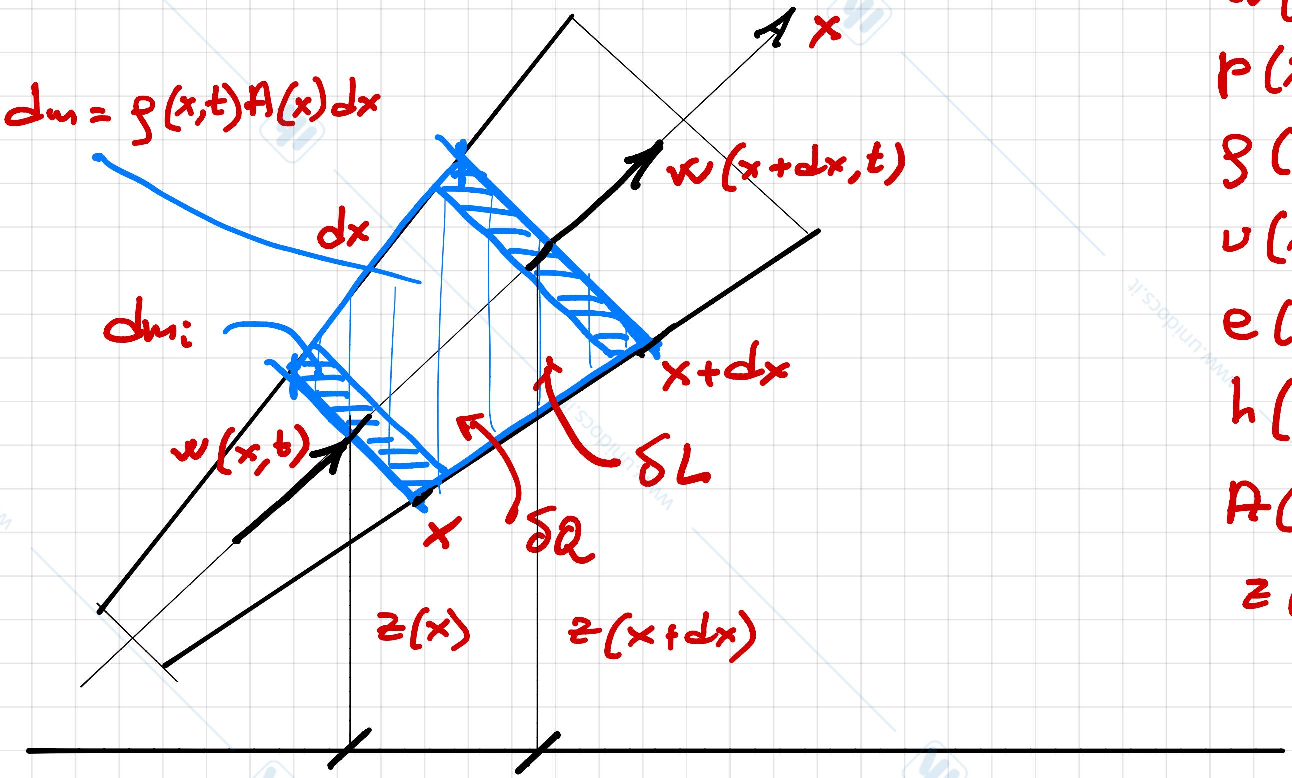
PRINCIPI DI CONSERVAZIONE DELLA FLUIDODINAMICA

(II PARTE)

- Conservazione dell'Energia (1-DIM)



$w(x,t)$	PORTATA
$p(x,t)$	PRESSIONE
$\rho(x,t)$	DENSITÀ
$v(x,t)$	VELOCITÀ
$e(x,t)$	EN. INTERNA
$h(x,t)$	ENTALPIA
$A(x)$	AREA SEZIONE
$z(x)$	QUOTA

- Bilancio nell'intervallo dt

$$\underbrace{dE_t}_{\text{EN. TOTALE}} = \underbrace{\delta Q}_{\text{CALORE}} + \underbrace{\delta L}_{\text{LAVORO}} + \underbrace{dE_{t_i} - dE_{t_o}}_{\text{EN. TOTALE IN/OUT}} + \underbrace{\delta L_i - \delta L_o}_{\text{LAVORO IN/OUT}}$$

- CALCOLO DEI VARI TERMINI AL II MEMBRO

$$\delta Q = \varphi \, dx \, dt$$

φ POTENZA TERMICA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA $\left[\frac{W}{m}\right]$

$$\delta L = \psi \, dx \, dt$$

ψ POTENZA MECCANICA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA $\left[\frac{W}{m}\right]$

$$dE_{t_i} = dE_t(x,t) = \overbrace{w(x,t)\,dt}^{dm_i}\left(e(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x,t) + gz(x)\right)$$

$$dE_{t_o} = dE_t(x+dx,t) = dE_t(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(dE_t(x,t)\right)dx$$

$$\Longrightarrow \quad dE_{t_i} - dE_{t_o} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(w(x,t)\left(e(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x,t) + gz(x)\right)\right)dx\,dt$$

$$\delta L_i = \frac{p(x,t)}{\rho(x,t)}\,w(x,t)\,dt$$

$$\delta L_o = \delta L_i + \frac{\partial}{\partial x}(\delta L_i)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \delta L_i - \delta L_o = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p(x,t)}{\rho(x,t)}\,w(x,t)\right)dx\,dt$$

- TERMINE AL PRIMO MEMBRO

$$dE_t = \underbrace{\rho(x,t)\,A(x)\,dx}_{dm(x,t)}\left(e(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x) + gz(x)\right)$$

- BILANCIO NELL'INTERVALLO dt

$$dE_t = \varphi\, dx\, dt + \psi\, dx\, dt - \frac{\partial}{\partial x}\left(w(x,t) \left(\underbrace{e(x,t) + \frac{p(x,t)}{\rho(x,t)}}_{h(x,t)} + \frac{1}{2}v^2(x,t) + g z(x) \right)\right) dx\, dt$$

- DIVIDENDO PER $dx\,dt$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x,t) A(x) \left(e(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x,t) + g z(x) \right)\right) = \\ &= \varphi + \psi - \frac{\partial}{\partial x}\left(w(x,t) \left(h(x,t) + \frac{1}{2}v^2(x,t) + g z(x) \right)\right) \end{aligned}}$$

- CASI PARTICOLARI

① - IN CONDIZIONI STAZIONARIE

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(w(x)\left(h(x)+\frac{1}{2}v^2(x)+gz(x)\right)\right)=\varphi+\psi$$

② - NEL CASO DI LIQUIDI $\rho(x,t)=\rho$, $e(x,t)\simeq h(x,t)\simeq cT(x,t)$

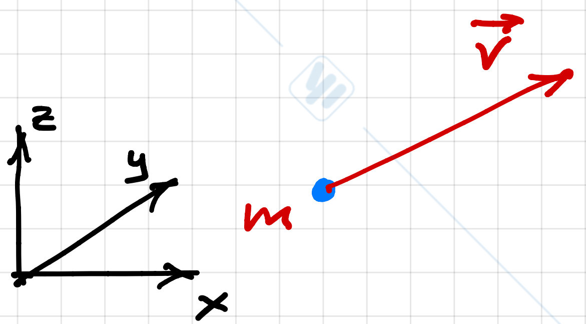
+ ENERGIA CINETICA E POTENZIALE TRASCURABILI

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho A(x)e(x,t)\right)=\varphi+\psi-\frac{\partial}{\partial x}\left(w(x,t)h(x,t)\right)$$

$$c\rho A(x)\frac{\partial}{\partial t}T(x,t)=\varphi+\psi-c\frac{\partial}{\partial x}\left(\underbrace{w(x,t)}_{w(t)\ \text{PER CONS. MASSA}}T(x,t)\right)$$

- RICHIAMI SULLA QUANTITÀ DI MOTO (MOMENTUM)

  - PER UNA MASSA PUNTIFORME



Q. DI MOTO $\vec{M} = m\vec{v}$ (VETTORE)

- SENZA FORZE APPLICATE: $\frac{d}{dt}\vec{M} = 0$

- CON FORZE APPLICATE: $\frac{d}{dt}\vec{M} = \sum_i \vec{F}_i$

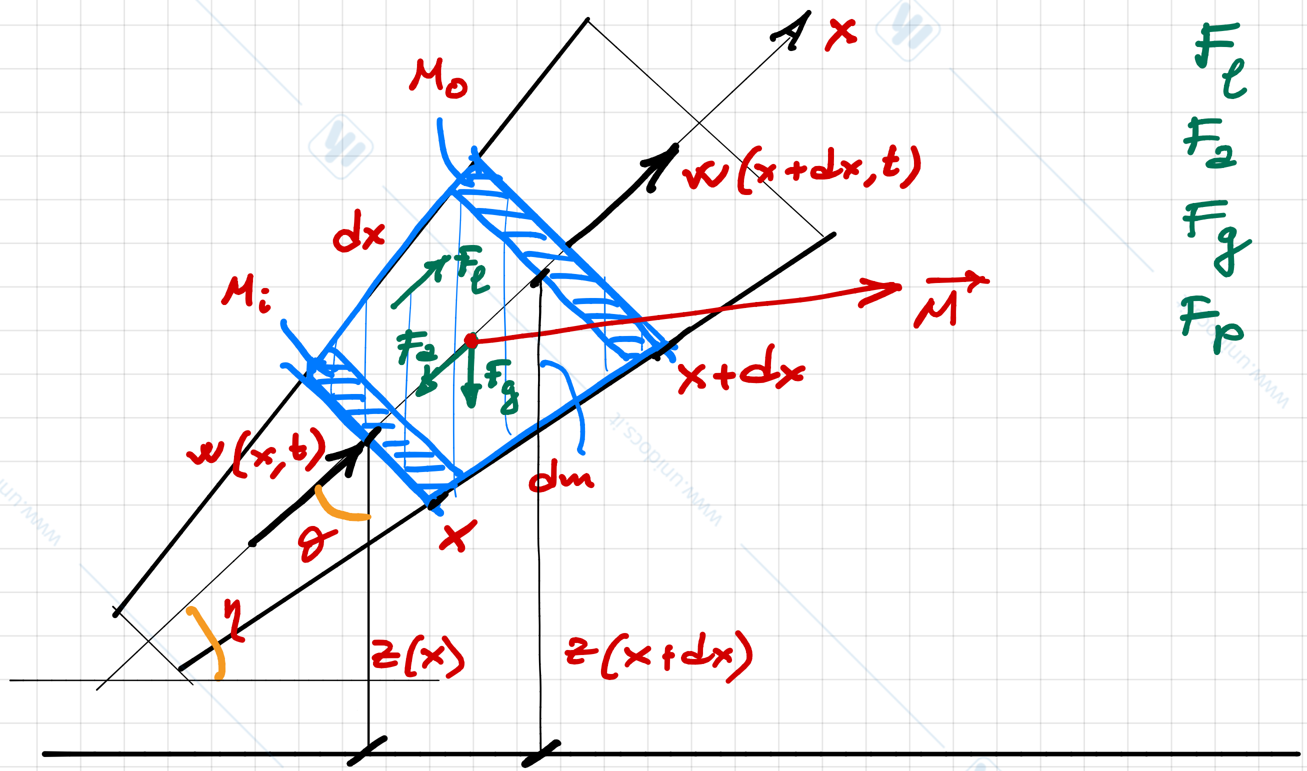
  - LUNGO LA DIREZIONE x: $\frac{d}{dt}\underbrace{M_x}_{mv_x} = \sum_i F_{ix} = \overline{F}_x$, $\underbrace{dM_x}_{\text{VARIAZIONE Q.D.M. } [kg\,m/s]} = \underbrace{\overline{F}_x dt}_{\overline{P}_x}$

IMPULSO DI FORZA $[Ns]$

- SE m È COSTANTE $\Rightarrow$ $m\dot{v}_x = \overline{F}_x$

LEGGE DI NEWTON

– CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (1-DIM)



F_ℓ FORZA LATERALE (DRAG)

F_a FORZA DI ATTRITO

F_g FORZA DI GRAVITÀ

F_p FORZA DI PRESSIONE

– BILANCIO NELL'INTERVALLO dt LUNGO LA DIREZIONE x

$$dM = \underbrace{M_i - M_o}_{\text{MOMENTI IN/OUT}} + \underbrace{P_i - P_o}_{\text{IMPULSI DI PRESSIONE IN/OUT}} + \underbrace{P_\ell}_{\text{IMPULSO DI DRAG}} + \underbrace{P_a}_{\text{IMPULSO DI ATTRITO}} + \underbrace{P_g}_{\text{IMPULSO DI GRAVITÀ}}$$

- CALCOLO DEI VARI TERMINI AL II MEMBRO

$$u(x,t) = \frac{w(x,t)}{\rho(x,t)A(x)}$$

$$M_i(x,t) = \underbrace{w(x,t)\,dt}_{\text{MASSA IN}}\,u(x,t) = \rho(x,t)A(x)u^2(x,t)\,dt$$

$$M_i(x,t) - M_o(x+dx,t) = -\frac{\partial}{\partial x}M_i(x,t)\,dx$$

$$P_i(x,t) = \underbrace{p(x,t)A(x)\,dt}_{\text{FORZA IN}}$$

$$P_i(x,t) - P_o(x+dx,t) = -\frac{\partial}{\partial x}P_i(x,t)\,dx$$

$$P_\ell(x,t) = \underbrace{p(x,t)\big(A(x+dx)-A(x)\big)}_{\text{FORZA REAZIONE PARETI}}dt = p(x,t)\frac{d}{dx}A(x)\,dx\,dt$$

$$P_a(x,t) = -\underbrace{\tau(x,t)}_{\substack{\text{SFORZO DI TAGLIO}\\ [N/m^2]}}\underbrace{\pi\overbrace{D(x)}^{\text{DIAMETRO}}dx}_{\text{SUP. LATERALE}}\,dt \qquad \tau(x,t) = \frac{1}{2}\underbrace{c_f}_{\substack{\text{FANNING FRICTION}\\ \text{(ADIMENSIONALE)}}}\rho(x,t)u^2(x,t)\,\mathrm{sgn}(u(x,t))$$

$$P_g(x,t) = -\underbrace{\rho(x,t)A(x)g\,dz}_{\text{FORZA GRAVITÀ LUNGO } x}dt \qquad dz = dx\cos\theta = dx\,\mathrm{sen}\,\eta$$

- TERMINE AL I MEMBRO

$$M(x,t) = dm\,u(x,t) = \underbrace{\rho(x,t)A(x)\,dx}_{dm}\,u(x,t)$$

- BILANCIO NELL'INTERVALLO dt LUNGO LA DIREZIONE x

$$d\left(\rho(x,t)A(x)dx\,u(x,t)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,t)A(x)u^2(x,t)dt\right)dx - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)A(x)dt\right)dx +$$

$$+\,p(x,t)\frac{dA(x)}{dx}dx\,dt - \frac{1}{2}c_f\,\rho(x,t)u^2(x,t)\,\mathrm{sgn}(u(x,t))\,\pi D(x)\,dx\,dt -$$

$$-\,\rho(x,t)A(x)g\,dz\,dt$$

- DIVIDENDO PER $dx\,dt$ E SUPPONENDO $\mathrm{sgn}(u(x,t))=1$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\Big(\overbrace{\rho(x,t)A(x)u(x,t)}^{w(x,t)}\Big) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,t)A(x)u^2(x,t)\right) - A(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2}c_f\,\rho(x,t)u^2(x,t)\pi D(x) - \rho(x,t)A(x)g\underbrace{\frac{dz(x)}{dx}}_{\operatorname{sen}\eta}}$$

- CASI PARTICOLARI

1. - IN CONDIZIONI STAZIONARIE

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\rho(x)A(x)u^2(x)\right) + A(x)\frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{2}c_f\,\rho(x)u^2(x)\pi D(x) + \rho(x)A(x)g\frac{dz(x)}{dx} = 0$$

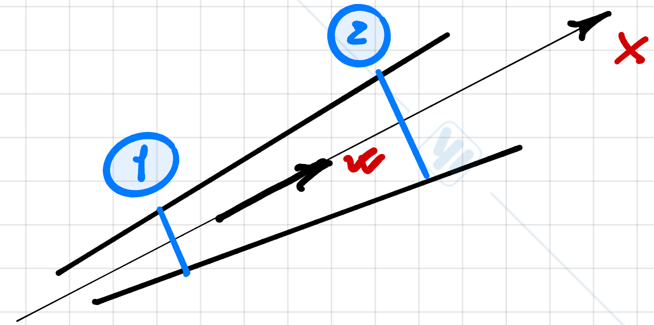
2. - NEL CASO DI LIQUIDI E SEZIONE COSTANTE

$\rho(x,t) = \rho$, $A(x) = A$, $w(x,t) = \bar{w}(t)$ CONS. MASSA

$$u(x,t) = \frac{\bar{w}(t)}{\rho A} = \bar{u}(t)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,t)A(x)u^2(x,t)\right)}_{\text{PRIMO TERMINE AL I MEMBRO (MOMENTI IN/OUT)}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A\bar{u}^2(t)\right) = 0$$

- EQUAZIONE DI BERNOULLI



- IPOTESI
  - CONDIZIONI STAZIONARIE
  - DENSITÀ ρ COSTANTE
  - ATTRITO TRASCURABILE

CONS. MASSA $\Longrightarrow$ $w = \rho A u$ COSTANTE RISPETTO A x

CONS. Q. DI MOTO (VEDI CASO 1) $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dx}(\rho A u^2) + A\frac{dp}{dx} + \rho A g \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\rho A u \frac{du}{dx} + A\frac{dp}{dx} + \rho A g\frac{dz}{dx} = 0$$

$$u\frac{du}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + g\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{du^2}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + g\frac{dz}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + gz = \text{cost.}} \Longleftarrow$$

EQ. BERNOULLI