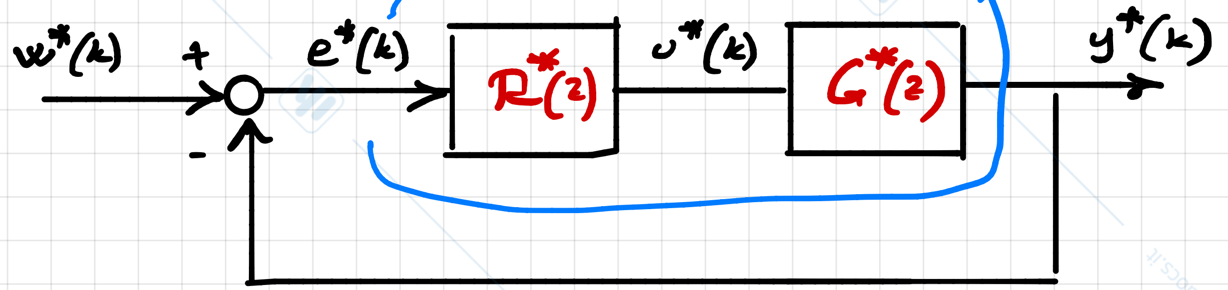
ANALISI DI SISTEMI RETROAZIONATI A TEMPO DISCRETO

- SISTEMI RETROAZIONATI A TEMPO DISCRETO



$$L(z) = R^*(z)\,G^*(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

FDT D'ANELLO

- ASINTOTICA STABILITÀ

$$G_{yw}(z) = \underbrace{\frac{L(z)}{1+L(z)}}_{F(z)} = \frac{N(z)}{\underbrace{D(z)+N(z)}_{\varphi_{AC}(z)}}$$

A.S. STABILITÀ

$\Updownarrow$

1. NO CANCELLAZIONI CRITICHE (CON $|\cdot| \geq 1$)
2. TUTTE LE RADICI DI $\varphi_{AC}(z)$ HANNO MODULO < 1

- METODI DI ANALISI

- CALCOLO RADICI
- TRASF. BILINEARE + ROUTH
- NYQUIST "DISCRETO"
- LUOGO DELLE RADICI

$$\tilde{\varphi}(s) = \varphi_{AC}\left(\frac{1+s}{1-s}\right)(1-s)^n$$

- CRITERIO DI NYQUIST (A TEMPO DISCRETO)

Γ DIAGRAMMA DI $L(e^{j\theta})$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$

N N. DI GIRI (ANTIORARI) DI Γ INTORNO A -1

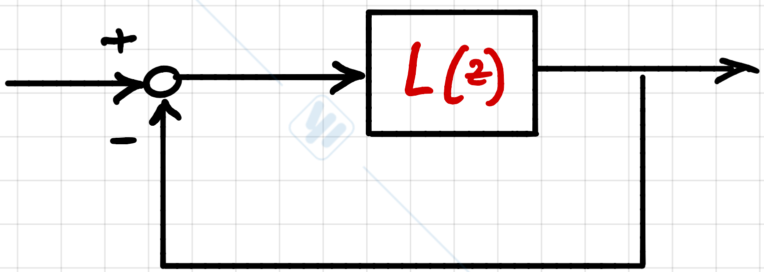
+1 SE RETROAZIONE POSITIVA

P N. DI POLI DI $L(z)$ CON $|\cdot| > 1$

AS. STAB. $\iff \begin{cases} N \text{ BEN DEFINITO} \\ N = P \end{cases}$

- NOTA_ SI POTREBBERO ESTENDERE:
  - CRITERIO DI BODE
  - MARGINE DI FASE
  - MARGINE DI GUADAGNO

- LUOGO DELLE RADICI (A TEMPO DISCRETO)



$$L(z) = \rho \frac{N^*(z)}{D(z)} = \rho \frac{\prod_i (z+z_i)}{\prod_i (z+p_i)}$$

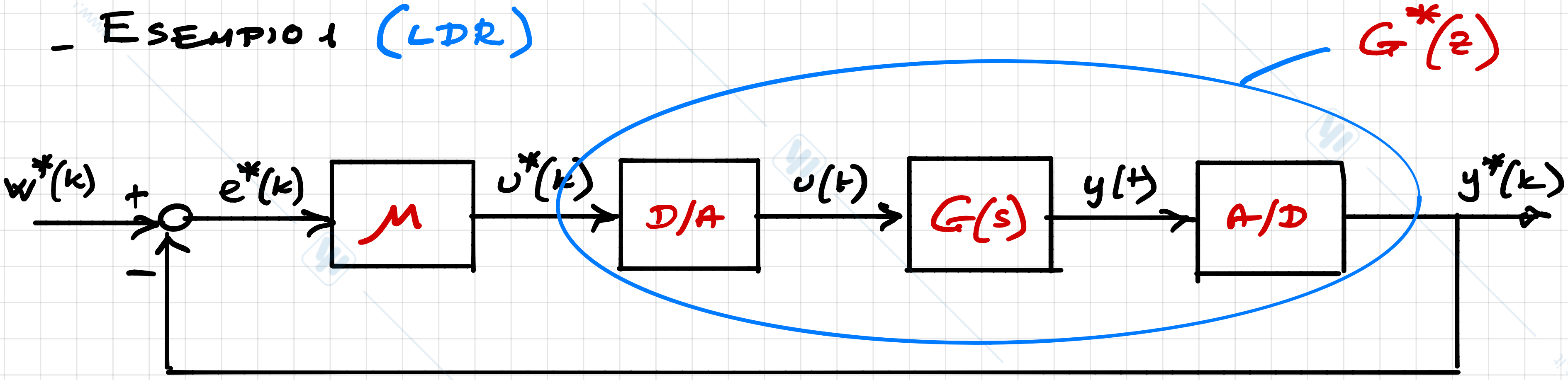
POLI IN A.C. = RADICI DI $\varphi_{AC}(z) = D(z) + \rho N^*(z)$

- STUDIO DEI POLI IN A.C. AL VARIARE DI ρ $\Longrightarrow$ LDR

PROBLEMA IDENTICO A QUELLO TRATTATO A TEMPO CONTINUO

- REGOLE DI TRACCIAMENTO IDENTICHE
- INTERPRETAZIONE DEL L.D.R. DIVERSA

- ESEMPIO 1 (LDR)

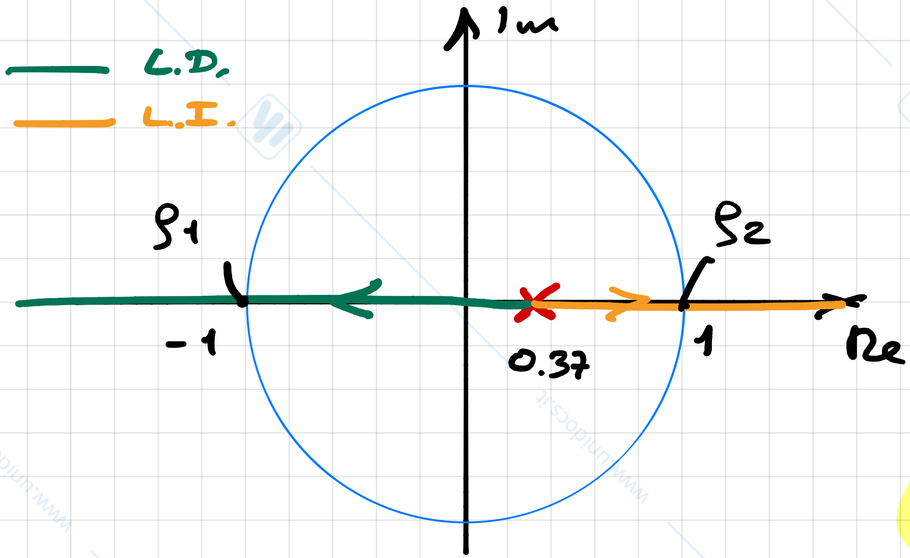


$G(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $T = 1$

- STABILITÀ AL VARIARE DI μ ?

$$G^*(z) = \frac{1-e^{-1}}{z-e^{-1}} \simeq \frac{0.63}{z-0.37} \Longrightarrow L(z) = \frac{0.63\mu}{z-0.37}$$

$0.63\mu = \rho$



$\rho_1 = 1.37 \qquad \mu_1 = \dfrac{\rho_1}{0.63} \simeq 2.17$

$\rho_2 = -0.63 \qquad \mu_2 = \dfrac{\rho_2}{0.63} = -1$

AS. STAB. $\Longleftrightarrow$ $-1 < \mu < 2.17$

- ESEMPIO 1 (NYQUIST A T. DISCRETO)

$$L(z) = \frac{\underbrace{0.63\mu}_{\varrho}}{z-0.37} \qquad L(e^{j\vartheta}) = \frac{\varrho}{e^{j\vartheta}-0.37} = \frac{\varrho}{\cos\vartheta - 0.37 + j\,\text{sen}\,\vartheta}$$

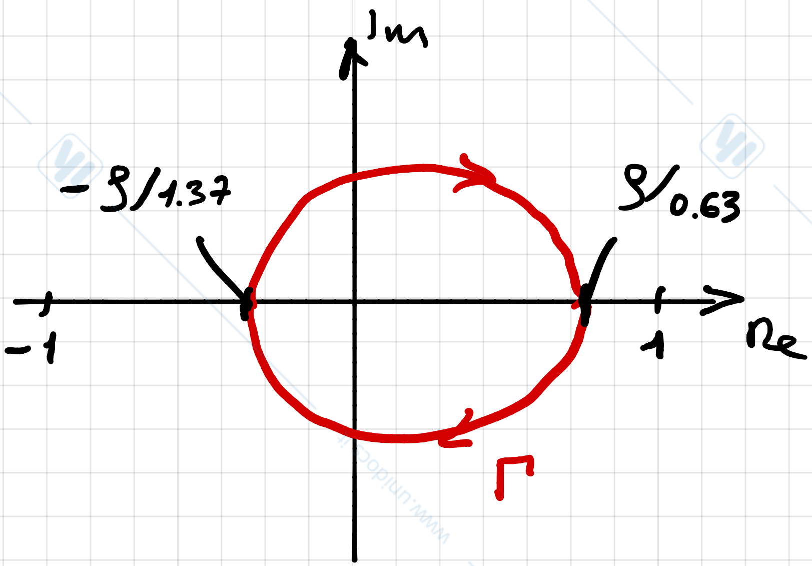
- CASO 1 $\varrho > 0$

$$|L(e^{j\vartheta})| = \frac{\varrho}{\sqrt{1.14 - 0.74\cos\vartheta}}$$

$$\measuredangle L(e^{j\vartheta}) = -\measuredangle(\cos\vartheta - 0.37 + j\,\text{sen}\,\vartheta)$$

$$\vartheta = 0 \quad \begin{cases} |L(e^{j0})| = \dfrac{\varrho}{\sqrt{0.4}} \simeq \dfrac{\varrho}{0.63} \\ \measuredangle L(e^{j0}) = 0^\circ \end{cases}$$

$$\vartheta = \pi \quad \begin{cases} |L(e^{j\pi})| = \dfrac{\varrho}{\sqrt{1.88}} \simeq \dfrac{\varrho}{1.37} \\ \measuredangle L(e^{j\pi}) = 180^\circ \end{cases}$$



$$0 = P = N \iff \frac{\overbrace{\varrho}^{0.63\mu}}{1.37} < 1$$

$$\boxed{\text{A S.STAB.} \iff 0 < \mu < 2.17}$$

- CASO 2 $\rho < 0$ $\qquad \rho = 0.63\mu$

- È COME SE CI FOSSE UNA RETROAZIONE POSITIVA

N N. DI GIRI (ANTIORARI) INTORNO A $+1$

$$0 = P = N \iff \frac{|\rho|}{0.63} < 1 \iff |\mu| < 1$$

$$\boxed{\text{A S.STAB.} \iff -1 < \mu < 0}$$

- ESEMPIO 1 (ANALISI APPROX. A T. CONTINUO)

$$\tilde{R}(s) \simeq e^{-sT/2}\mu \implies \tilde{L}(s) \simeq \frac{\mu}{s+1} e^{-sT/2}$$

- CASO 1 $\mu > 0$

$$|\tilde{L}(j\omega)| = \frac{\mu}{\sqrt{1+\omega^2}} = 1$$

→ $\mu \leq 1$ CRIT. DI NYQUIST (T.C.) $\implies$ AS. STAB.

→ $\mu > 1$ $\tilde{\omega}_c = \sqrt{\mu^2 - 1}$

$T = 1$

$$\tilde{\varphi}_c = -\arctan\tilde{\omega}_c - \tilde{\omega}_c \frac{T}{2} \frac{180°}{\pi} = -180°$$

$\implies$ PER TENTATIVI $\tilde{\omega}_c \simeq 3.67$

$$\mu = \sqrt{1+\tilde{\omega}_c^2} \simeq 3.8$$

$$\boxed{\text{AS. STAB.} \iff \mu < 3.8}$$

STIMA IMPRECISA

- CASO 2 $\mu < 0$

- CON CRITERIO DI NYQUIST (A T. CONTINUO) SI TROVA:

$$\boxed{\text{AS. STAB} \iff \mu > -1}$$

- ESEMPIO 1 (CALCOLO DEI POLI IN A.C.)

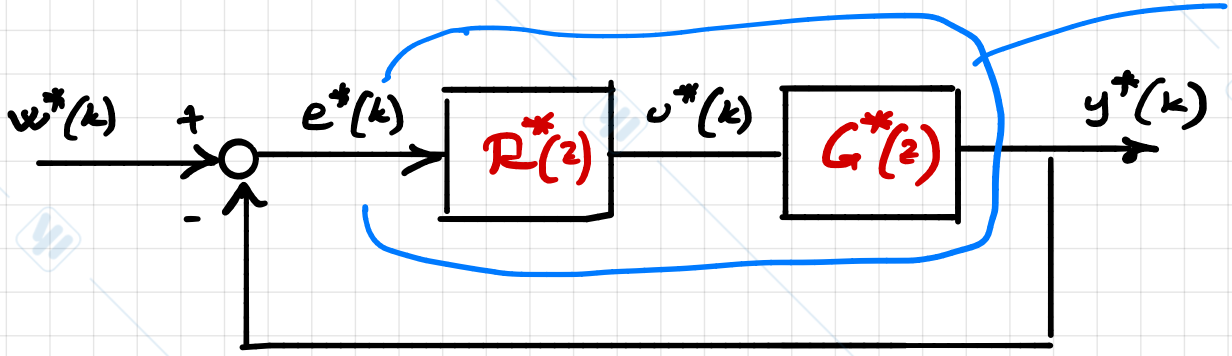
$$L(z) = \frac{0.63\mu}{z-0.37} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$\varphi_{AC}(z) = D(z) + N(z) = z - 0.37 + 0.63\mu = 0$$

POLO IN A.C.: $z = 0.37 - 0.63\mu$

$\boxed{\text{AS. STAB.}} \iff |0.37 - 0.63\mu| < 1 \iff \boxed{-1 < \mu < 2.17}$

- ANALISI DELLE PRESTAZIONI DI "TRACKING"



$L(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

$$G_{yw}(z) = F(z) = \frac{L(z)}{1+L(z)} = \frac{N(z)}{D(z)+N(z)}$$

- ANALISI IN FREQUENZA

$F(e^{j\theta})$ R.I.F.

$\boxed{\text{SITUAZIONE IDEALE}}$

$$|F(e^{j\theta})| \simeq 1 \ , \ \forall \theta \in [0, \pi]$$

OVVERO

$$|L(e^{j\theta})| >> 1 \ , \ \forall \theta \in [0, \pi]$$

- PROBLEMI
    - DIFFICILE TRACCIARE D. DI BODE
    - $|L(e^{j\theta})| >> 1 \ , \ \forall \theta$ IMPLICA SPESSO PERDITA DI STABILITÀ

- ANALISI DELLA RISPOSTA ALLO SCALINO

$w^*(k) = sca^*(k)$

1. PRECISIONE STATICA

$$\mu_F = F(1) = \frac{L(1)}{1+L(1)} = \frac{N(1)}{D(1)+N(1)}$$

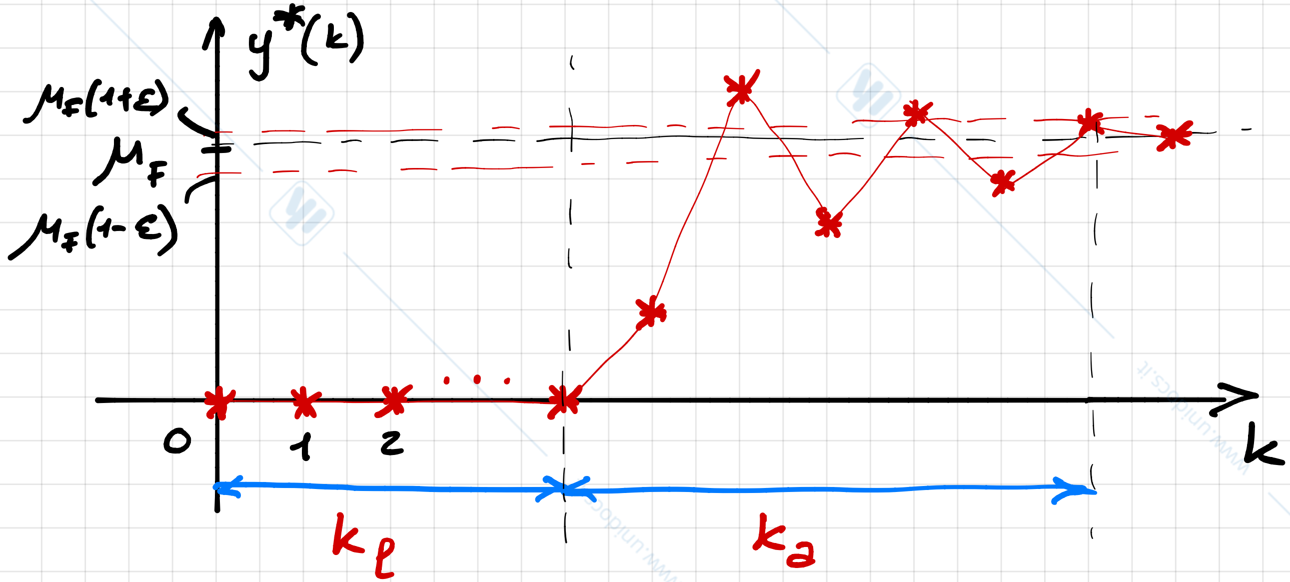
SITUAZIONE IDEALE $\mu_F = 1$

$$\mu_F = 1 \iff D(1) = 0 \iff \underbrace{L(z) \text{ HA UN POLO IN } z=1}_{\text{AZIONE INTEGRALE}}$$

- SE $L(z)$ HA TIPO $g=0$ (NÈ POLI, NÈ ZERI IN $z=1$)

$$\mu_F = \frac{\mu_L}{1+\mu_L} \simeq 1 \quad \text{SE} \quad \mu_L >> 1$$

2. PRECISIONE DINAMICA



CARATTERISTICHE PRINCIPALI

- VELOCITÀ DI RISPOSTA
- SMORZAMENTO OSCILLAZIONI

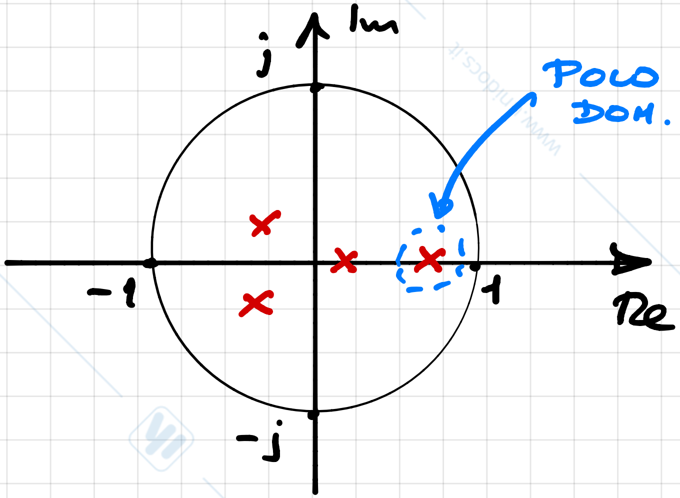
- TEMPO DI LATENZA k_ℓ: ULTIMO ISTANTE k PER CUI $y^*(k)=0$
  - RISULTA: $\boxed{k_\ell = \nu_F - 1}$ GRADO RELATIVO DI $F(z)$
- TEMPO DI ASSESTAMENTO k_a: N. PASSI NECESSARI PER PASSARE DA $y^*(k_\ell)=0$ A $y^*(k) \simeq \mu_F$ (CON PRECISIONE ε)
  - RISULTA: $\boxed{k_a \simeq -\dfrac{5}{\ln|z_{DOM}|}}$ POLO DOMINANTE
- TEMPO DI RISPOSTA COMPLESSIVO: $\boxed{k_r = k_a + k_\ell} = \boxed{k_a + \nu_F - 1}$

– POLI DOMINANTI

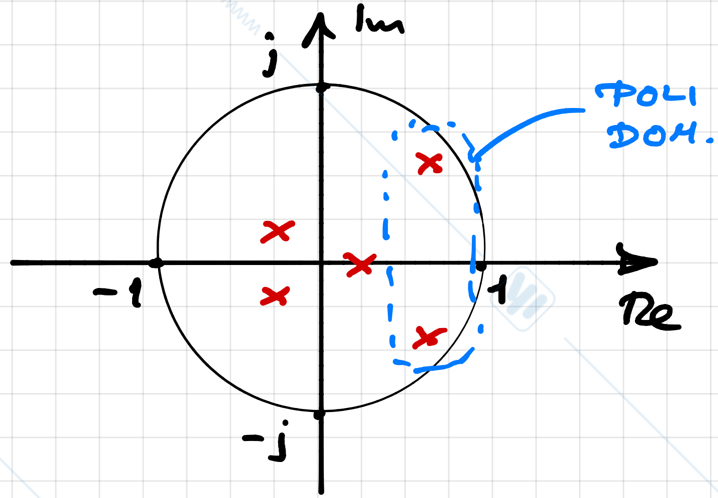
– SISTEMA AS. STABILE DESCRITTO DA $F(z)$

– POLI DOMINANTI: SONO QUELLI PIÙ VICINI ALLA CIRCONFERENZA UNITARIA

POLO DOM. REALE



POLI DOM. COMPLESSI

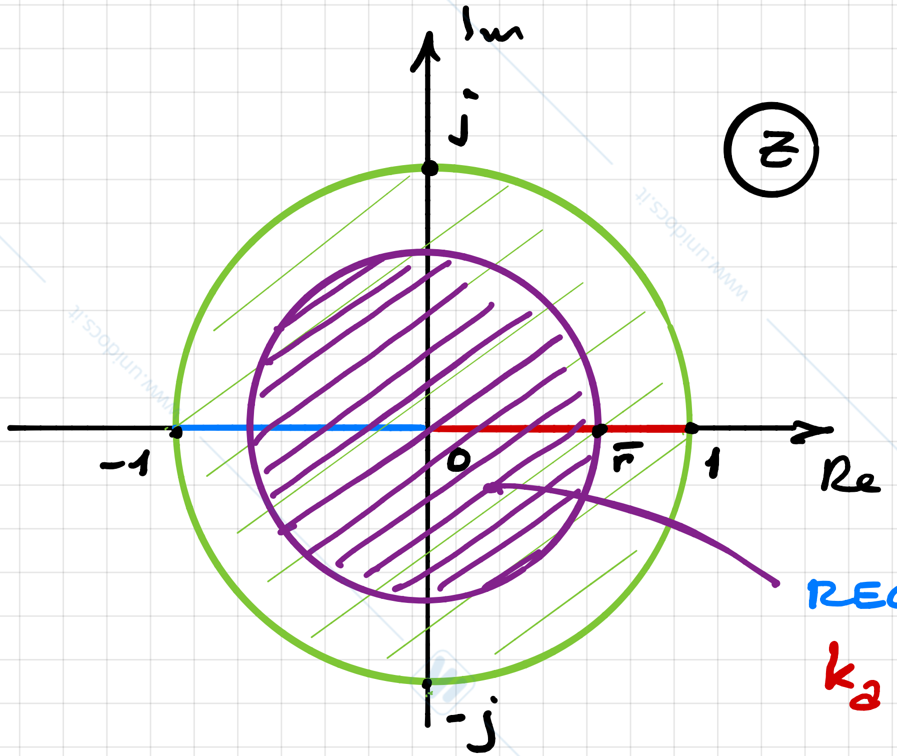


– IN OGNI CASO RISULTA

$$k_a \simeq -\frac{5}{\ln|z_{DOM}|}$$

- VINCOLO SUL TEMPO DI ASSESTAMENTO k_a

  - VEDI MAPPA $z = e^{sT}$



REGIONE CON
$k_a \leq \bar{k}_a = -\frac{5}{\ln \bar{r}}$

- SISTEMI FIR (FINITE IMPULSE RESPONSE)

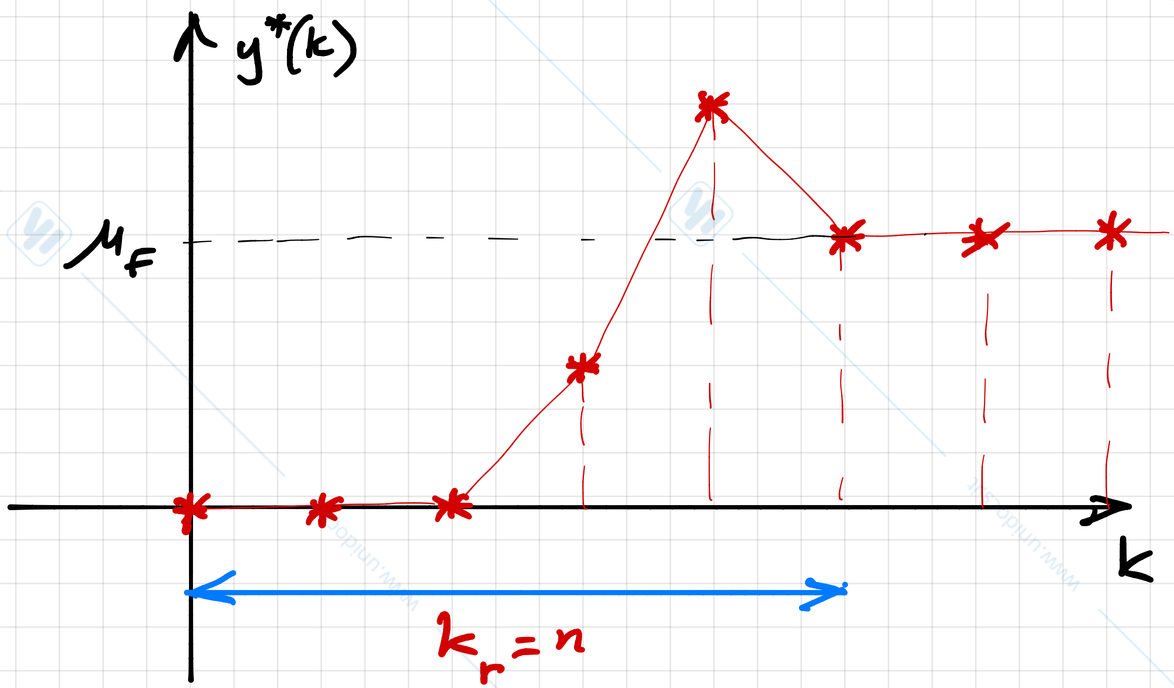
$$F(z) = \frac{N_F(z)}{z^n}$$

TUTTI I POLI IN $z=0$

POLO DOM. $z=0 \implies k_a \simeq -\frac{5}{\ln 0} = 0$!?

- PROPRIETÀ

  - LA RISPOSTA ALL'IMPULSO SI ANNULLA IN TEMPO FINITO
  - LA RISPOSTA ALLO SCALINO SI ASSESTA IN TEMPO FINITO



- SMORZAMENTO OSCILLAZIONI

  - VEDI MAPPA $z = e^{sT}$