dF(z)}{dz} = \mathcal{Z}[k f(k)]$$

6 – TEOREMA DEL VALORE INIZIALE

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

7 – TEOREMA DEL VALORE FINALE

– SE TUTTI I POLI DI $F(z)$ DIVERSI DA 1 HANNO MODULO < 1 ALLORA:

$$f(\infty) = \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$$

- ESERCIZIO 1 - TRASFORMATA DI $sen(\vartheta k)$ E $\cos(\vartheta k)$

(A) $$f(k) = sen(\vartheta k) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\vartheta k} - e^{-j\vartheta k}\right)$$

$$F(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\vartheta}} - \frac{z}{z-e^{-j\vartheta}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2j}\,\frac{z\left(e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}\right)}{z^2 - z\left(e^{j\vartheta}+e^{-j\vartheta}\right)+1} = \boxed{\frac{z\, sen\vartheta}{z^2 - 2z\cos\vartheta + 1}}$$

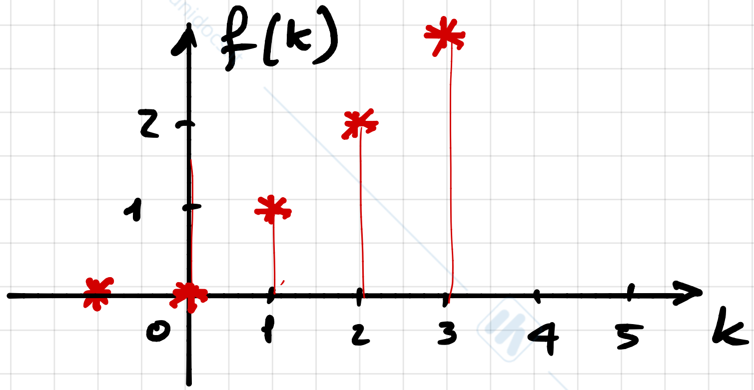
(B) $$f(k) = \cos(\vartheta k) = \frac{1}{2}\left(e^{j\vartheta k} + e^{-j\vartheta k}\right)$$

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\vartheta}} + \frac{z}{z-e^{-j\vartheta}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2z^2 + z\left(e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}\right)}{z^2 - z\left(e^{j\vartheta}+e^{-j\vartheta}\right)+1} = \boxed{\frac{z\left(z-\cos\vartheta\right)}{z^2 - 2z\cos\vartheta + 1}}$$

- Esercizio 2 - Trasformata della rampa (discreta)

$$f(k) = ram^*(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases}$$



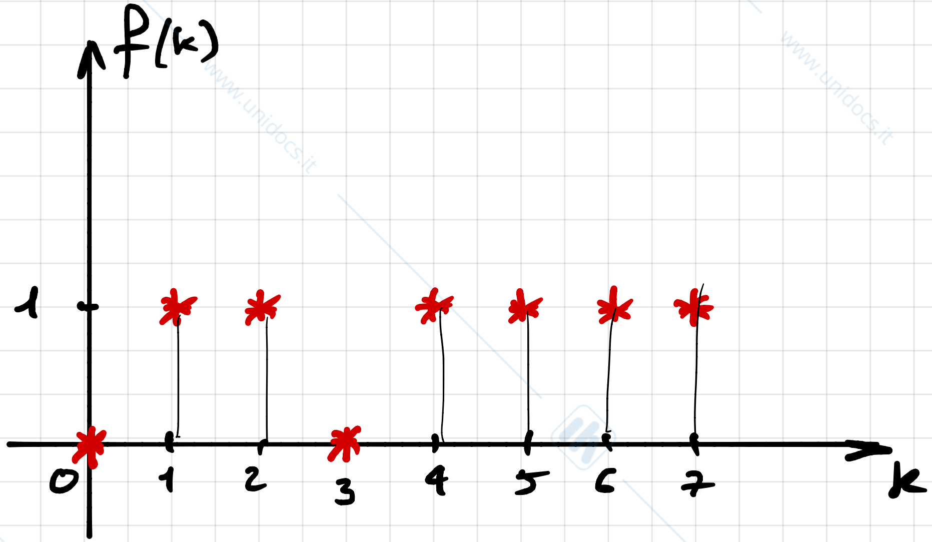
$$f(k) = ram^*(k) = k\, sca^*(k)$$

Proprietà 5 $\Longrightarrow$ $F(z) = \boxed{\mathcal{Z}\left[ram^*(k)\right]} = -z \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) =$

$$= -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \boxed{\frac{z}{(z-1)^2}}$$

- Esercizio 3

$$f(k) = sca^*(k-1) - imp^*(k-3)$$



Proprietà 3

$$F(z) = \frac{1}{z}\,\frac{z}{z-1} - \frac{1}{z^3}\cdot 1 = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^3} = \frac{z^3-z+1}{z^3(z-1)}$$

Poli in 0, 1

- Verifica T.V.I. / T.V.F.

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0 \quad ✓$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1} (z-1)F(z) = 1 \quad ✓$$

- ANTITRASFORMATA ZETA

$$f(k) \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} F(z)$$

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)\, z^{k-1}\, dz$$

LINEA CHIUSA CHE CIRCONDA TUTTI I POLI DI $F(z)$

- METODI

1. FORMULA ESPLICITA
2. HEAVISIDE "DISCRETO"
3. DIVISIONE POLINOMI

(2–3) SOLO SE $F(z)$ È RAZIONALE

- METODO DI HEAVISIDE DISCRETO (ESPRESSIONE ANALITICA DELL'ANTITRASFORMATA)

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \underbrace{F_1(z) + F_2(z) + \cdots}_{\text{TRASFORMATE ELEMENTARI}}$$

$$f(k) = Z^{-1}[F(z)] = f_1(k) + f_2(k) + \cdots$$

- SUGGERIMENTO

- CONVIENE ANTITRASFORMARE $\frac{F(z)}{z}$ CON LE REGOLE DI HEAVISIDE "CONTINUO".

- MOLTIPLICANDO POI PER z SI TROVANO TRASFORMATE ELEMENTARI NOTEVOLI.

- METODO DI DIVISIONE POLINOMI (ESPRESSIONE NUMERICA DELL'ANTITRASFORMATA)

$$F(z) = \frac{\overbrace{N(z)}^{\text{grado } n}}{\underbrace{D(z)}_{\text{grado } n}} = c_0 + \frac{\overbrace{N_1(z)}^{\text{grado } n-1}}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \frac{\overbrace{N_2(z)}^{\text{grado } n-2}}{D(z)} = \dots\dots =$$

$$= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_k z^{-k} + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$$

$\Longrightarrow \quad c_k = f(k) \,,\ \forall k$ VALORI NUMERICI DELL'ANTITRASFORMATA

- NOTA: SE $N(z)$ HA GRADO $m<n$, I PRIMI $\nu = n-m$ VALORI SONO NULLI

- ESERCIZIO 4

$$F(z) = \frac{5(z-1)}{z^2 - 1.2z + 0.32} = \frac{5(z-1)}{(z-0.8)(z-0.4)} \qquad f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = ?$$

- HEAVISIDE "DISCRETO"

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{5(z-1)}{z(z-0.8)(z-0.4)} = \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-0.8} + \frac{\gamma}{z-0.4}$$

$$\alpha(z-0.8)(z-0.4) + \beta z(z-0.4) + \gamma z(z-0.8) = 5z - 5$$

$z=0 \qquad 0.32\alpha = -5$

$z=0.8 \qquad 0.32\beta = -1$

$z=0.4 \qquad -0.16\gamma = -3$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = -\dfrac{125}{8} \\ \beta = -\dfrac{25}{8} \\ \gamma = \dfrac{75}{4} \end{cases}}$$

$$F(z) = \alpha + \beta \frac{z}{z-0.8} + \gamma \frac{z}{z-0.4}$$

$$\hookrightarrow \boxed{f(k) = \alpha\, imp^*(k) + \beta(0.8)^k + \gamma(0.4)^k}$$

- Esercizio 4 (segue)

$$F(z) = \frac{5(z-1)}{z^2 - 1.2z + 0.32}$$

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = ?$$

- Divisione polinomi

$$\begin{array}{l|l}
5z - 5 & z^2 - 1.2z + 0.32 \\
\hline
5z - 6 + 1.6z^{-1} & 5z^{-1} + z^{-2} - 0.4z^{-3} + \dots \\
\hline
1 - 1.6z^{-1} & \\
1 - 1.2z^{-1} + 0.32z^{-2} & \\
\hline
-0.4z^{-1} - 0.32z^{-2} & \\
\dots\dots &
\end{array}$$

$f(0) = 0$

$f(1) = 5$

$f(2) = 1$

$f(3) = -0.4$

$\dots\dots$

- Trasformata di Fourier a T. continuo

- Definizione

$f(t)$ funzione a T. continuo

$$\Phi(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

F. complessa di var. reale ω

- Proprietà

1. Linearità

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{F}[f(t)] + \beta \mathcal{F}[g(t)]$$

2. Simmetria

$$\Phi(-\omega) = \overline{\Phi(\omega)}$$

compl. coniugato

$\Rightarrow$ nota $\Phi(\omega)$ in $[0, \infty)$ è nota ovunque

- Antitrasformata

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

spettro del segnale

$|\Phi(\omega)|$ spettro di ampiezza

$\measuredangle \Phi(\omega)$ spettro di fase

- LEGAMI CON TRASFORMATA DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$ LAPLACE

$$\Phi(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$ FOURIER

- SE $f(t) = 0,\ t < 0$ ED ENTRAMBE LE TRASF. ESISTONO

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi(\omega) = F(j\omega)}$$

- TRASFORMATA DI FOURIER A T. DISCRETO

- DEFINIZIONE

$f(k)$ FUNZIONE A T. DISCRETO

$$\Phi(\vartheta) = \mathcal{F}^*[f(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-j\vartheta k}$$

F. COMPLESSA DI VAR. REALE ϑ

- PROPRIETÀ

1. LINEARITÀ $\quad \mathcal{F}^*[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha \mathcal{F}^*[f(k)] + \beta \mathcal{F}^*[g(k)]$
2. SIMMETRIA $\quad \Phi(-\vartheta) = \overline{\Phi(\vartheta)}$ COMPL. CONIUGATO
3. PERIODICITÀ (PERIODO 2π) $\quad \Phi(\vartheta + 2m\pi) = \Phi(\vartheta)$, m INTERO

$\Rightarrow$ NOTA $\Phi(\vartheta)$ IN $[0, \pi]$ È NOTA OVUNQUE

- ANTITRASFORMATA

$$f(k) = \mathcal{F}^{*-1}[\Phi(\vartheta)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\vartheta) e^{j\vartheta k} d\vartheta$$

$\Phi(\vartheta)$ SPETTRO DEL SEGNALE

$|\Phi(\vartheta)|$ SPETTRO DI AMPIEZZA

$\measuredangle \Phi(\vartheta)$ SPETTRO DI FASE

- LEGAMI CON TRASFORMATA ZETA

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$ ZETA

$$\Phi(\vartheta) = \mathcal{F}^*[f(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-j\vartheta k}$$ FOURIER

- SE $f(k)=0,\ k<0$ ED ENTRAMBE LE TRASF. ESISTONO

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi(\vartheta) = F(e^{j\vartheta})}$$

- Esercizio 5 (da svolgere a casa)

$$f(k) = \lambda^k \,, \quad k \geq 0 \qquad |\lambda| < 1$$

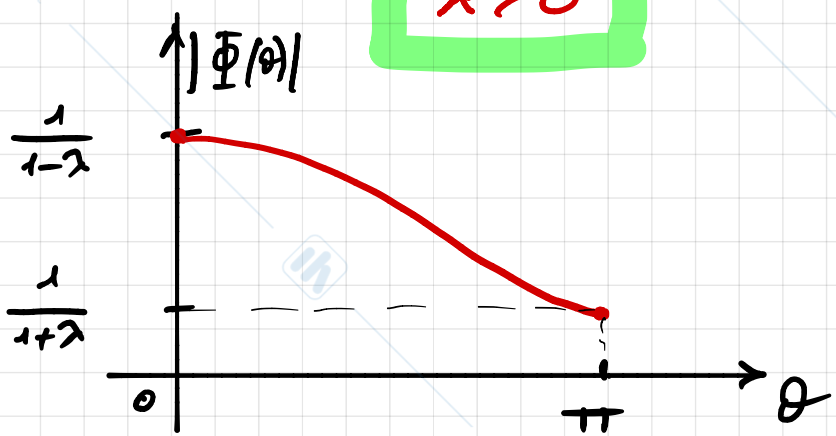
- Calcolare lo spettro di ampiezza

$$F(z) = \frac{z}{z-\lambda}$$

$$\Phi(\theta) = \frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - \lambda}$$

$$\boxed{|\Phi(\theta)| = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta}}}$$

$\boxed{\lambda > 0}$



$\boxed{\lambda < 0}$