ANALISI IN FREQUENZA DEL CAMPIONATORE

– TRASFORMATE DI FOURIER – NOTAZIONE

– TEMPO CONTINUO

$F(s)$ TRASF. DI LAPLACE

$$\Phi(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = F(j\omega)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

– TEMPO DISCRETO

$F^*(z)$ TRASF. ZETA

$$\Phi(\theta) = \mathcal{F}^*[f(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\, e^{-j\theta k} = F^*(e^{j\theta})$$

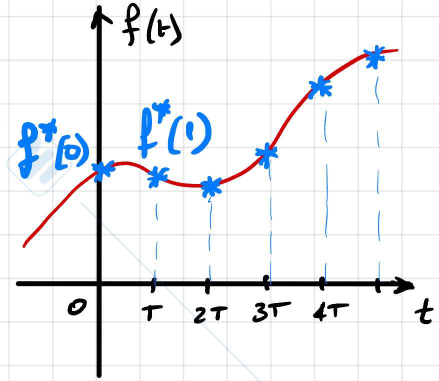
$$f(k) = \mathcal{F}^{*-1}[\Phi(\theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\theta)\, e^{j\theta k}\, d\theta$$

- ANALISI IN FREQUENZA DEL CAMPIONATORE

$$f(t) \longrightarrow \boxed{A/D} \longrightarrow f^*(k)$$

$$f^*(k) = f(kT)$$

T PERIODO DI CAMPIONAMENTO



- RICOSTRUZIONE UNIVOCA DI $f(t)$ DAI CAMPIONI $f^*(k)$

$f^*(k)$ $\xrightarrow{?}$ $f(t)$ NO!

$f^*(k)$ + INFO A PRIORI + SCELTA DI T $\xrightarrow{?}$ $f(t)$ SÌ! (SHANNON)

- EQUIVALENTEMENTE:

$F^*(e^{j\theta})$ + INFO A PRIORI + SCELTA DI T $\xrightarrow{?}$ $F(j\omega)$ SÌ!

- TRASFORMATA DI FOURIER DI SEGNALI CAMPIONATI

$$f^*(k) = f(kT)$$

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$ SPETTRO DI $f(t)$

$$F^*(e^{j\theta}) = \mathcal{F}^*[f^*(k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^*(k)\, e^{-j\theta k}$$ SPETTRO DI $f^*(k)$

- PROPRIETÀ

$\forall \omega$ RISULTA:

$$\boxed{\begin{aligned} F^*(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{T} F_s(j\omega) \\ F_s(j\omega) &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_s)), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}}$$

- **DIMOSTRAZIONE**

$$F^*(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\, e^{-jk\omega T}$$

- SI RICORDI CHE, $\forall g(t)$, RISULTA $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, imp(t-\tau)\, dt = g(\tau)$

- ALLORA: $f(kT)\, e^{-jk\omega T} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, imp(t-kT)\, dt$

- QUINDI: $F^*(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, imp(t-kT)\, dt =$ SCAMBIO OPERATORI Σ E $\int$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} imp(t-kT)}_{c(t)}\, dt$$

- SI OSSERVI CHE $c(t)$ È UN "TRENO DI IMPULSI" PERIODICO (DI PERIODO T) ESPRIMIBILE COME SERIE DI FOURIER:

$$c(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

- SOSTITUENDO SI OTTIENE:

$$F^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_s t}\, dt =$$

SCAMBIO OPERATORI $\int$ E Σ

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j(\omega - k\omega_s)t}\, dt =$$

DEF. $\mathcal{F}$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega - k\omega_s)) =$$

$h=-k$

$$= \frac{1}{T}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_s)) = \frac{1}{T} F_s(j\omega)$$

c.v.d.

- PROPRIETÀ DI $F_s(j\omega)$

$$F_s(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_s))$$

$$F_s(-j\omega) = \overline{F_s(j\omega)}$$ COMPL. CONIUGATO — SIMMETRIA

$$F_s(j(\omega + m\omega_s)) = F_s(j\omega) \,, \forall \omega$$ PERIODICITÀ (PERIODO ω_s)

m INTERO

$\Longrightarrow$ SE $F_s(j\omega)$ È NOTA PER $\omega \in \left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$ ALLORA È NOTA OVUNQUE

- INTERPRETAZIONE

$$F_s(j\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} F(j(\omega + h\omega_s)) =$$

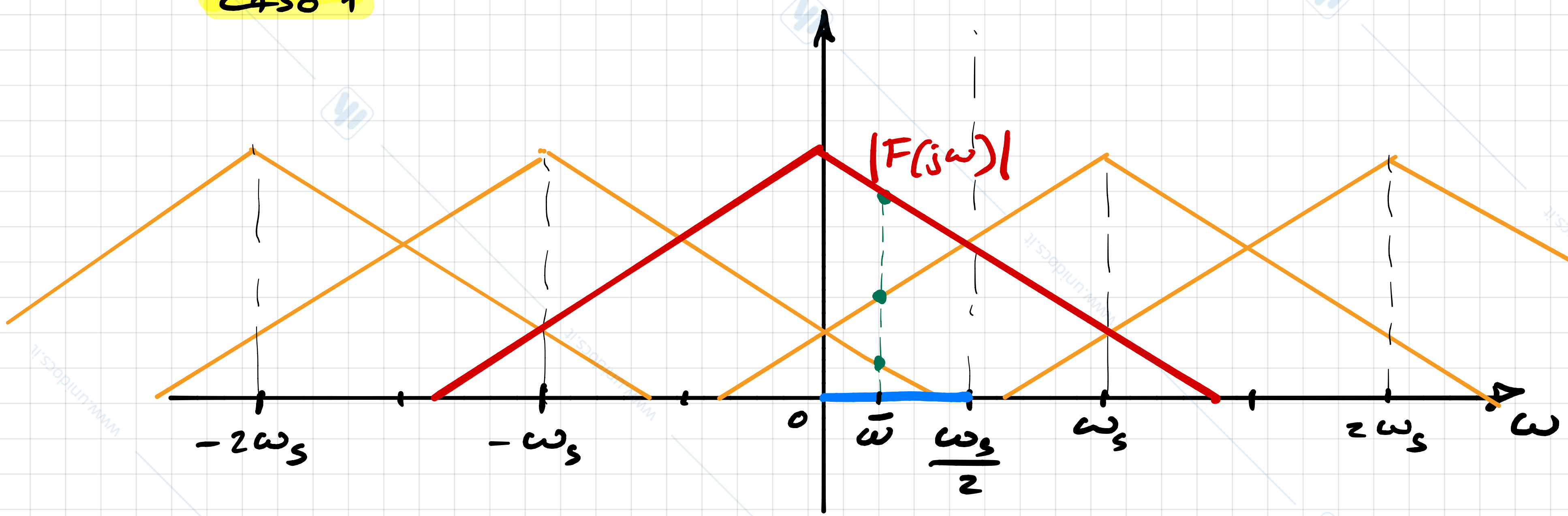
$$= F(j\omega) + F(j(\omega-\omega_s)) + F(j(\omega-2\omega_s)) + \dots + F(j(\omega+\omega_s)) + F(j(\omega+2\omega_s)) + \dots$$

SPETTRO ORIGINALE

REPLICHE TRASLATE DELLO SPETTRO ORIGINALE

– ESEMPIO

CASO 1



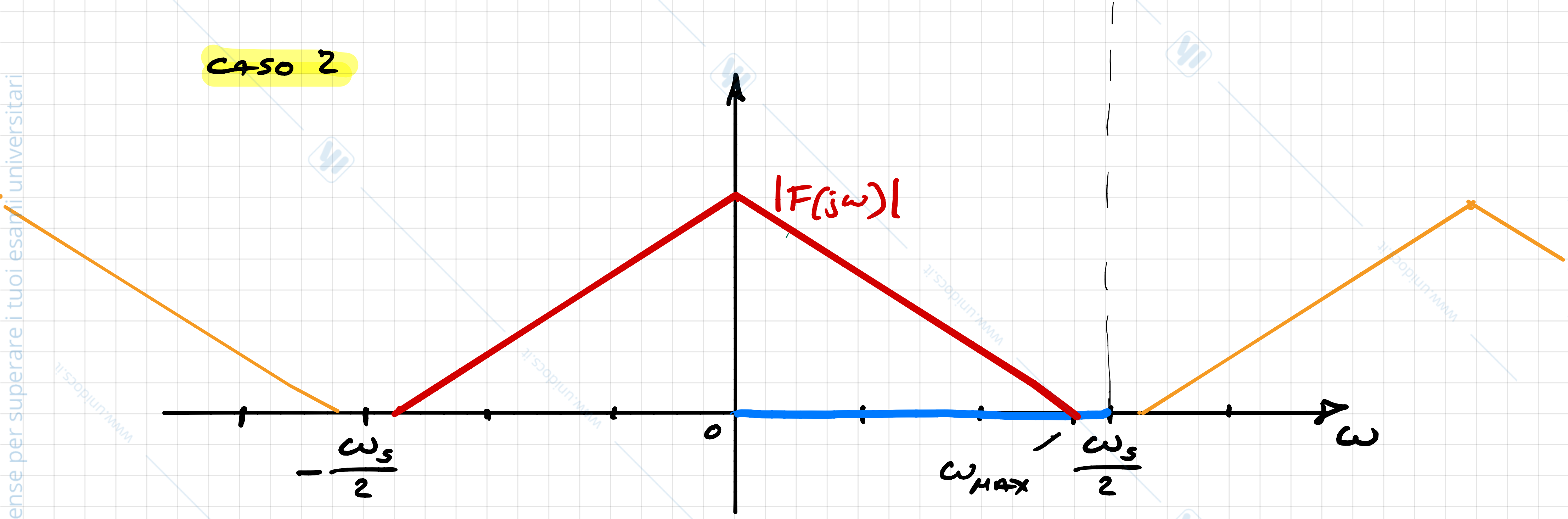
- IN $\left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$ SI SOMMANO ALLO SPETTRO ORIGINALE VARIE COMPONENTI DELLE "REPLICHE"

$\Longrightarrow$ $F_s(j\omega)$, $\omega \in \left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$ RISENTE ANCHE DI COMPONENTI IN ALTA FREQUENZA DI $F(j\omega)$

FENOMENO DI ALIASING

- ESEMPIO

CASO 2



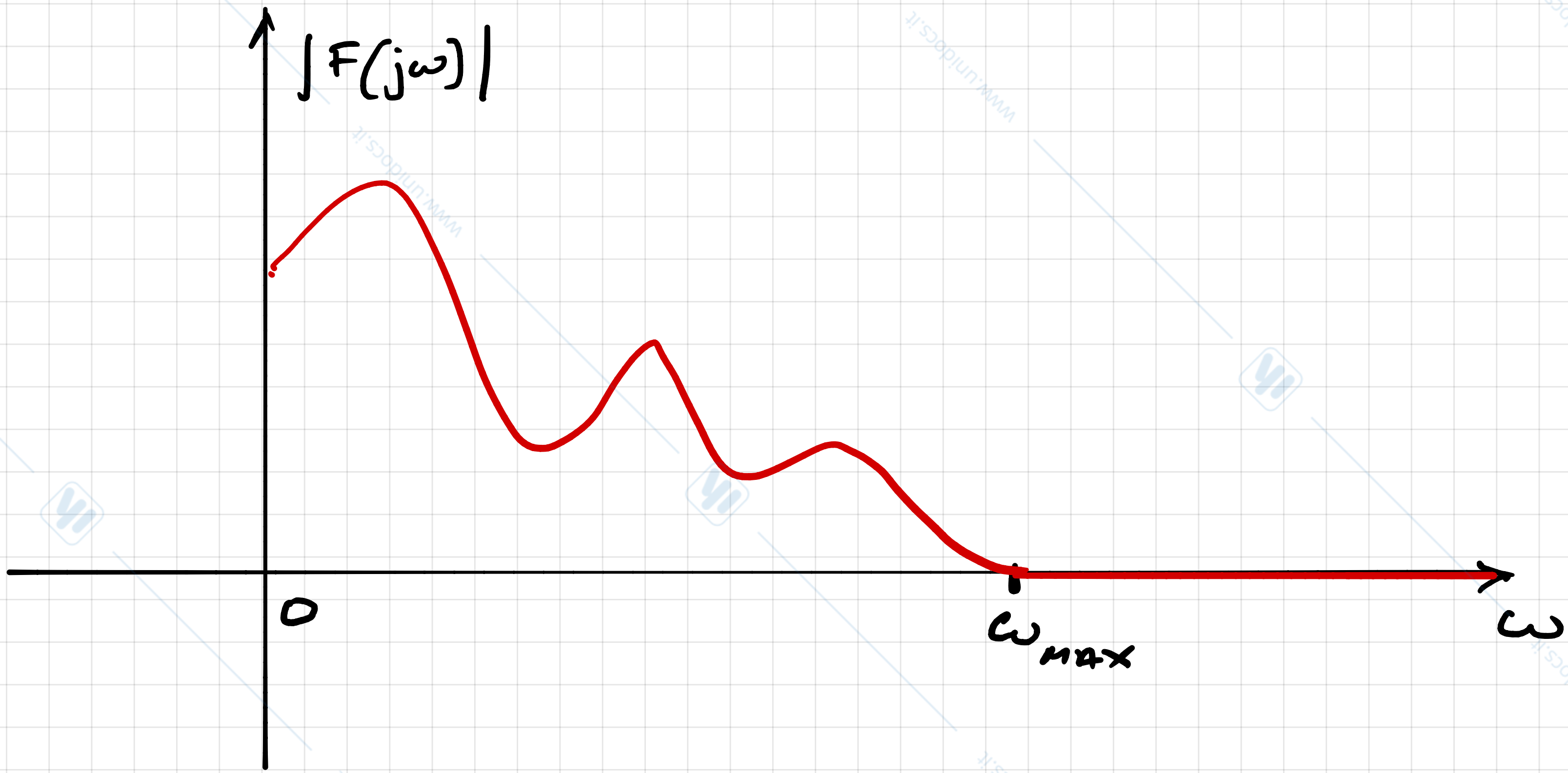
- IN $\left[0, \frac{\omega_s}{2}\right]$ NON CI SONO INTERFERENZE TRA LE "REPLICHE"

$\Longrightarrow$ NO ALIASING!

- SEGNALI A BANDA LIMITATA

$f(t)$ È A BANDA LIMITATA $[0, \omega_{MAX}]$ SE $F(j\omega) = 0$, $\forall \omega > \omega_{MAX}$

ω_{MAX} È LA MASSIMA PULSAZIONE DEL SEGNALE



- TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO (SHANNON)

- SE $f(t)$ È A BANDA LIMITATA $[0, \omega_{MAX}]$ E

$$\boxed{\omega_{MAX} < \frac{\omega_s}{2}} \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

ALLORA $f(t)$ PUÒ ESSERE RICOSTRUITO UNIVOCAMENTE DAI CAMPIONI $f^*(k) = f(kT)$

- DIMOSTRAZIONE

- NELLE IPOTESI FATTE, IN $[0, \frac{\omega_s}{2}]$ RISULTA

$$F^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} F_s(j\omega) = \frac{1}{T} F(j\omega)$$

$\Longrightarrow$ $F(j\omega)$ PUÒ ESSERE RICAVATO DA $F^*(e^{j\theta})$

$f(t)$ PUÒ ESSERE RICOSTRUITO DA $f^*(k)$

- DECAMPIONATORE DI SHANNON

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^*(k) \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}t - k\pi\right)}_{w(k,t)}$$

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- ATTENZIONE! NON È UN LEGAME CAUSALE

$\Longrightarrow$ NON UTILIZZABILE COME CONVERTITORE D/A "IN TEMPO REALE"

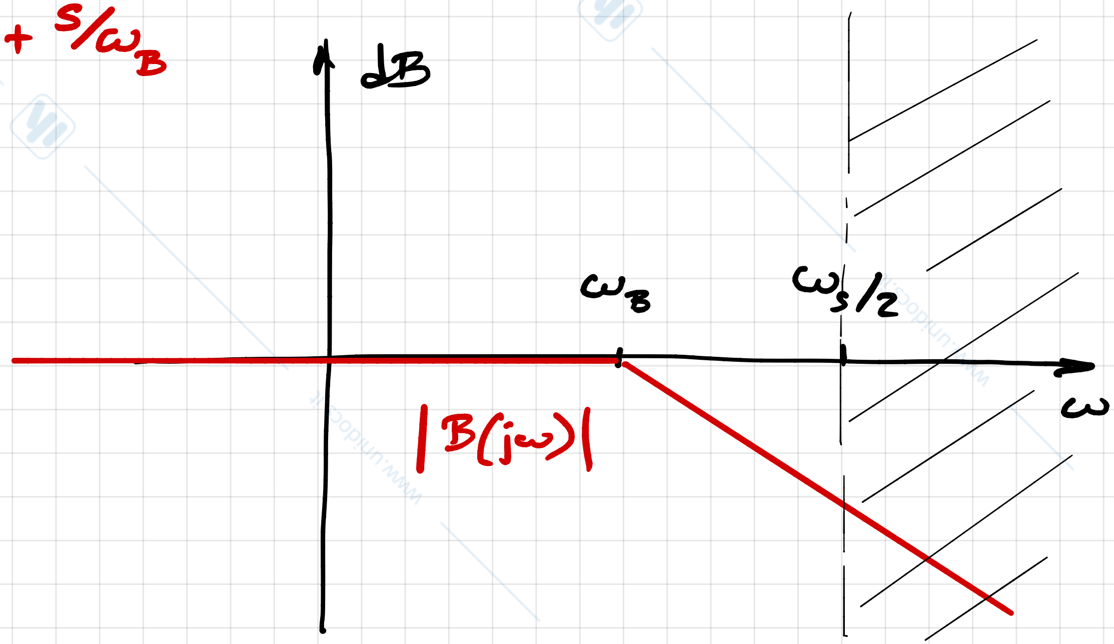
- Filtri Anti-Aliasing

$$f(t) \longrightarrow \boxed{B(s)} \xrightarrow{\tilde{f}(t)} \boxed{A/D} \longrightarrow f^*(k)$$

$B(s)$ filtro Passa-Basso con banda passante $[0, \omega_B]$

$$\boxed{\omega_B < \frac{\omega_s}{2}}$$

- Per esempio: $B(s) = \dfrac{1}{1 + s/\omega_B}$



- ESEMPIO

$f(t) = \text{sen}(0.6\pi t)$ PERIODO $P = \frac{2\pi}{0.6\pi} = \frac{10}{3}$

BANDA LIMITATA $\omega_{MAX} = 0.6\pi$

. CASO 1 $T = 1 \Longrightarrow \omega_s = 2\pi > 2\omega_{MAX}$ OK

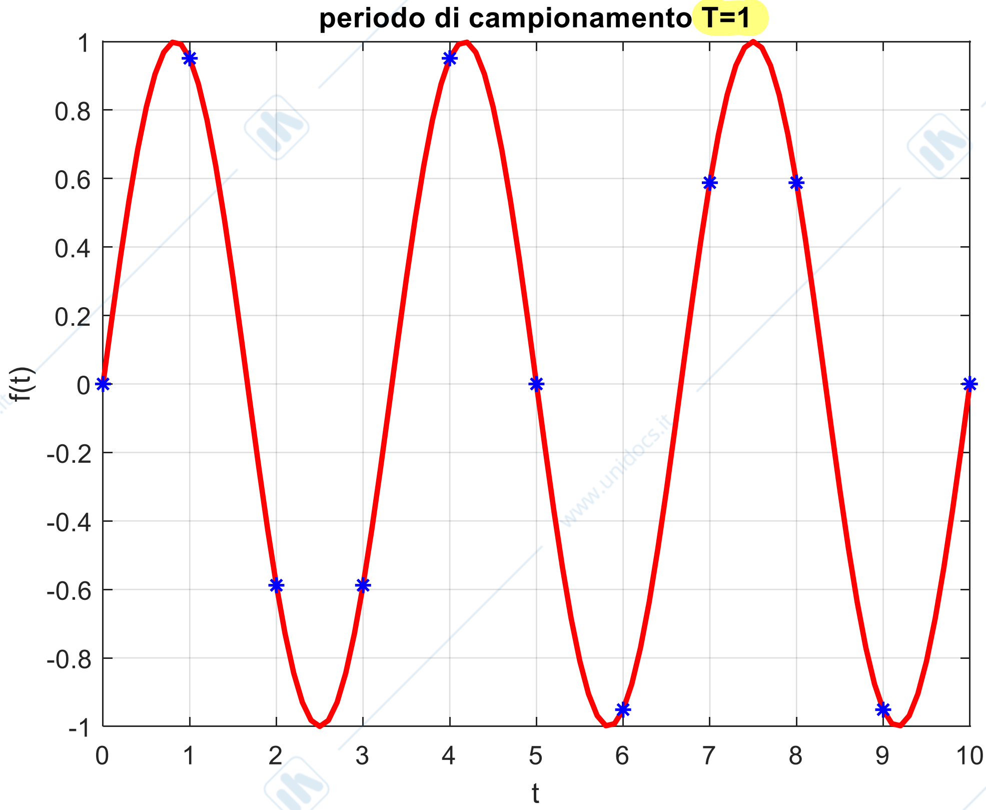
. CASO 2 $T = 2 \Longrightarrow \omega_s = \pi < 2\omega_{MAX}$ ALIASING

- IN EFFETTI: $\tilde{f}(t) = -\text{sen}(0.4\pi t)$ GENERA GLI STESSI CAMPIONI

$\tilde{f}^*(k) = f^*(k)$

CAMPIONAMENTO E ALIASING

$f(t) = \text{sen}(0.6\pi t)$



$f(t) = \text{sen}(0.6\pi t)$, $\tilde{f}(t) = -\text{sen}(0.4\pi t)$