

MOLLE ELICOIDALI DI COMPRESSIONE

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Corso di Costruzione di Macchine M

Stefano Fini

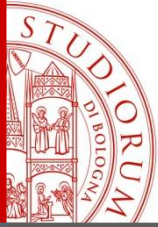
DIN - Dipartimento di Ingegneria Industriale

Stefano.fini@unibo.it

www.unibo.it

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

IL PRESENTE MATERIALE È RISERVATO AL PERSONALE DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA E NON PUÒ ESSERE UTILIZZATO AI TERMINI DI LEGGE DA ALTRE PERSONE O PER FINI NON ISTITUZIONALI



MOLLE ELICOIDALI

**Molle elicoidali di compressione a sezione circolare
(filo lavora a torsione):**

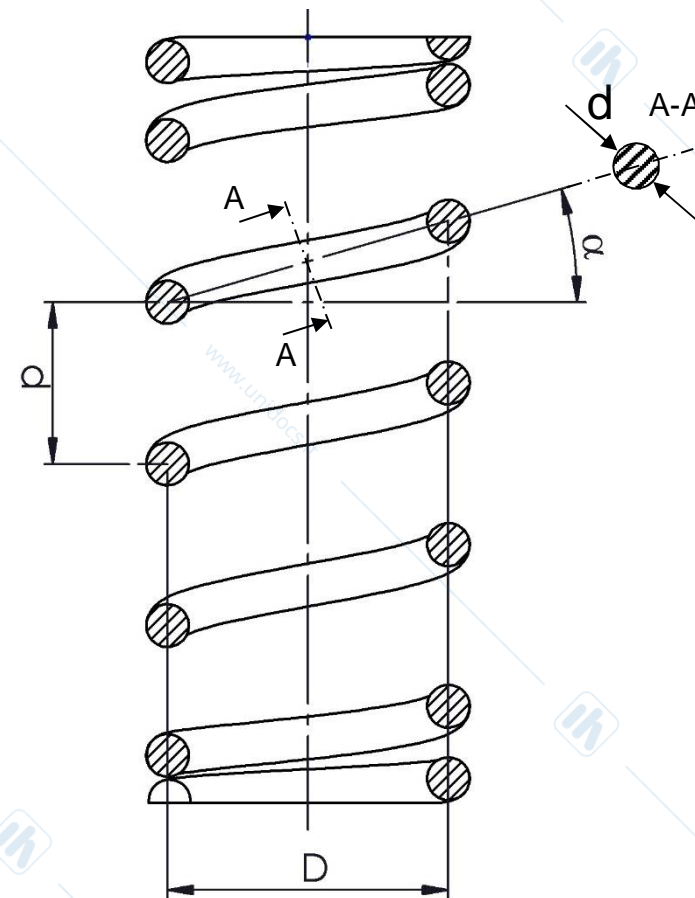
$$\alpha = \arctg\left(\frac{p}{\pi D}\right)$$

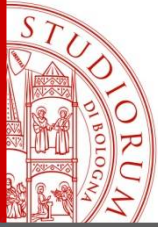


generalmente
 $3^\circ \leq \alpha \leq 16^\circ$

rapporto di avvolgimento $\omega = \frac{D}{d}$

Il rapporto di avvolgimento dovrebbe essere mantenuto tra 5 e 9. Valori inferiori a 3 richiedono attrezzature costruttive speciali, quelli superiori a 15 rischiano di far aggrovigliare il filo (tangling). L'elica è generalmente destra e in presenza di forze centrifughe i terminali si posizionano a 180° l'uno dall'altro.

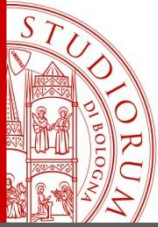




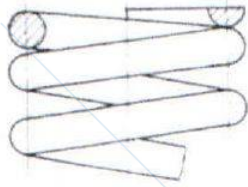
MOLLE ELICOIDALI

Molle elicoidali di compressione, rappresentazione

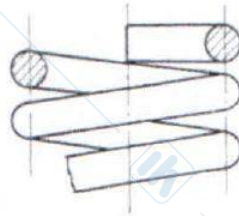
RAPPRESENTAZIONE DELLE MOLLE (da UNI 7281)			TAVOLA 7.10		
MOLLE DI COMPRESSIONE (ad elica)					
in vista	in sezione	schematica	in vista	in sezione	schematica
cilindrica, di filo o barra a sezione circolare			cilindrica, di filo o barra a sezione rettangolare o quadrata		
in vista	in sezione	schematica	in vista	in sezione	schematica
conica, di filo o barra a sezione circolare			conica, di filo o barra a sezione rettangolare (a bovolo)		



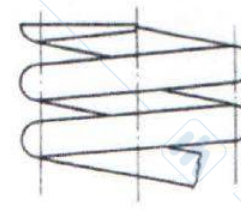
MOLLE ELICOIDALI



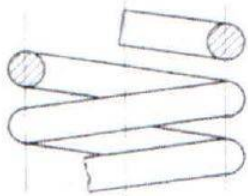
Terminale chiuso, molato
 n° spire utili = n° spire totale - 2
 $i = i_t - 2$



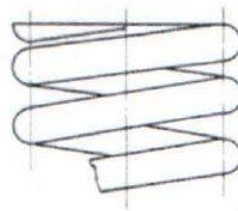
Terminale chiuso
 n° spire utili = n° spire totale - 2
 $i = i_t - 2$



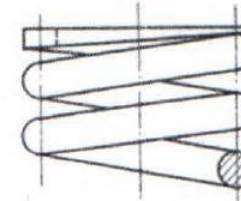
Terminale aperto molato
 n° spire utili = n° spire totale
 $i = i_t$



Terminale aperto
 n° spire utili = n° spire totale
 $i = i_t$

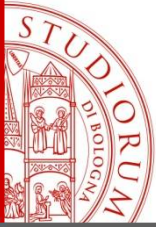


Terminale ravvicinato molato
 $i = i_t - (1,25 \div 1,75)$

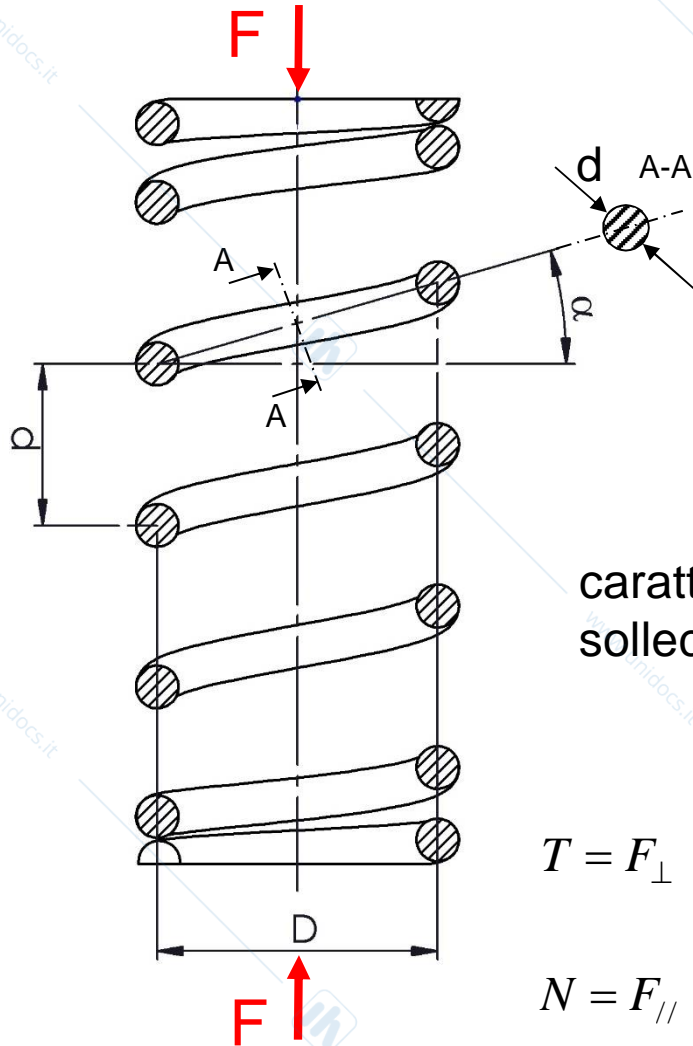


Terminale rastremato, chiuso e molato
 $i = i_t - 2$

i = numero di spire attive (che effettivamente si deformano)
 i_t = numero di spire totali (fisicamente presenti)



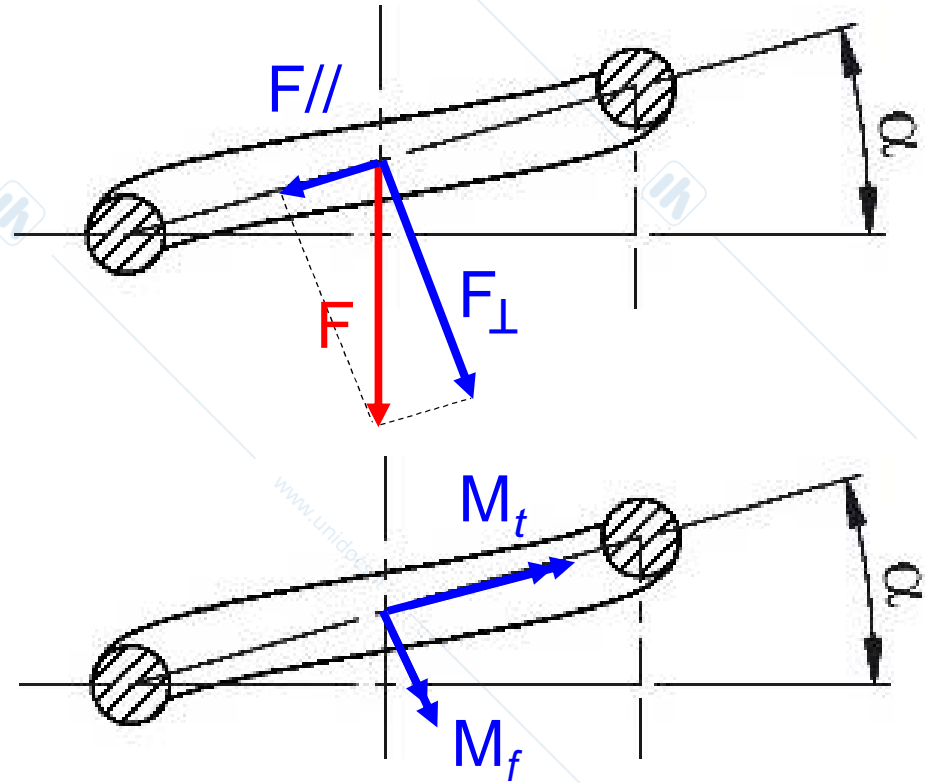
MOLLE ELICOIDALI

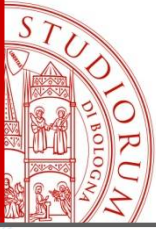


caratteristiche sollecitazione

$$T = F_{\perp} \quad F_{\perp} = F \cos(\alpha) \quad M_t = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \frac{D}{2} \cong F \cdot \frac{D}{2}$$

$$N = F_{\parallel} \quad F_{\parallel} = F \sin(\alpha) \quad M_f = F \sin(\alpha) \cdot \frac{D}{2} \cong 0$$





MOLLE ELICOIDALI

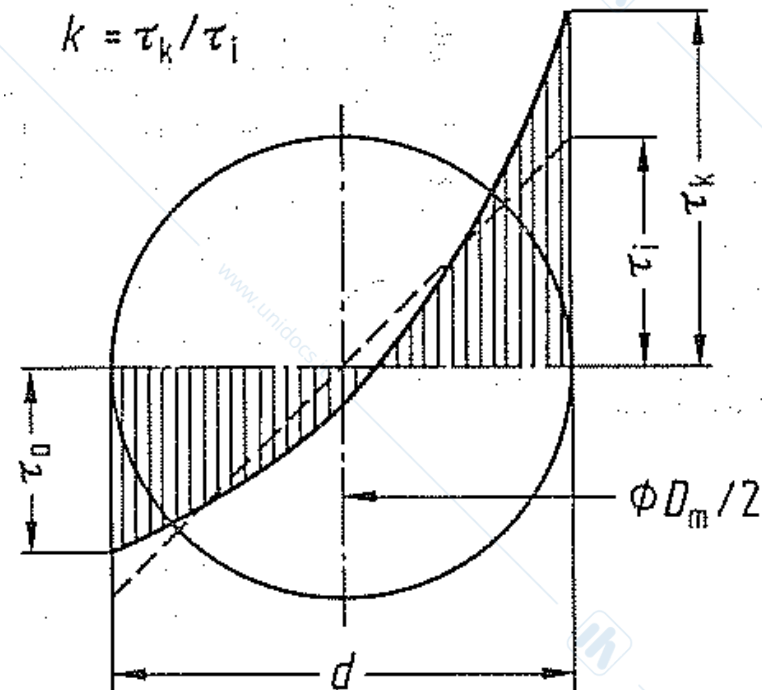
Per α piccolo la sollecitazione sul filo è prevalentemente torsionale e se ω è grande (>10) si può trascurare in prima approssimazione la curvatura del filo:

$$M_t = F \cdot \frac{D}{2} \quad W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

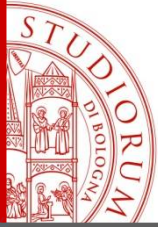
$$\tau_{\max} = \tau_i = \frac{M_t}{W_t} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

Per $\omega < 10$

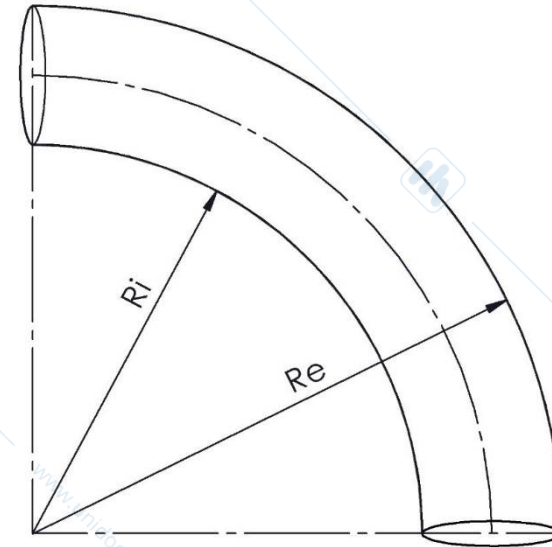
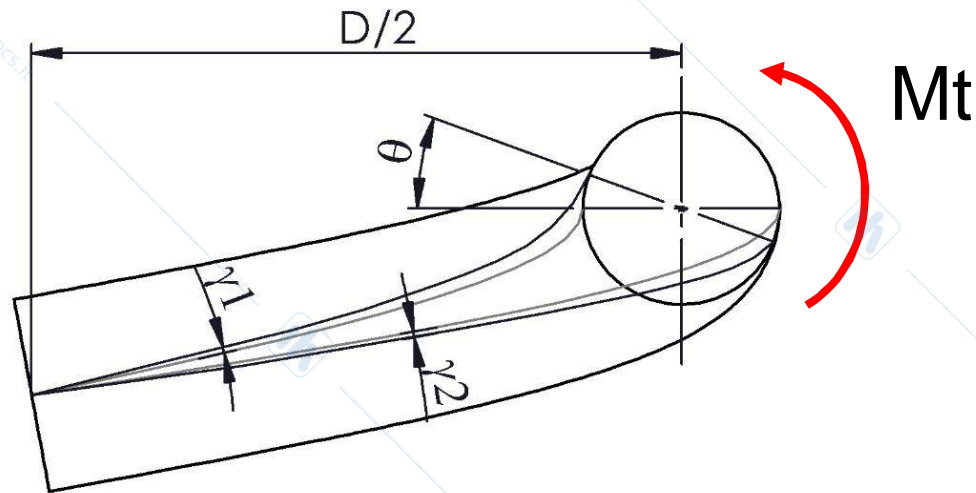
$$\tau_{\max} = \tau_k = \tau_i \cdot k \quad \text{Con } k \text{ fattore di intensificazione delle tensioni}$$



Per sollecitazioni statiche si ha un assestamento delle tensioni di picco e non è necessario considerare questa intensificazione nel calcolo della molla.



MOLLE ELICOIDALI



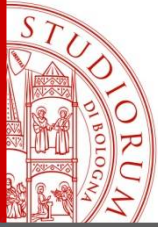
$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\gamma_1 = \gamma_i \propto \frac{\vartheta}{r_i}$$

$$\gamma_2 = \gamma_e \propto \frac{\vartheta}{r_e}$$

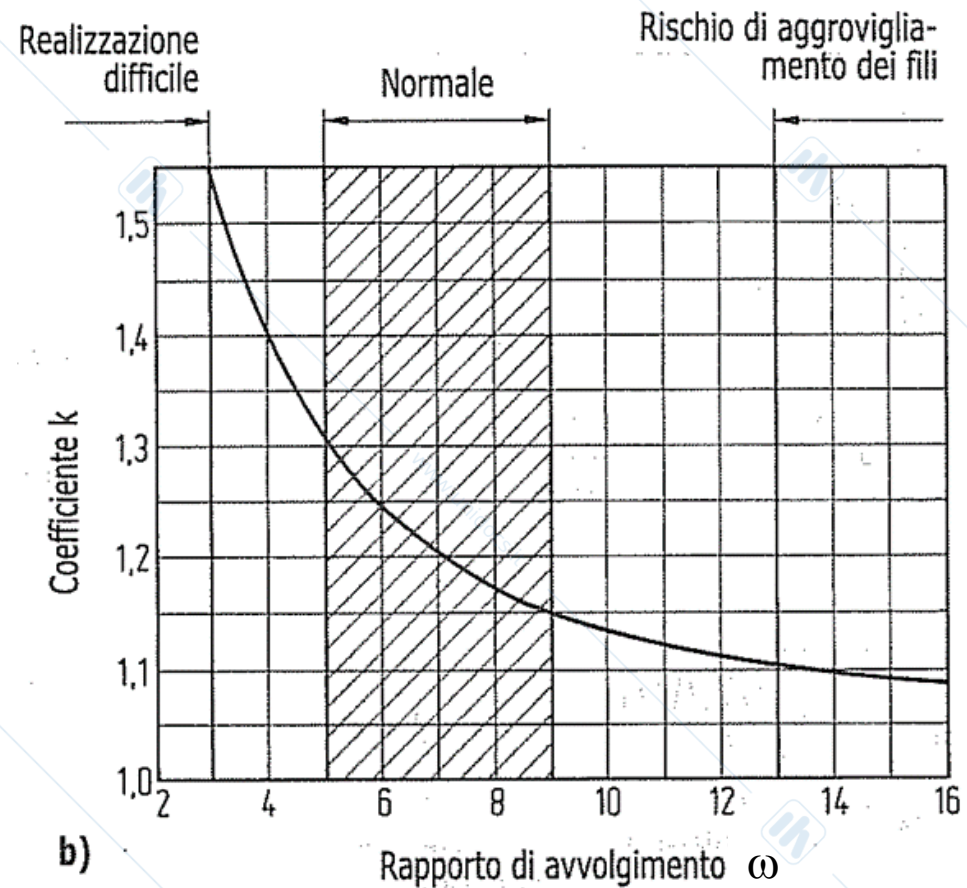
$$r_i < r_e \Rightarrow \gamma_i > \gamma_e$$

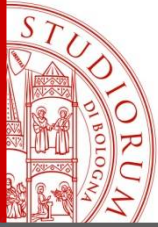
$$\tau_i > \tau_e$$



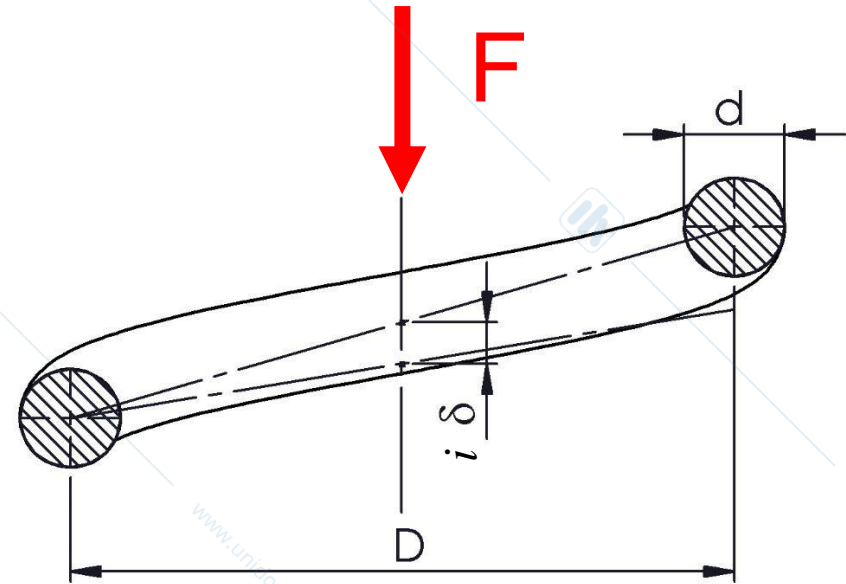
MOLLE ELICOIDALI

Andamento di K al variare di ω .
 K va visto come un coefficiente di intensificazione delle tensioni derivante dalla curvatura.





MOLLE ELICOIDALI



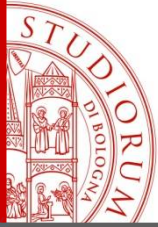
$$\vartheta_B = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$M_t = F \cdot \frac{D}{2} \quad \text{Per la singola spira: } l = \pi \cdot D$$

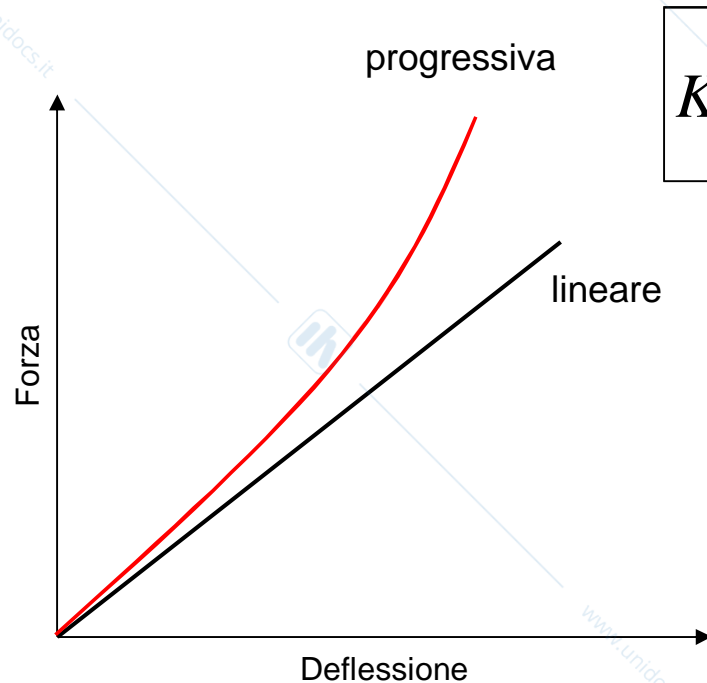
$$\vartheta_i = \frac{F \cdot D^2 \cdot 16}{G \cdot d^4} \quad \delta_i = \vartheta_i \cdot \frac{D}{2} = \frac{F \cdot D^3 \cdot 8}{G \cdot d^4}$$

$$K = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\delta_i \cdot i} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot i}$$

i = numero di spire utili (che lavorano)



MOLLE ELICOIDALI



$$K = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot i}$$

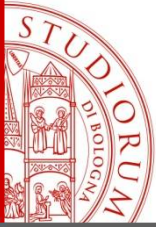
Lineare: i costante



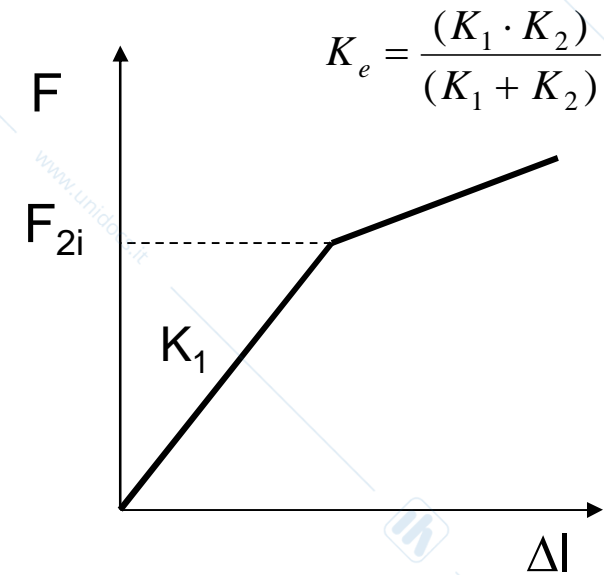
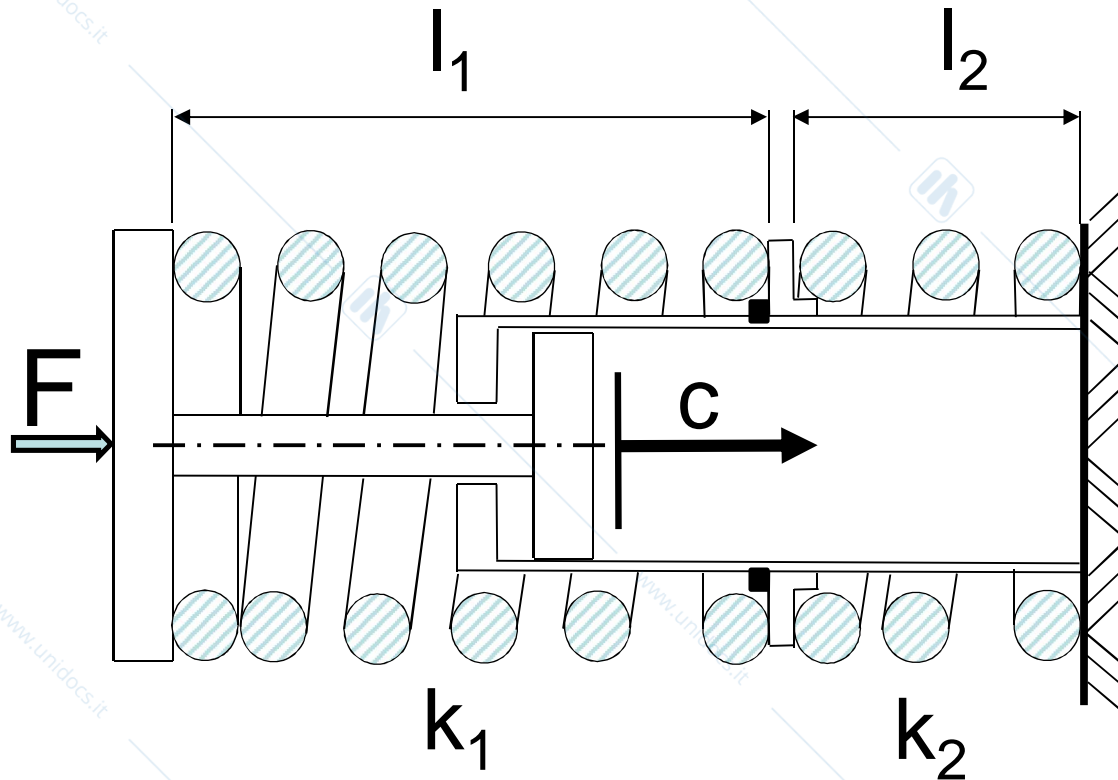
Progressiva: i variabile

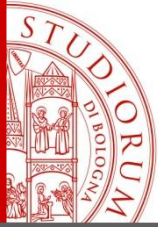


Dopo una certa corsa (o progressivamente) parte delle spire vanno in contatto e smettono di lavorare

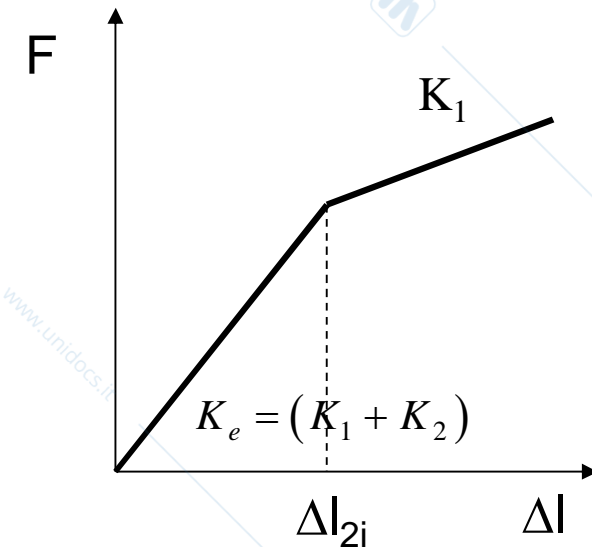
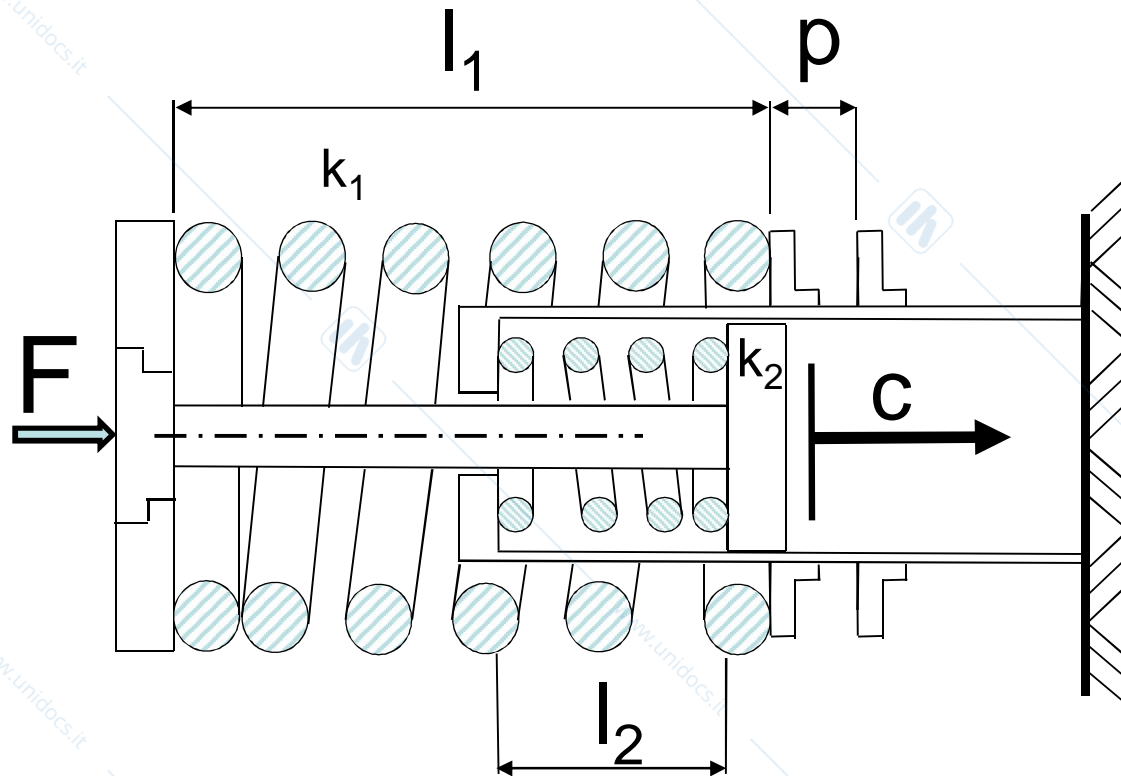


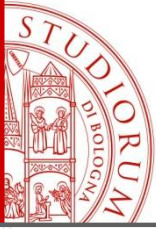
MOLLE ELICOIDALI





MOLLE ELICOIDALI





MOLLE ELICOIDALI

Molle elicoidali di compressione a sezione circolare
(filo lavora a torsione):

$$\omega \in [5 \div 10]$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} + \frac{F}{A} \quad \text{taglio trascurabile}$$

dimensionamento statico:

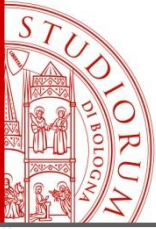
$$\tau_{\max} = \frac{FD}{2} \cdot \frac{16}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

freccia:

$$\delta = \frac{8FD^3}{Gd^4} \cdot i \quad \text{barra di torsione}$$

rigidezza k:

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{Gd^4}{8D^3i}$$



MOLLE ELICOIDALI

Molle elicoidali di compressione a sezione circolare
(filo lavora a torsione):

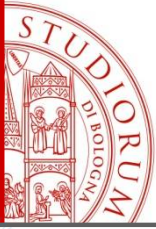
$\omega \ll 5$ molla 'tozza'

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} + \frac{F}{A} \quad \text{considerare taglio}$$

dimensionamento statico:

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{1}{2\omega} \right) = K_s \cdot \frac{8FD}{\pi d^3}$$

se $\omega \ll 1 \rightarrow K_s \gg 1$



MOLLE ELICOIDALI

Molle elicoidali di compressione a sezione circolare
(filo lavora a torsione):

$\omega \ll 5$ molla 'tozza'

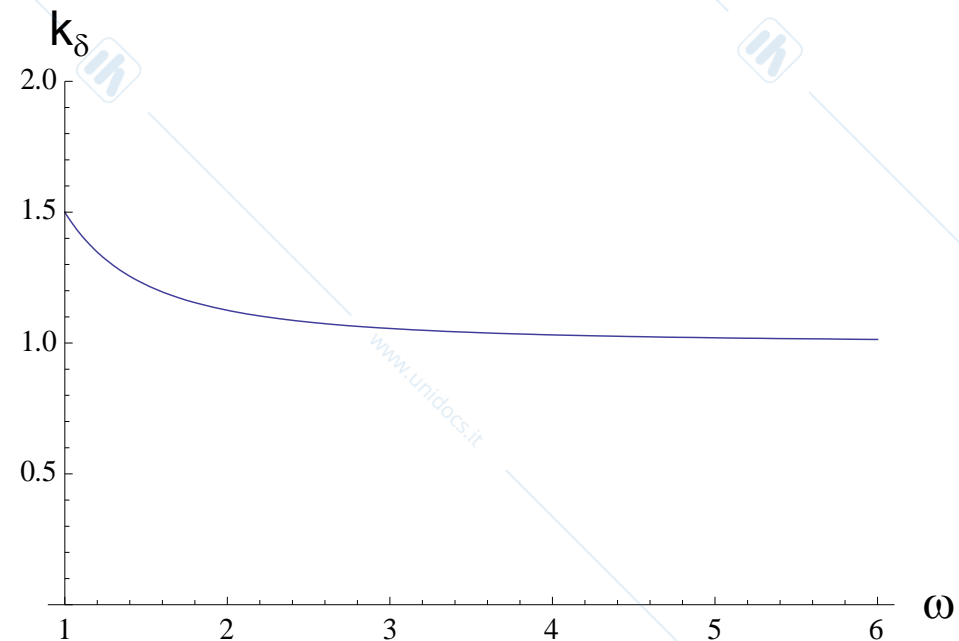
freccia:

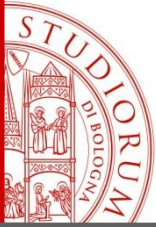
$$\delta' = \frac{8FD^3}{Gd^4} \cdot i \cdot \left(1 + \frac{1}{2\omega^2}\right) = \delta \cdot K_\delta$$

si ricava con criteri energetici

rigidezza k:

$$k = \frac{F}{\delta'} = \frac{Gd^4}{8D^3i \cdot \left(1 + \frac{1}{2\omega^2}\right)}$$





MOLLE ELICOIDALI

Molle elicoidali di compressione a sezione circolare
(filo lavora a torsione):

calcolo a fatica

$$\tau'_{\max} = K_W \cdot \frac{8FD}{\pi d^3}$$

$$K_W = \frac{4\omega - 1}{4\omega - 4} + \frac{0,615}{\omega}$$

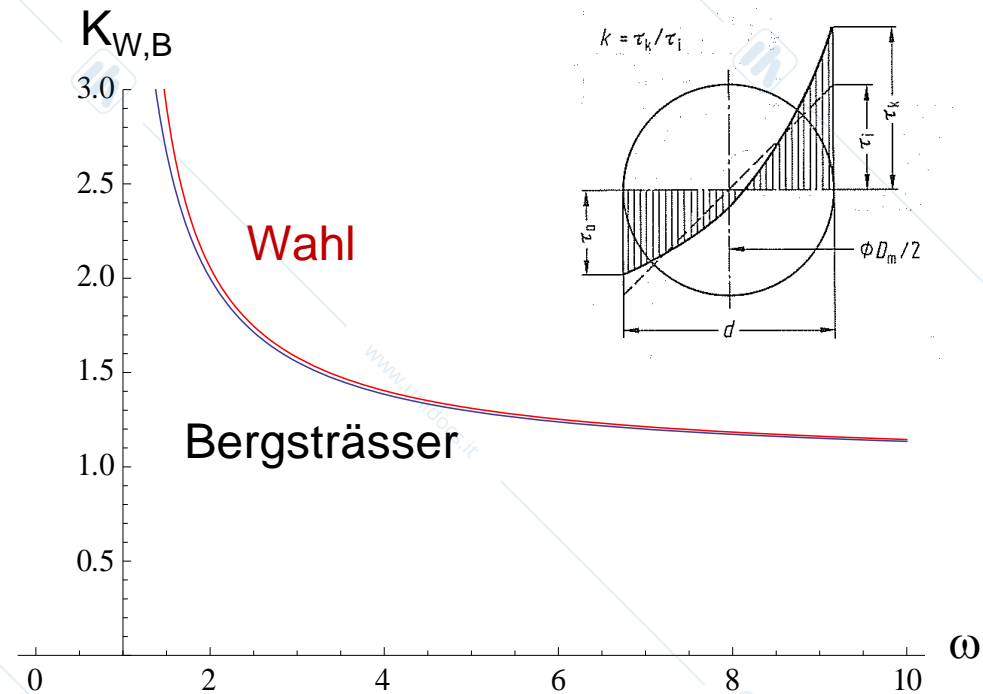
coefficiente di Wahl
(curvatura più taglio)

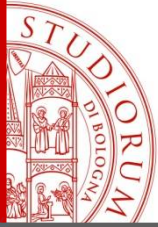
oppure

$$\tau'_{\max} = K_B \cdot \frac{8FD}{\pi d^3}$$

$$K_B = \frac{4\omega + 2}{4\omega - 3} = K$$

coefficiente di Bergsträsser (curvatura più taglio)





MOLLE ELICOIDALI

Molle elicoidali di compressione a sezione circolare (filo lavora a torsione):

$$\tau'_{\max} = K_W \cdot \frac{8FD}{\pi d^3}$$

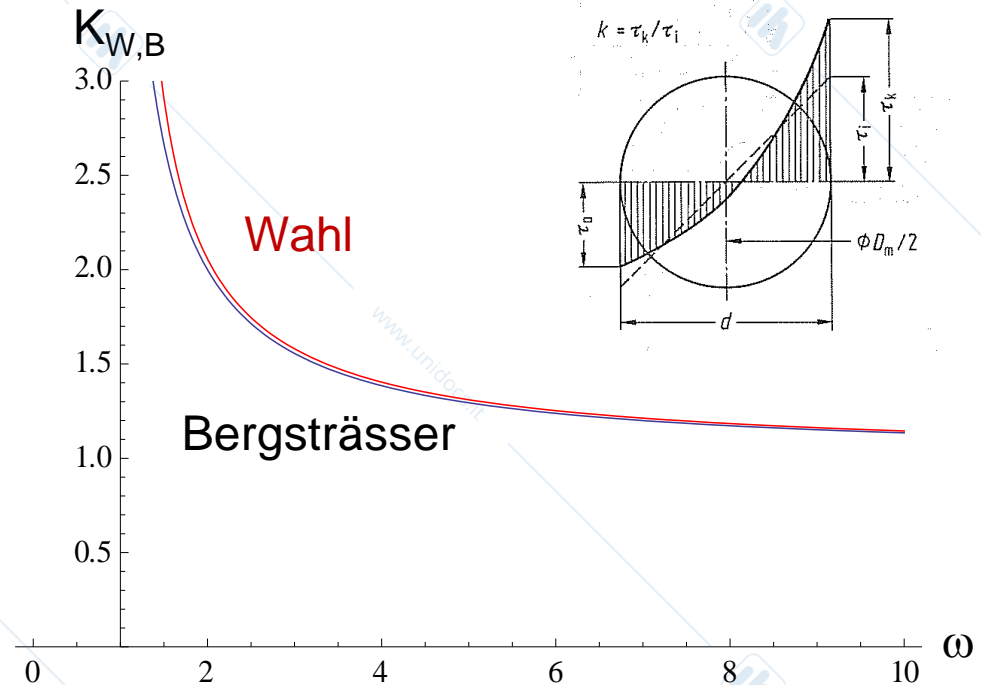
K_W tiene conto di:

- effetto della curvatura
- taglio

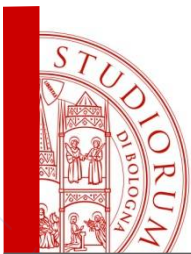
$$K_W = \frac{4\omega - 1}{4\omega - 4} + \frac{0,615}{\omega}$$

curvatura

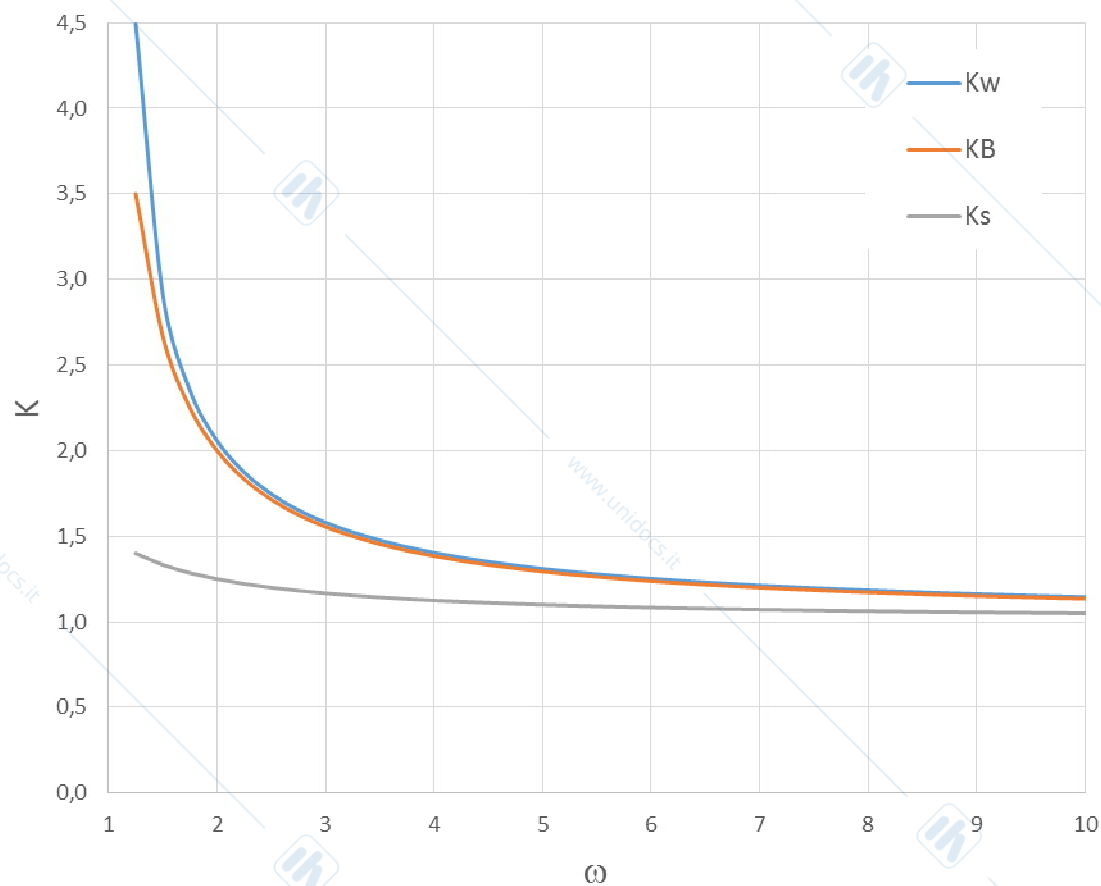
taglio

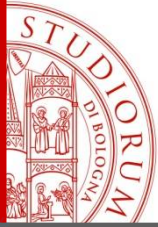


MOLLE ELICOIDALI



Confronto tra k_w , k_B , k_s





MOLLE ELICOIDALI

Esempio numerico: concentrazione di tensioni

$$d = 5\text{mm}$$

$$G = 77000\text{MPa}$$

$$D = 40\text{mm}$$

$$\partial = 10\text{mm}$$

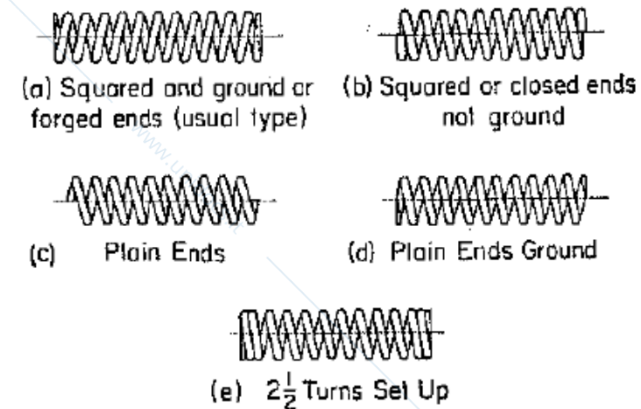
$$i = 6,5 \quad \text{spire tensionalmente attive}$$

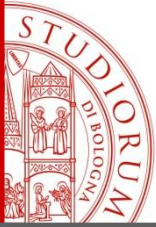
$$\omega = \frac{40}{5} = 8$$

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3i} = \frac{77000 \cdot 5^4}{8 \cdot 40^3 \cdot 6,5} = 14,461\text{N/mm}$$

$$K_w = \frac{4\omega - 1}{4\omega - 4} + \frac{0,615}{\omega} = \frac{32 - 1}{32 - 4} + \frac{0,615}{8} = 1,184$$

$$\tau'_{\max} = K_w \cdot \frac{8FD}{\pi d^3} = 1,184 \cdot \frac{8 \cdot 144,61 \cdot 40}{\pi \cdot 5^3} = 139,5\text{MPa}$$



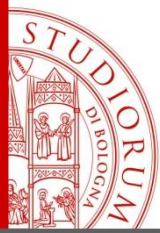


MOLLE ELICOIDALI

Esempio numerico: concentrazione di tensioni al bordo esterno

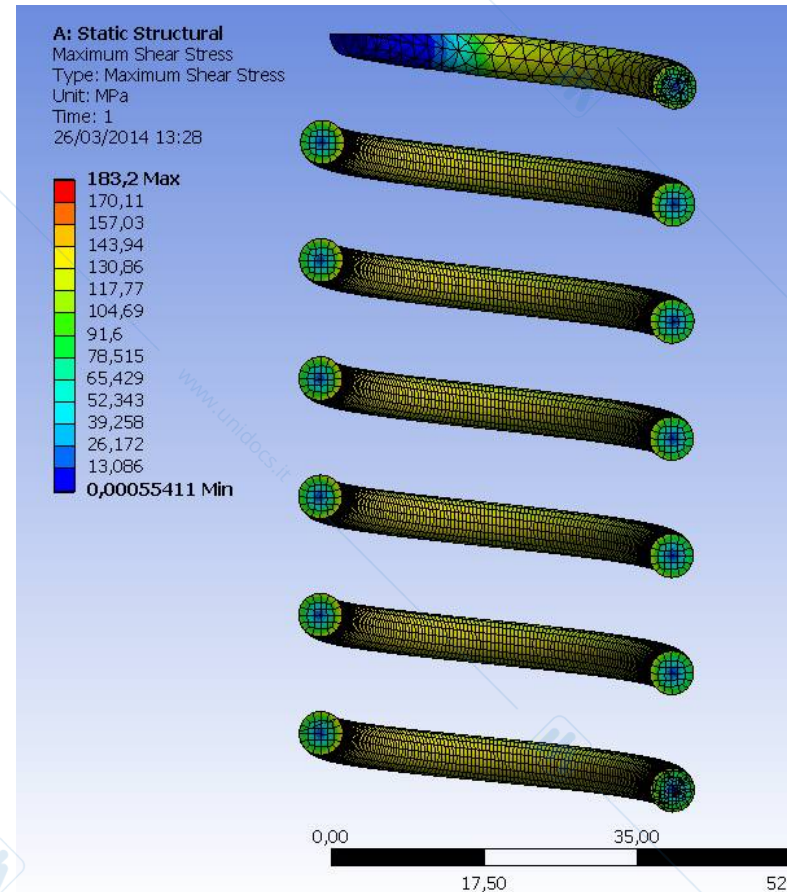
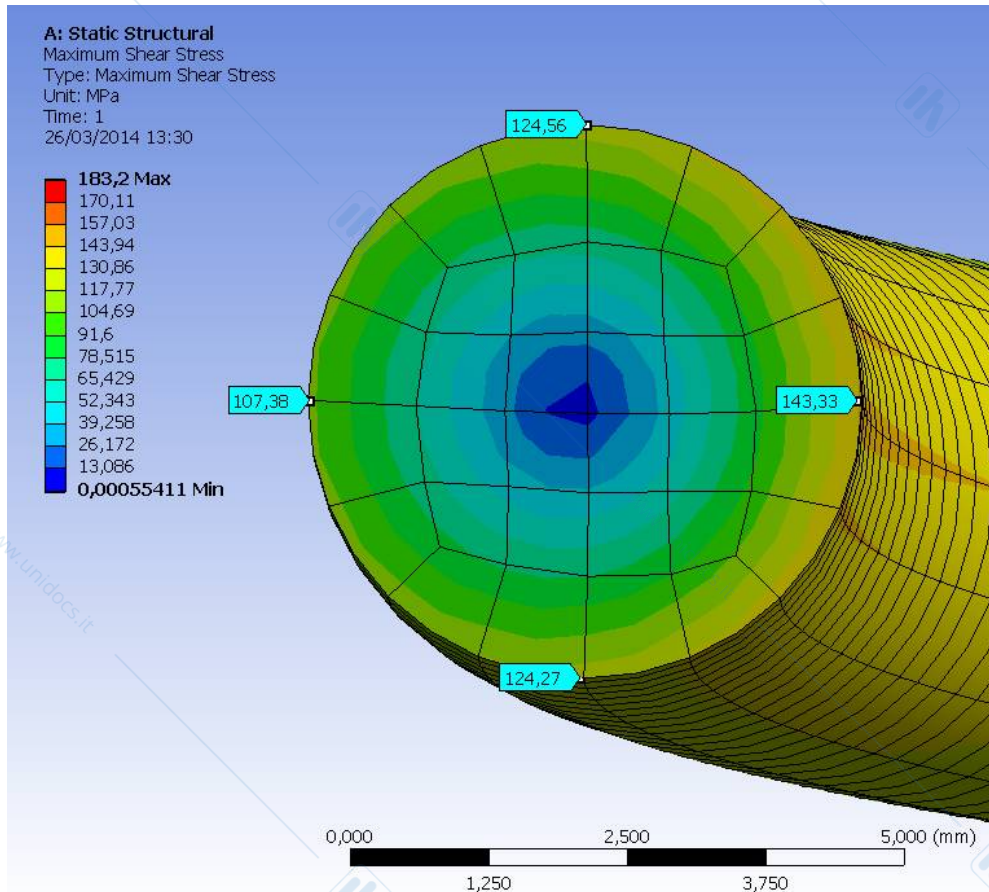
$$K'_w = \frac{4\omega + 1}{4\omega + 4} - \frac{0,615}{\omega} = \frac{32 + 1}{32 + 4} - \frac{0,615}{8} = 0,840 \quad \text{al bordo esterno}$$

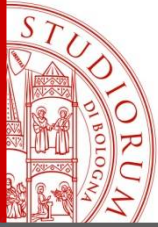
$$\tau' = K'_w \cdot \frac{8FD}{\pi d^3} = 0,840 \cdot \frac{8 \cdot 144,61 \cdot 40}{\pi \cdot 5^3} = 98,9 \text{ MPa} \quad \text{al bordo esterno}$$



MOLLE ELICOIDALI

Esempio numerico: concentrazione di tensioni

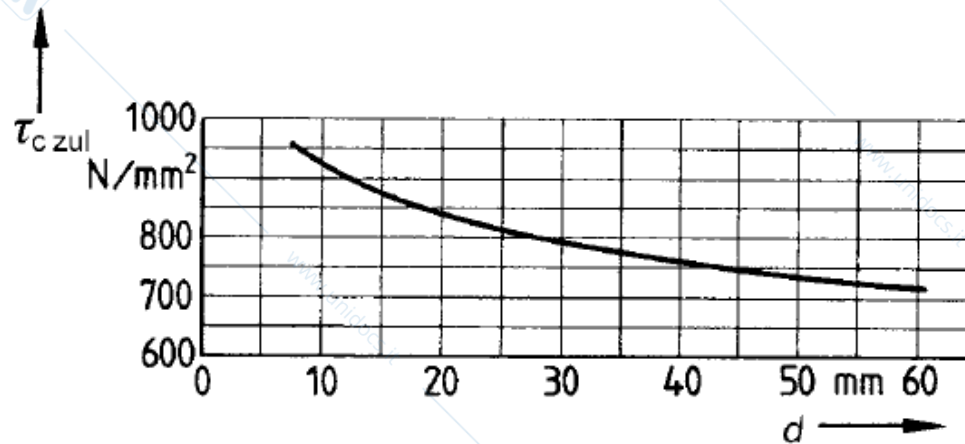


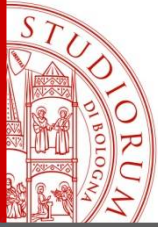


MOLLE ELICOIDALI

Sollecitazione statica

Andamento tipico della resistenza statica in funzione del diametro di filo (d) avvolto a caldo.

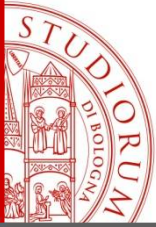




MOLLE ELICOIDALI

Materiali per molle da UNI 13906

Materiali	E N/mm ²	G N/mm ²	ρ kg/dm ³
Filo di acciaio per molle secondo la EN 10270-1:2001	206 000	81 500	7,85
Filo di acciaio per molle secondo la EN 10270-2:2001	206 000	81 500	7,85
Acciaio secondo il prEN 10089:2000	206 000	78 500	7,85
Filo di acciaio inossidabile secondo la EN 10270-3:2001			
X 10 Cr Ni 18-8	185 000	70 000	7,90
X 7 Cr Ni Al 17-7	195 000	73 000	7,90
X 5 Cr Ni Mo 17-12-2	180 000	68 000	7,95
Lega rame-stagno CuSn6 R950 secondo la EN 12166 trafilata dura per molle	115 000	42 000	8,73
Lega rame-zinco CuZn36 R700 secondo la EN 12166 trafilata dura per molle	110 000	39 000	8,40
Lega rame-berillio CuBe2 secondo la EN 12166	120 000	47 000	8,80
Lega rame-cobalto-berillio CuCo2Be secondo la EN 12166	130 000	48 000	8,80



MOLLE ELICOIDALI

Da UNI 13906

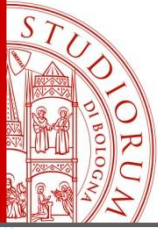
Carico statico o quasi-statico

Il carico statico è:

- un carico costante nel tempo.

Il carico quasi-statico è:

- un carico variabile con il tempo con un'ampiezza della sollecitazione torsionale trascurabile (per esempio un'ampiezza di sollecitazione torsionale fino a 0,1 volte la resistenza a fatica);
- un carico variabile con un'ampiezza della sollecitazione torsionale maggiore, ma con un numero di cicli limitato a non più di 10^4 .



MOLLE ELICOIDALI

Da UNI 13906

Carico dinamico

Per le molle di compressione, il carico dinamico è:

Un carico variabile con il tempo per un numero di cicli di carico maggiore di 10^4 e un'ampiezza della sollecitazione torsionale maggiore di 0,1 volte la resistenza a fatica avente:

- ampiezza costante della sollecitazione torsionale;
- ampiezza variabile della sollecitazione torsionale.

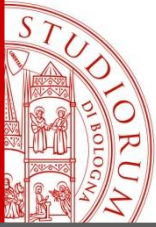
In funzione del numero di cicli N richiesti prima della rottura, è necessario differenziare fra due casi come segue:

- vita a fatica infinita, per la quale il numero di cicli è:
 - $N \geq 10^7$ per molle avvolte a freddo;
 - $N \geq 2 \times 10^6$ per molle avvolte a caldo.

In questo caso l'ampiezza della sollecitazione torsionale è minore del limite per vita a fatica infinita;

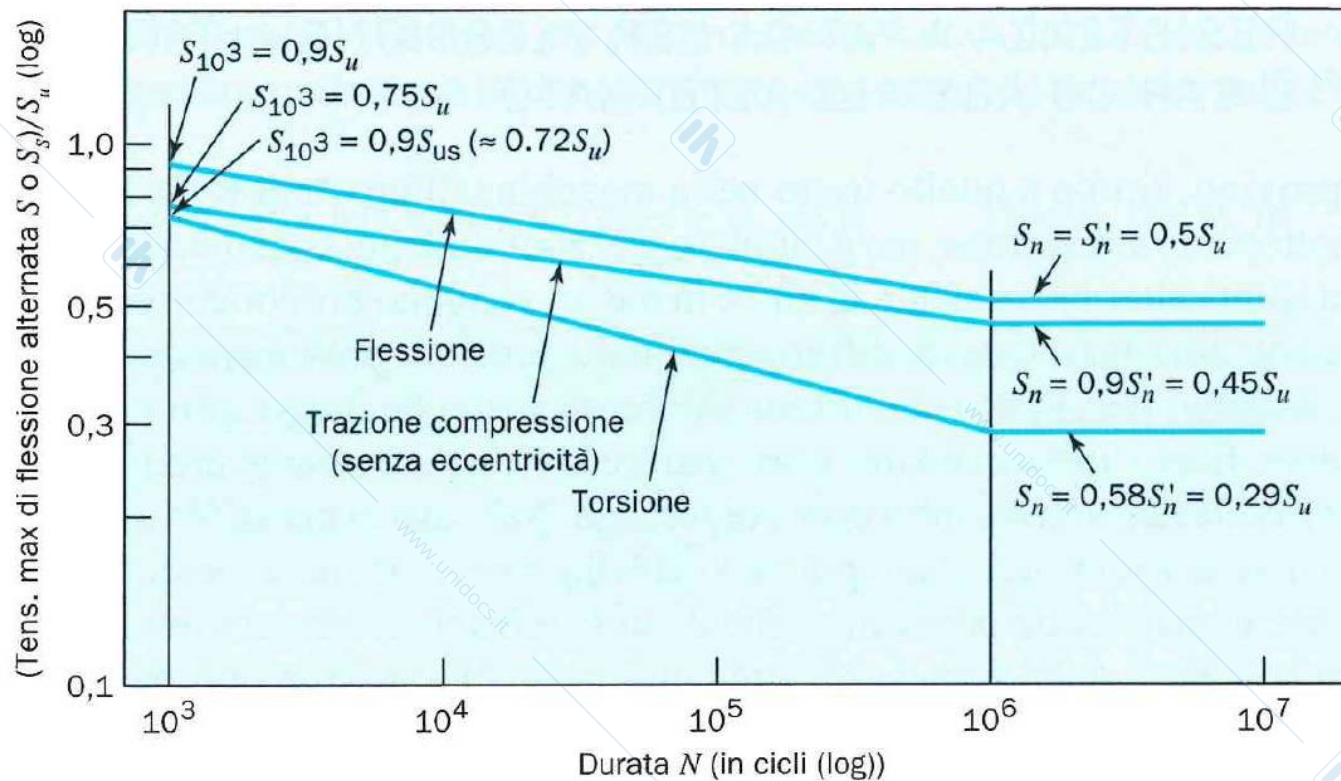
- vita a fatica limitata, per la quale:
 - $N < 10^7$ per molle avvolte a freddo
 - $N < 2 \times 10^6$ per molle avvolte a caldo.

In questo caso l'ampiezza della sollecitazione torsionale è maggiore del limite per vita a fatica infinita, ma è minore del limite di fatica a durata prefissata.

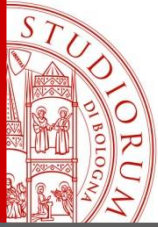


MOLLE ELICOIDALI

Comportamento a fatica: Diagramma di wohler



S_n =tensione limite di fatica
 S_u =tensione ultima statica
 S_y =tensione di snervamento



MOLLE ELICOIDALI

Comportamento a fatica: Diagramma di Haigh
(diagramma di sopravvivenza per data durata)

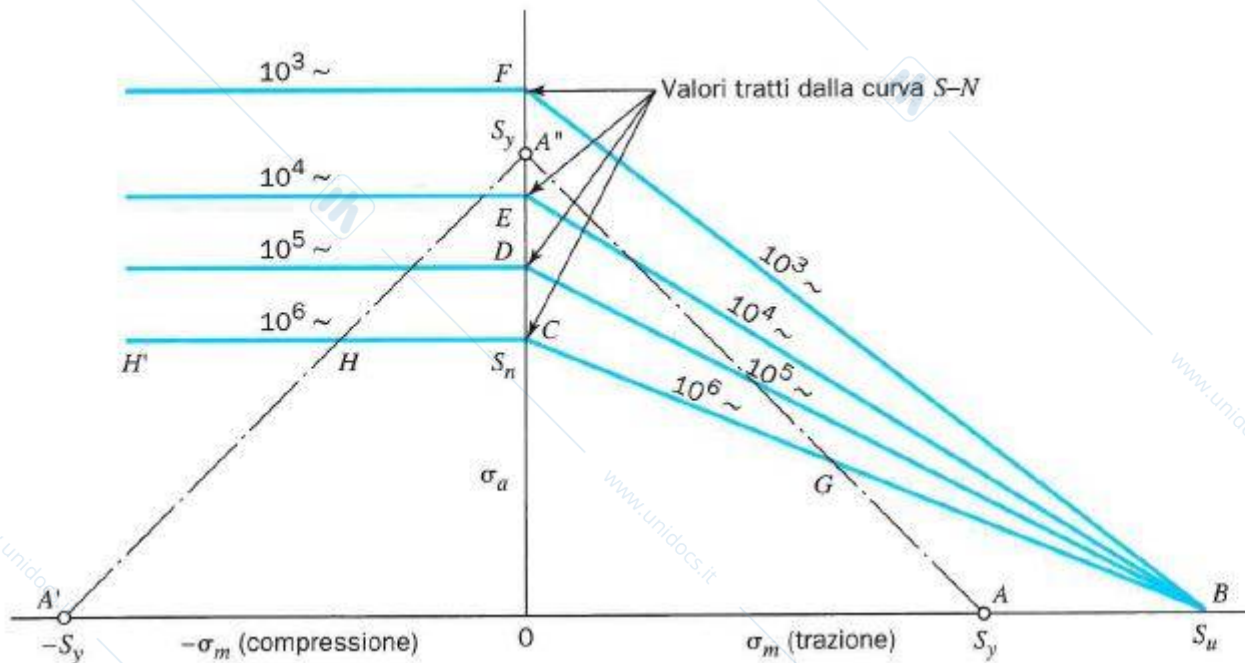
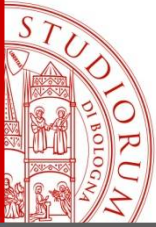


Figura 5.16

Diagramma di durata a fatica costante - materiali duttili.

S_n =tensione limite di fatica
 S_u =tensione ultima statica
 S_y =tensione di snervamento

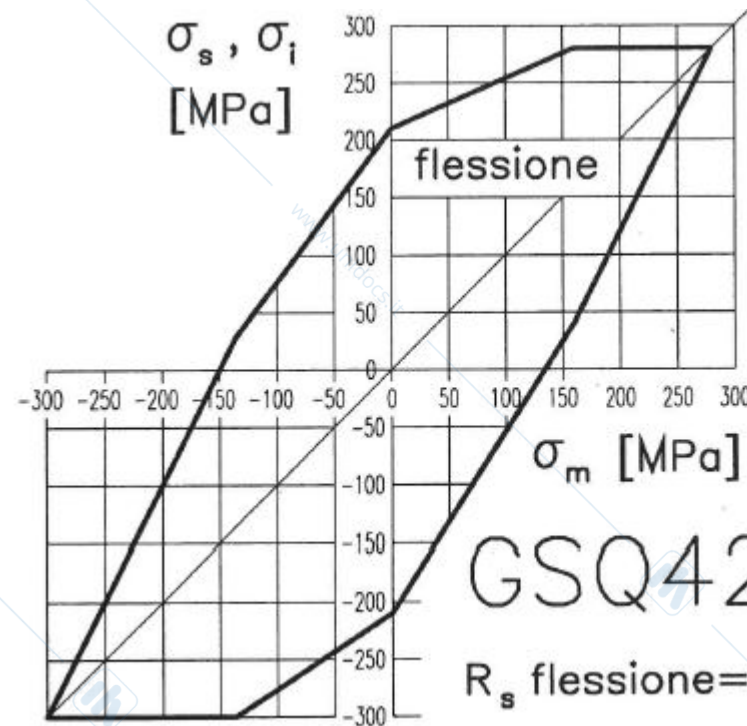
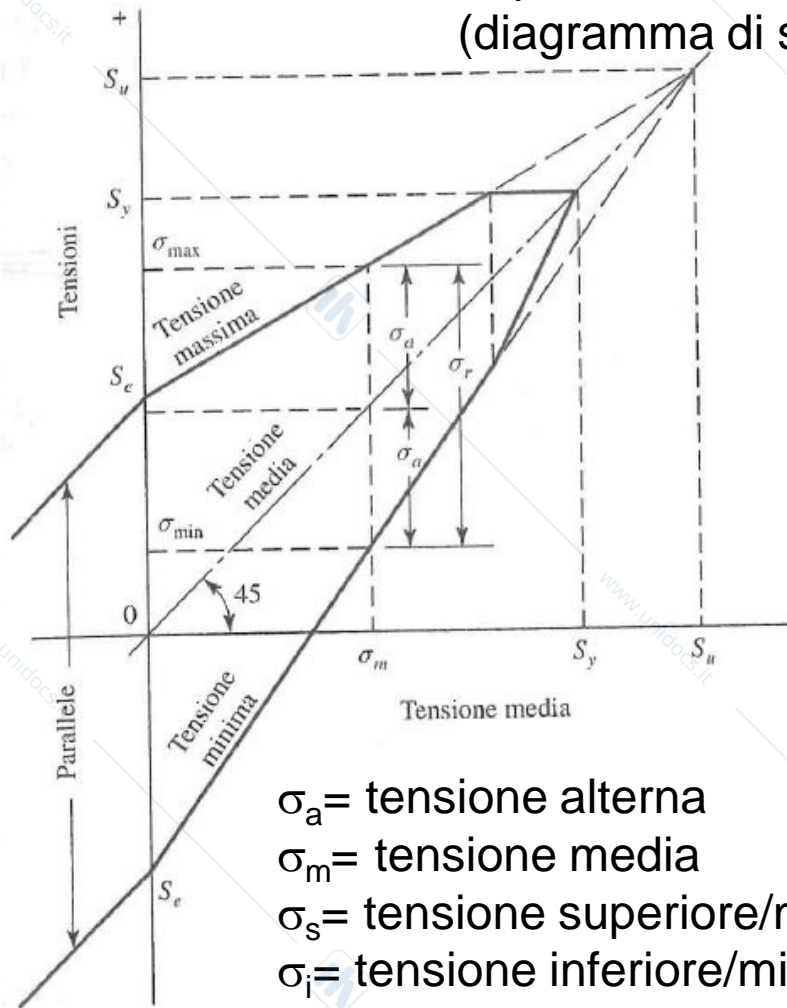
σ_a = tensione alterna
 σ_m = tensione media

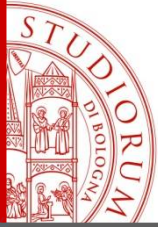


MOLLE ELICOIDALI

Comportamento a fatica: Diagramma di Goodman
(diagramma di sopravvivenza per data durata)

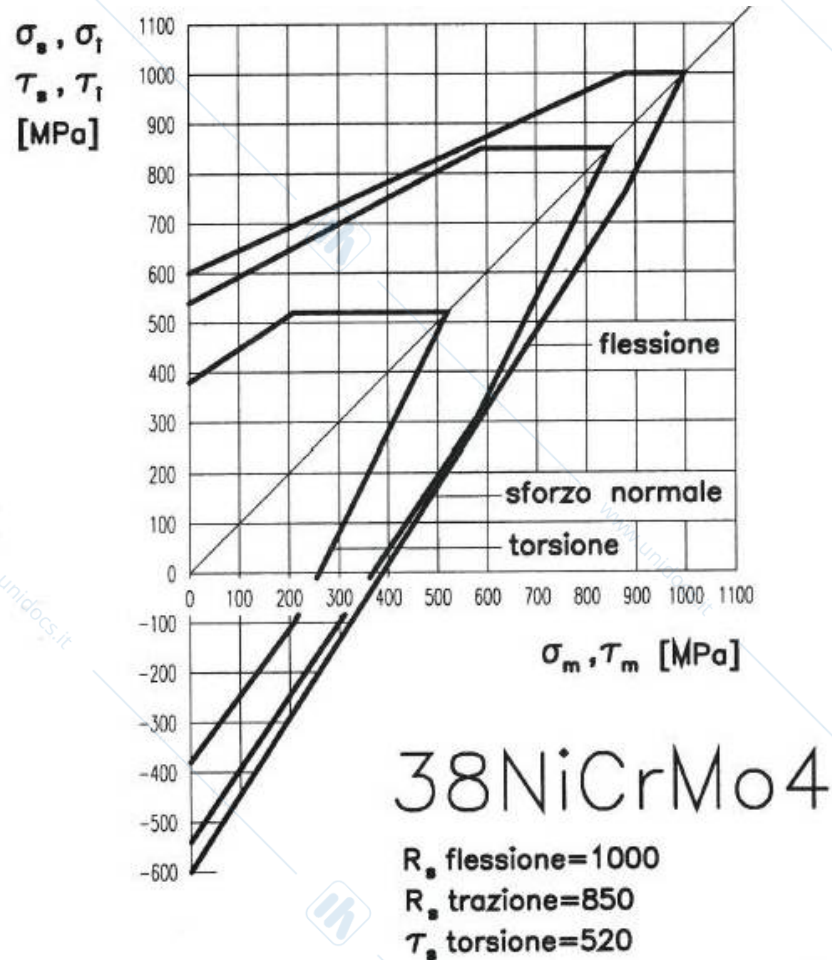
$S_n = S_e$ = tensione limite di fatica
 S_u = tensione ultima statica
 S_y = tensione di snervamento





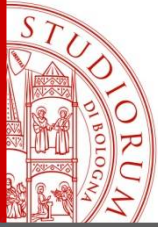
MOLLE ELICOIDALI

Comportamento a fatica: Diagramma di Goodman
(diagramma di sopravvivenza per durata infinita)



$S_y = R_s$ = tensione di snervamento

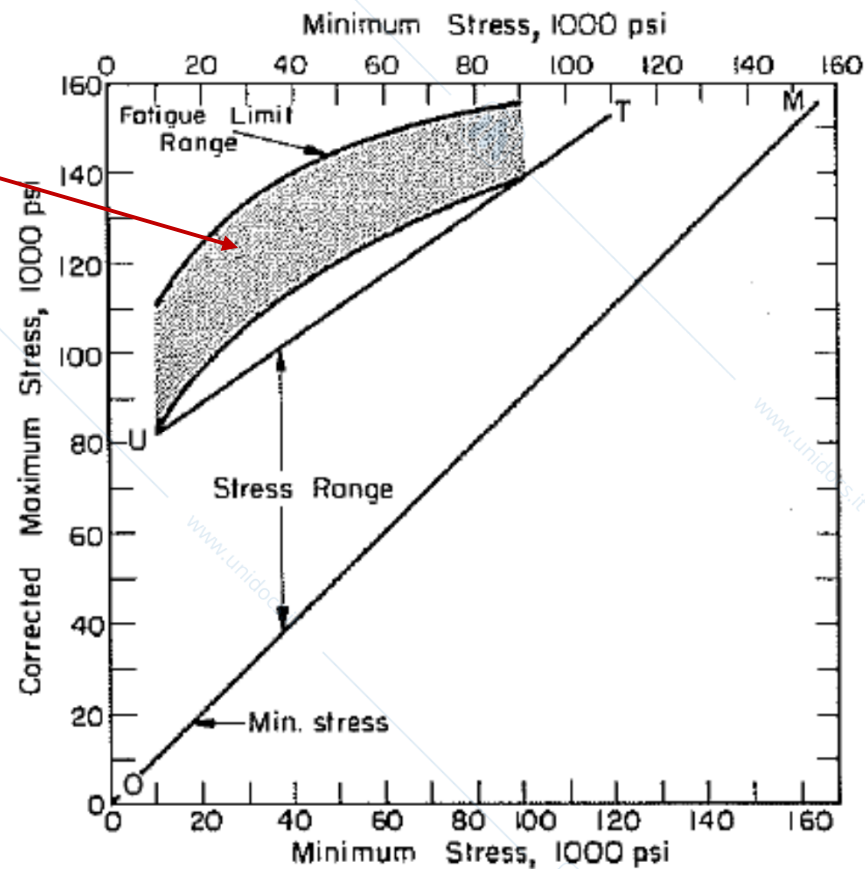
σ_s = tensione superiore
 σ_i = tensione inferiore
 σ_m = tensione media



MOLLE ELICOIDALI

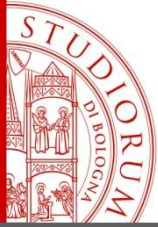
Dati sperimentali a vita infinita per un tipico acciaio per molle.

Notare la curvatura!



1000psi \approx 6,9MPa

Da: Wahl A. M. Mechanical Springs, 2nd Edition (1964), Ed. McGraw-Hill, New York (USA);



MOLLE ELICOIDALI

Sollecitazione dinamica: UNI EN 13906

per molle avvolte a caldo, fabbricate con acciaio di qualità speciale secondo il prEN 10089:2000, aventi superficie rettificata o tornita lucida e pallinate

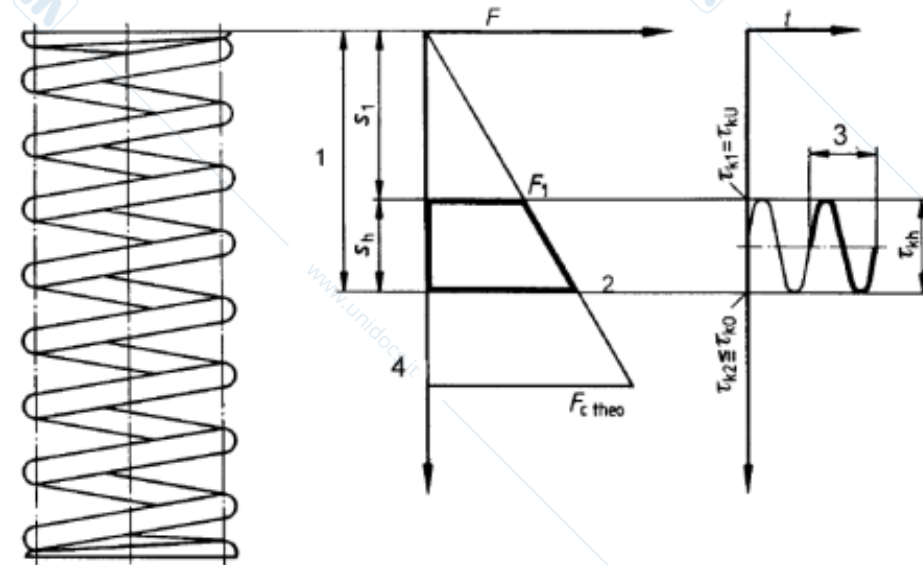
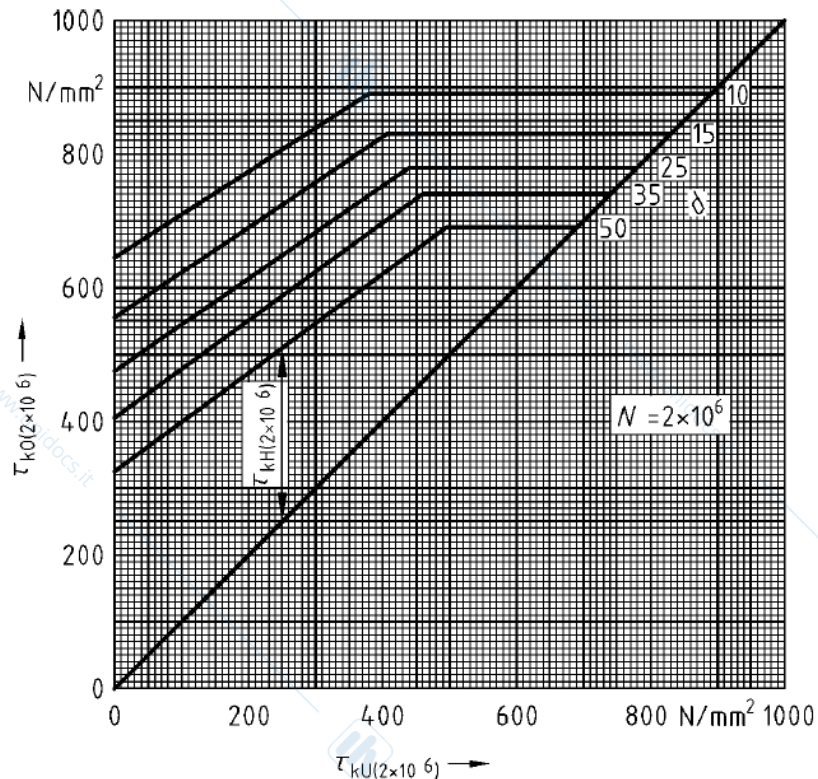
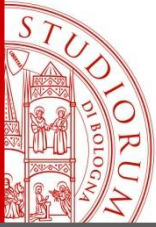


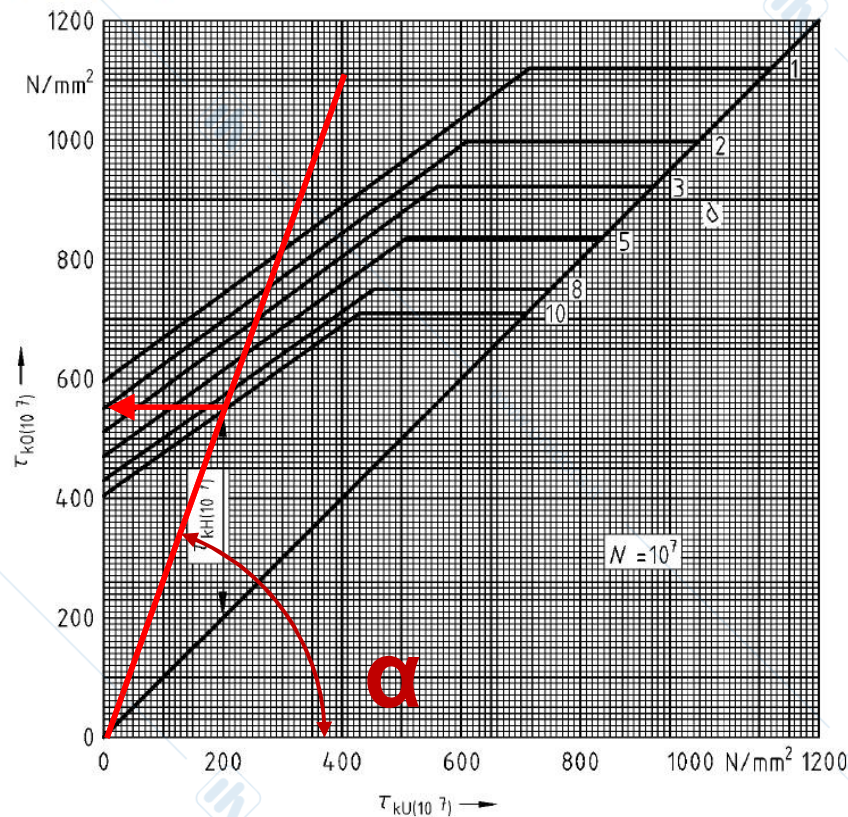
Diagramma di Goodman **modificato**
(tensione massima τ_{k0} , tensione minima τ_{kU})



MOLLE ELICOIDALI

Dimensionamento: UNI EN 13906

Diagramma di resistenza a fatica a durata infinita (diagramma di Goodman), per molle avvolte a freddo, fabbricate con filo di acciaio per molle patentato e trafilato di classe TD secondo la EN 10270-1:2001, pallinate



Pendenza retta di lavoro tra F_u (minima) e F_0 (massima)

$$\alpha = \arctan(F_0/F_u)$$

Esempio:

$$F_0 = 1400\text{N}; F_u = 400\text{N}; \omega = 6$$

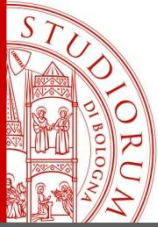
$$F_0/F_u = 3,5 \rightarrow \alpha = 74^\circ$$

Parto da $d = 10\text{mm}$:

$$\tau_{0_amm} = 500\text{MPa}$$

$$\tau_{u_amm} = 142\text{MPa}$$

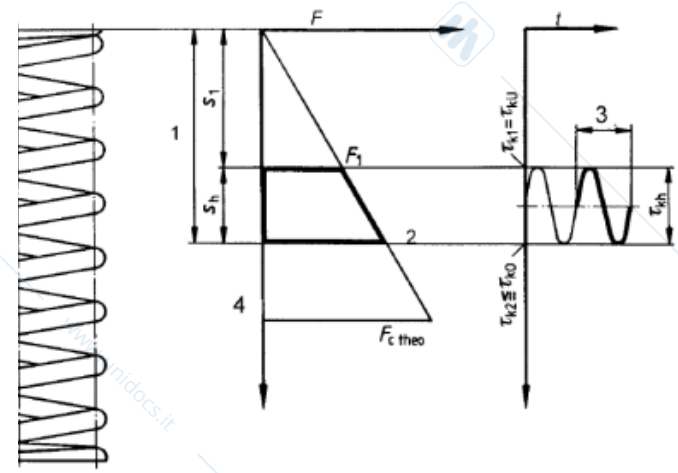
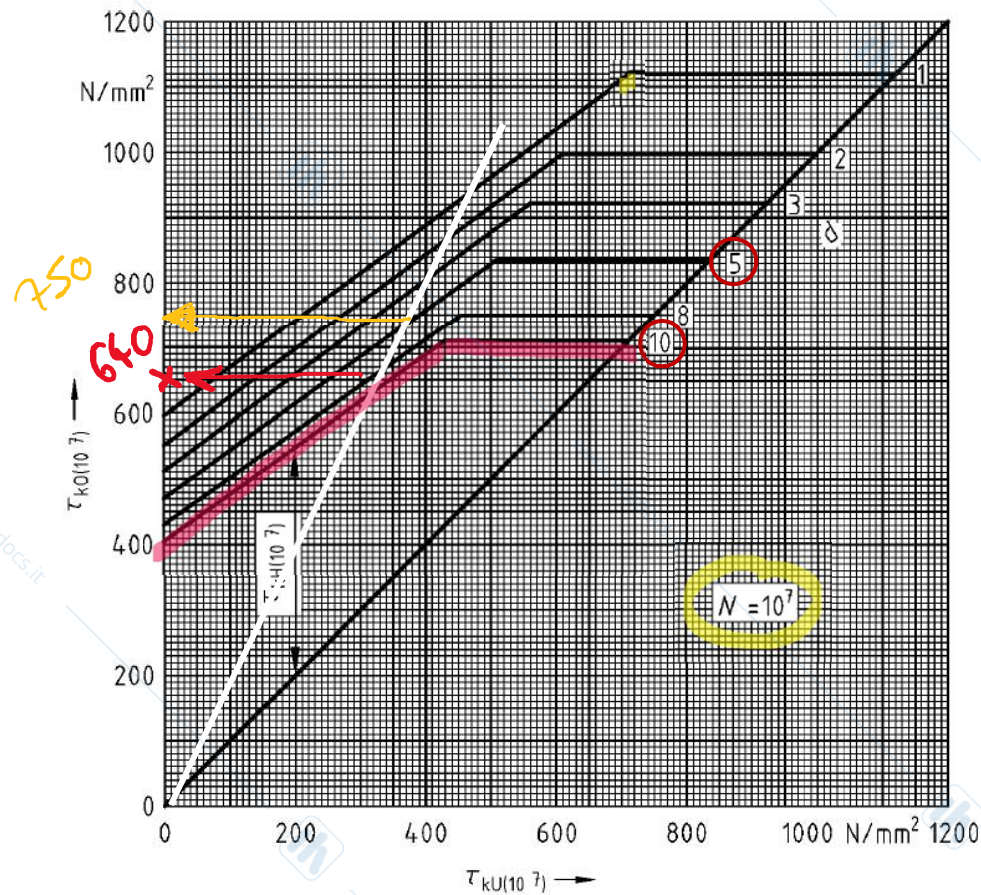
Calcolo il d_{eff} e aggiusto le tensioni ammissibili

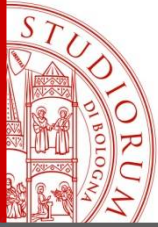


MOLLE ELICOIDALI

Esercizio di dimensionamento - molla per punteria

Diagramma di resistenza a fatica a durata infinita (diagramma di Goodman), per molle avvolte a freddo, fabbricate con filo di acciaio per molle patentato e trafilato di classe TD secondo la EN 10270-1:2001, pallinate





MOLLE ELICOIDALI

Il Presetting (o cold-setting):

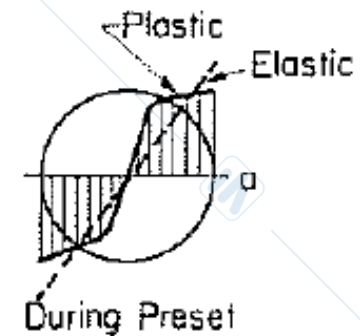
Si avvolge la molla con passo maggiore del necessario. Poi la si comprime, facendo plasticizzare le fibre esterne (generalmente si crea una deformazione residua pari al 10% della lunghezza libera della molla).



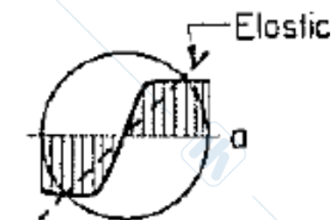
Scaricata la molla, rimangono tensioni residue.



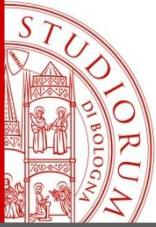
Le tensioni residue si sottraggono a quelle di lavoro.



(b) Residual (after preset)



(c) Loaded (after preset)



MOLLE ELICOIDALI

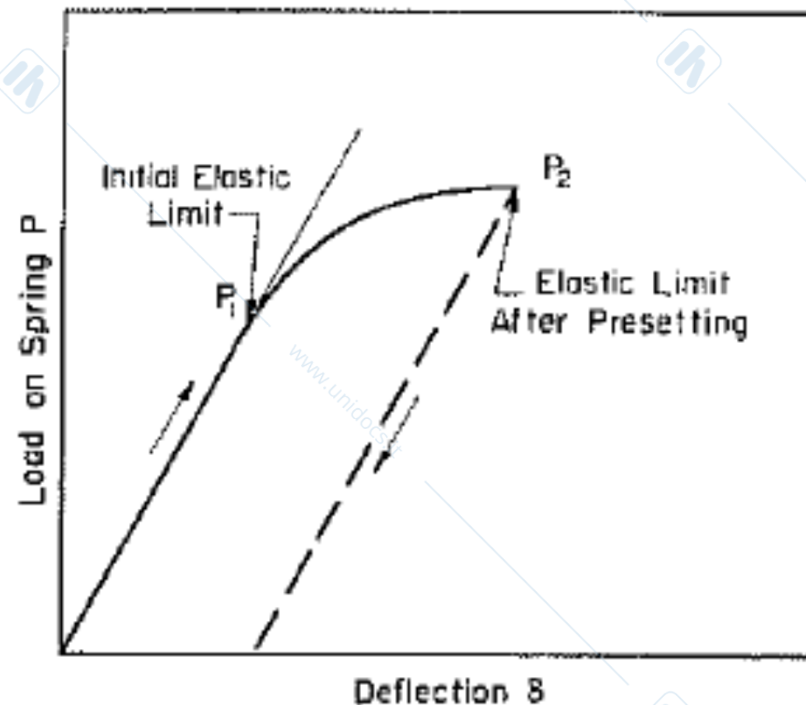
Il Presetting (o cold-setting):

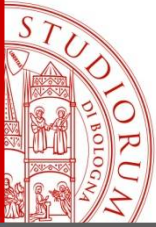
Vantaggi:

- tensioni risultanti di lavoro più basse

Svantaggi:

- costoso
- rilassamento: nel tempo la caratteristica elastica della molla può variare





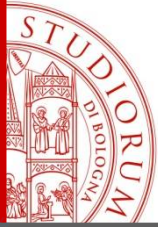
MOLLE ELICOIDALI

Pallinatura:

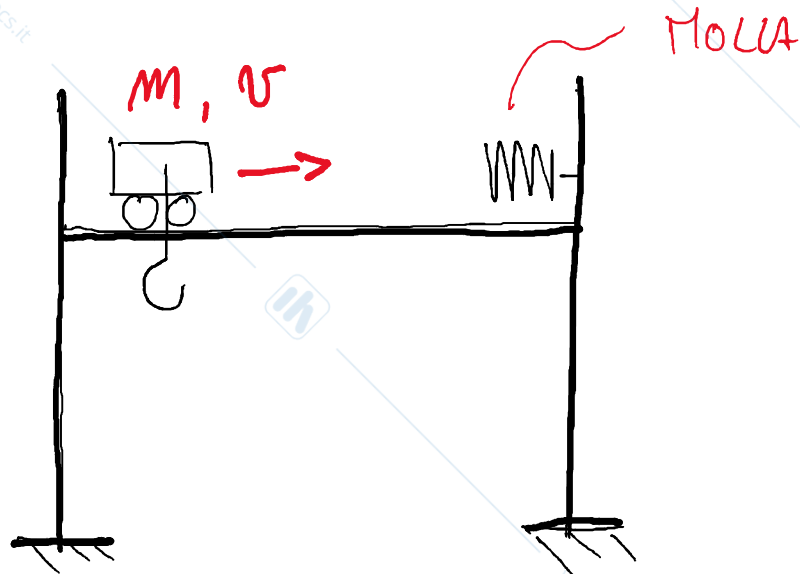
Il **trattamento di pallinatura** consiste in un martellamento superficiale, eseguito a freddo, per modificare le proprietà meccaniche dei metalli.

I pezzi da lavorare vengono trattati con un getto di granaglia formata da particelle sferiche in metallo, vetro o ceramica, gli urti di queste particelle creano una deformazione plastica superficiale.

La **pallinatura** di una superficie induce uno stato tensionale superficiale di compressione con la chiusura delle micro cricche superficiali (quando presenti)



ESERCIZIO 1



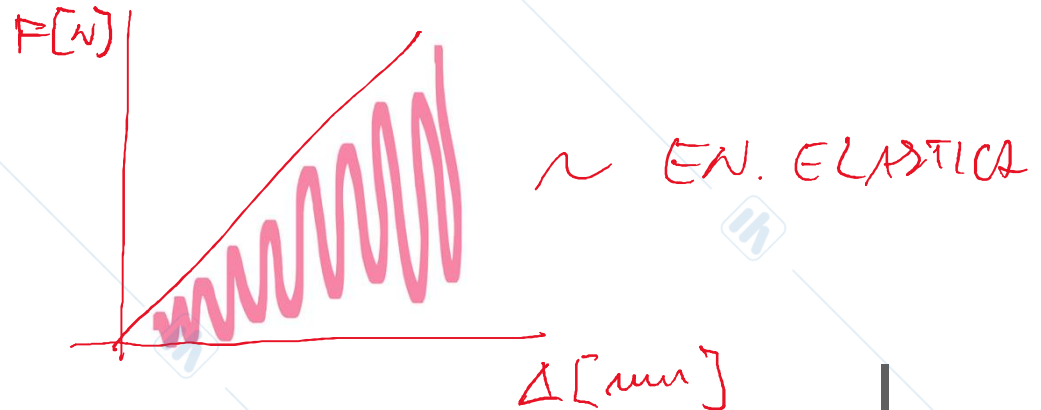
$$M = 15 \text{ t}$$
$$v = 1 \text{ m/s}$$

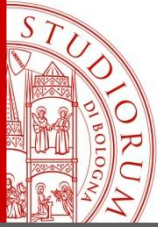
RICHIESTA : CORSA D'ARRESTO

$$\Delta = 500 \text{ mm}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} K \Delta^2$$

$$M v^2 = K \Delta^2$$





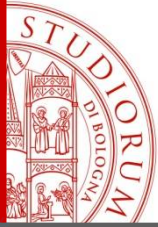
ESERCIZIO 1

$$k = m \left(\frac{v^2}{\Delta^2} \right) = m \left(\frac{v}{\Delta} \right)^2 = 15.000 \left(\frac{1}{0,5} \right)^2$$
$$= 60.000 \frac{N}{m} \rightarrow 60 \frac{N}{mm}$$

Hip: 2 MOLLE IN PARALLELO, $k_1 = k_2$

$$k_1 = \frac{k}{2} = 30 \frac{N}{mm}$$

$$F = k_1 \cdot \Delta = 30 \cdot 500 = 15.000 N$$



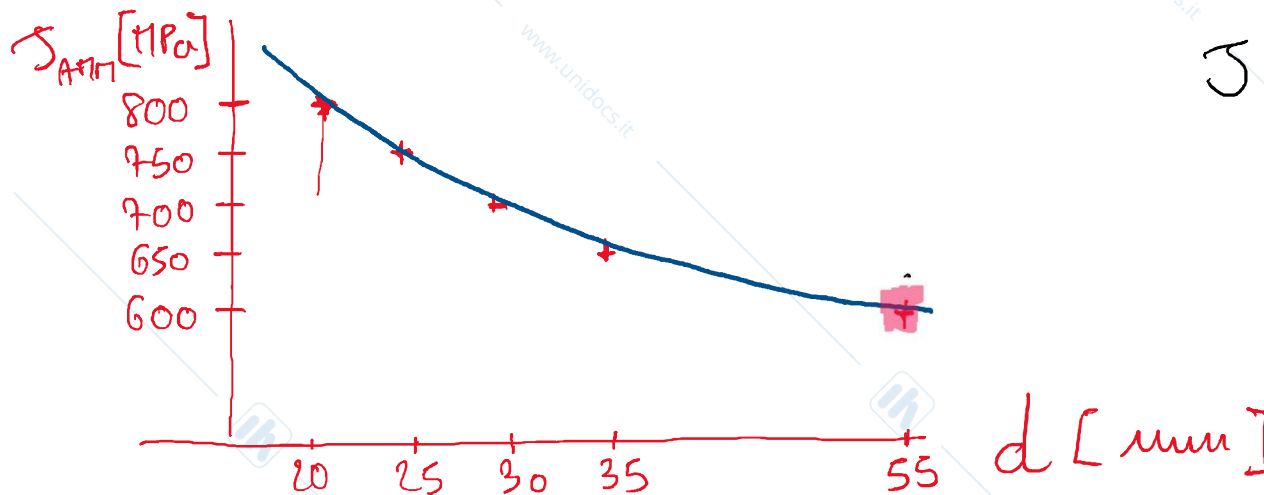
ESERCIZIO 1

H_p: SCELGO $\omega = 10$

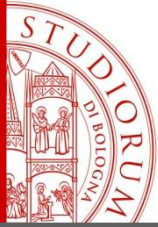
H_p: SCELGO UN FILO ANVUOTO A CARDO [Però $d \geq 10 \text{ mm}$]



TABELLA / GRAFICO S_{AMM} STATICHE



$$\tau = \frac{8FD}{\pi d^3}$$
$$= \frac{8F\omega}{\pi d^2}$$



ESERCIZIO 1

DITTEW SIONAMENTO (ITERATIVO)

$$1) \tau_{AMM-SS} = 600 \text{ MPa}$$

$$\tau_{AMM-SS} = \frac{8Fw}{\pi d^2}$$

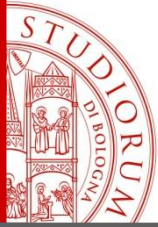
← EQ. DIMENSIONANTE

$$d_1 = \sqrt{\frac{8Fw}{\pi \tau_{AMM-SS}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 15'000 \cdot 40}{\pi \cdot 600}} \approx 25,2 \text{ mm}$$

25 mm

$$d_1 \ll 55 \text{ mm}$$

⇒ RIPETO IL CALCOLO



ESERCIZIO 1

$$2) \tau_{amm-25} = 750 \text{ MPa}$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{8 F \omega}{\pi \tau_{amm-25}}} = 22,6 \approx 23 \text{ mm}$$

$$d_2 \approx 25 \text{ mm}$$

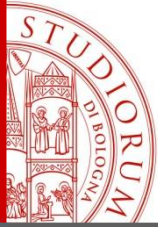
QUINDI INTERRUPO L'ITERAZIONE

$$d = 23 \text{ mm}$$

$$D = \omega d = 230 \text{ mm}$$



SCELGO

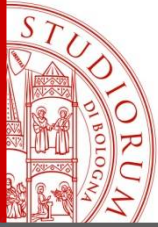


ESERCIZIO 1

DETERMINO IL NUMERO DI SPIRE ATTIVE \bar{i}
NECESSARIO A GARANTIRE $K = 30 \frac{N}{mm}$

$$K = \frac{Gd^4}{8D^3 \bar{i}} = \frac{Gd}{8\omega^3 \bar{i}}$$

$$\bar{i} = \frac{Gd}{8\omega^3 K} = \frac{80'000 \cdot 2^3}{8 \cdot 10^3 \cdot 30} = 7,7 \approx 8$$



ESERCIZIO 1

H_p : ESTREMITÀ CHIUSE E MOLATE

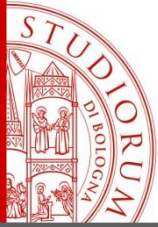
$$\bar{i}_{TOT} = \bar{i} + 2 = 10$$

CALCOLO L_{TOT} (LUNGHERZA LIBERA):

$$L_{TOT} = L_{PACCO} + \Delta + \underline{0,2 - \bar{i} - d}$$

Per evitare l'impacchettamento

Δ_{EFF}



ESERCIZIO 1

$$K_{EFF} = \frac{G d}{8 \omega^3 i} = \frac{80000 \cdot 23}{8 \cdot 10^3 \cdot 8} = \frac{10}{8 \cdot 8}$$

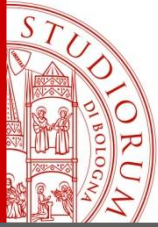
$$= \frac{230}{8} = 28,75$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot K_{teor} \cdot \Delta^2 = \frac{1}{2} \cdot K_{eff} \cdot \Delta_{eff}^2$$

$$\Delta_{eff} = \sqrt{\frac{K_{teor} \cdot \Delta^2}{K_{eff}}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 500^2}{28,75}} = 511 \text{ mm}$$

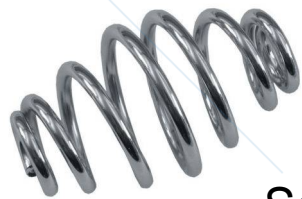
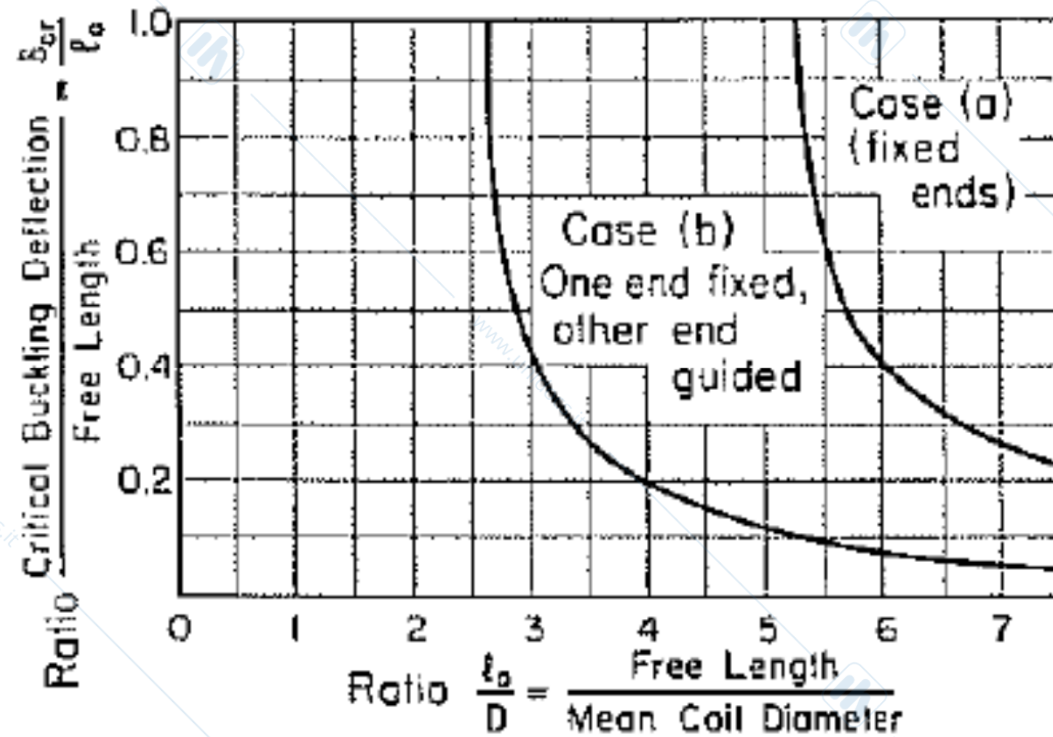
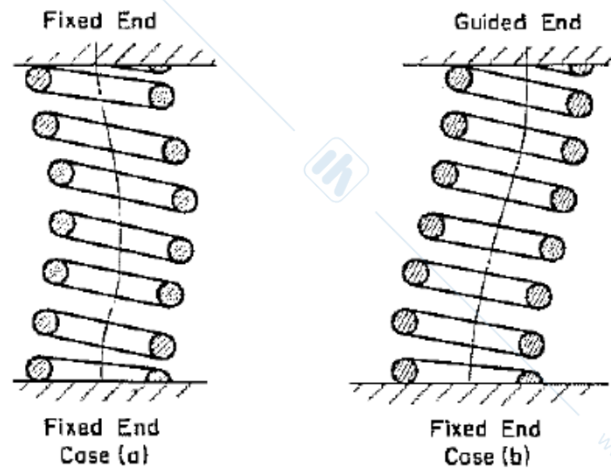
$$F_{\text{max. eff}} = \Delta_{eff} \cdot K_{eff} = 14663 \text{ N}$$

$$L = i_{\text{tot}} \cdot d + \Delta_{eff} + 0,2 \cdot i \cdot d = 230 + 511 + 36,8 = 777,8 \text{ mm}$$

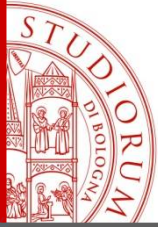


MOLLE ELICOIDALI

Instabilità a compressione (buckling):



Soluzione a botte (più stabile)



ESERCIZIO 1

VERIFICA AD INSTABILITÀ:

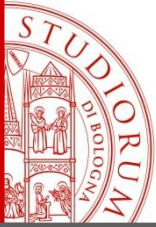
SCELTA $\lambda = \frac{L_{TOT}}{D} = \frac{777,8}{230} \approx 3,38$

H_f: CURVA "b" GUIDATA SOLO DA UN LATO

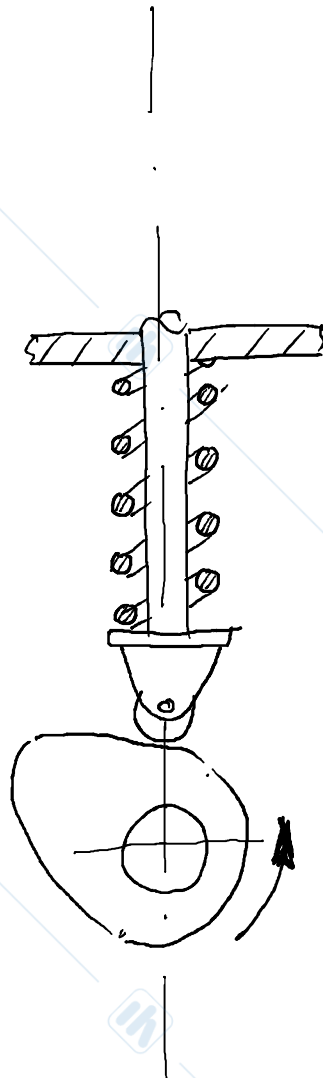
$\Rightarrow \frac{\delta_{CR}}{L_{TOT}} = 0,25 \Rightarrow \delta_{CR} = 0,25 \cdot 777,8 = 194,5$

$\Delta_{EFF} > \delta_{CR}$!

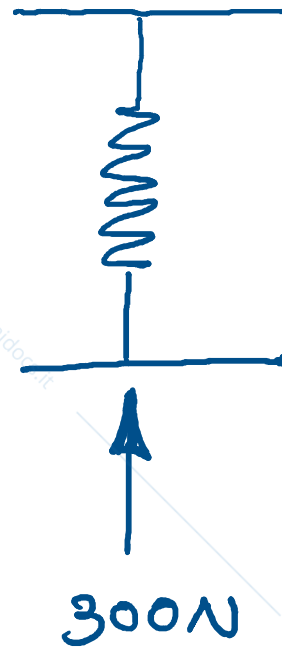
DEVO CAMBIARE VINCOLAMENTO
 \Rightarrow CON CURVA "a", $\lambda = 3,4 \Rightarrow$ OK



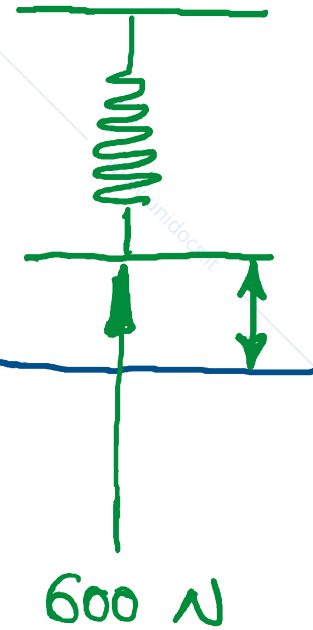
ESERCIZIO 2



PRECARICO



CORSA
MAX



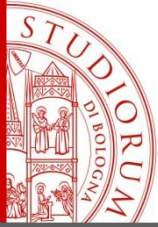
80/99 52 wk/y

10 y

$M = 300 \text{ N/mm}$

$\delta = 25 \text{ mm}$

C.S. = 1



ESERCIZIO 2

$$M_{\text{tot}} = 300 \cdot 60 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 52 \cdot 10 = 3,6 \cdot 10^7 \text{ CICLI}$$

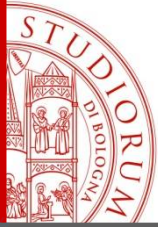
UNITÀ INFINITA

$$K = \frac{F}{\Delta} \rightarrow K = \frac{600 - 300}{25} = \frac{300}{25} = 12 \text{ N/mm}$$

$$\underline{Mh}: \quad \omega = 7$$

$$L \rightarrow K_w = \frac{4\omega - 1}{4\omega - 4} + \frac{0,615}{\omega} \approx 1,2$$

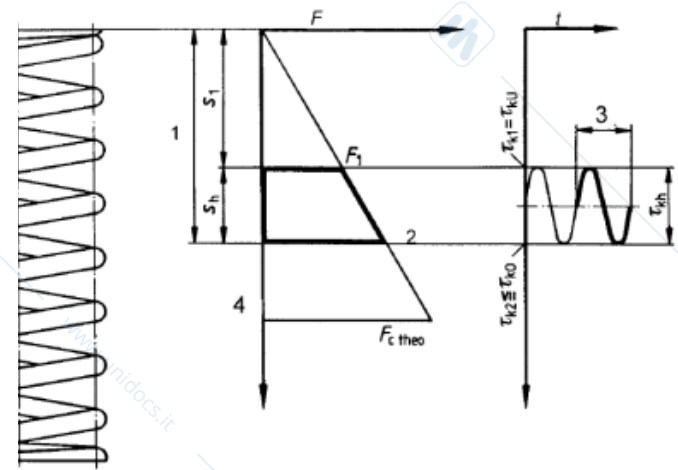
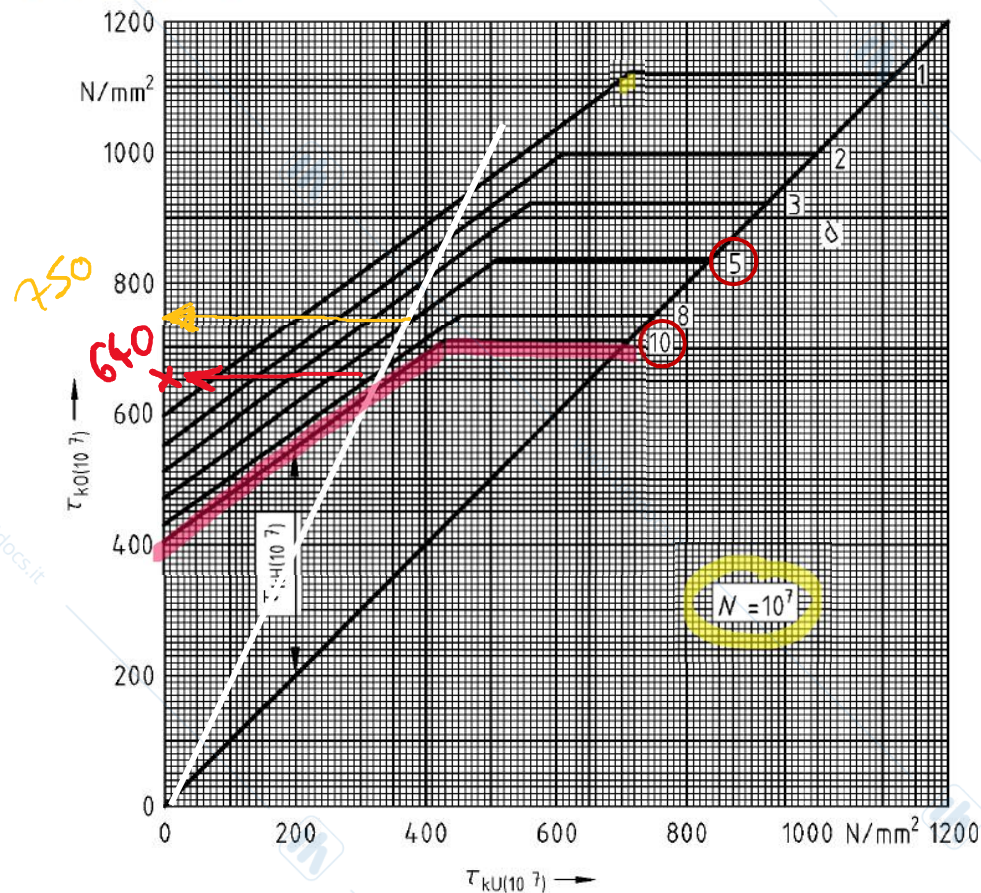
$$R = \frac{F_0}{F_c} = \frac{600}{300} = 2$$

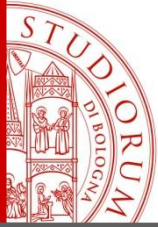


MOLLE ELICOIDALI

Esercizio di dimensionamento - molla per punteria

Diagramma di resistenza a fatica a durata infinita (diagramma di Goodman), per molle avvolte a freddo, fabbricate con filo di acciaio per molle patentato e trafilato di classe TD secondo la EN 10270-1:2001, pallinate





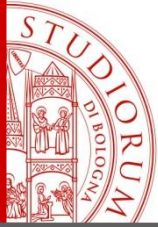
ESERCIZIO 2

1^a ITERAZIONE FILO $d = 10 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_{K01} = 640 \text{ MPa}$

$$\sigma_0 = \frac{8 F_0 D}{\pi d^3} \cdot K_w = \frac{8 F_0 \omega}{\pi d^2} \cdot K_w$$

$$\sigma_0 = \sigma_{K01} = \frac{8 F_0 \omega}{\pi d^2} \cdot K_w$$

$$d_{1-MW} = \sqrt{\frac{8 F_0 \omega}{\pi \sigma_{K01}} \cdot K_w} = \sqrt{\frac{8 \cdot 600 \cdot 7}{\pi \cdot 640} \cdot 1,2} \cong 4,5 \mu$$



ESERCIZIO 2

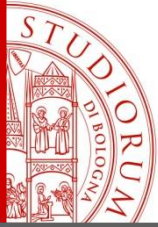
$$d_{min-1} = 4,5 \ll 10 \text{ mm} \rightarrow \text{ITERO}$$

2^a ITERAZIONE $\sigma_{koz} = 750 \text{ MPa}$

$$d_{min-2} = \sqrt{\frac{8 F_0 \omega}{\pi \sigma_{koz}} \cdot K_w} = \sqrt{\frac{8 \cdot 600 \cdot 7}{\pi \cdot 750} \cdot 1,2} =$$

$$= 4,15 \text{ mm}$$

\Rightarrow SCEGLIO FLO $d = 4,2 \text{ mm}$



ESERCIZIO 2

$$d = 4,2 \text{ mm}$$

$$D = \omega d = 7 \cdot 4,2 = 29,4 \text{ mm}$$

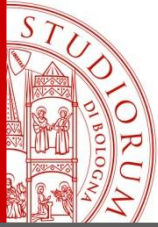
DETERMINO "i" PER GARANTIRE $K = 12 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

$$K = \frac{G d^4}{8 D^3 i} = \frac{G d}{8 \omega^3 i}$$

ACCIAIO

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$i = \frac{G d}{8 \omega^3 K} \approx 9,8 \rightarrow \text{SCELGO } i = 10$$



ESERCIZIO 2

CALCOLO L MOLLA

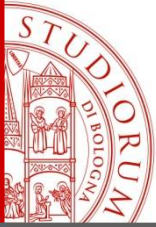
$$L = \dot{\lambda}_{TOT} \cdot d + \delta_{TOT} + 0,2 \cdot d \cdot i$$

PRE + LAV

Hip: ESTREMITA' CHIUSE E MOLATE $\dot{\lambda}_{TOT} = \dot{\lambda} + 2$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}_{TOT} = 10 + 2 = 12$$

$$L = 12 \cdot 4,2 + 50 + 0,2 \cdot 10 \cdot 4,2 = 108,8 \text{ mm}$$



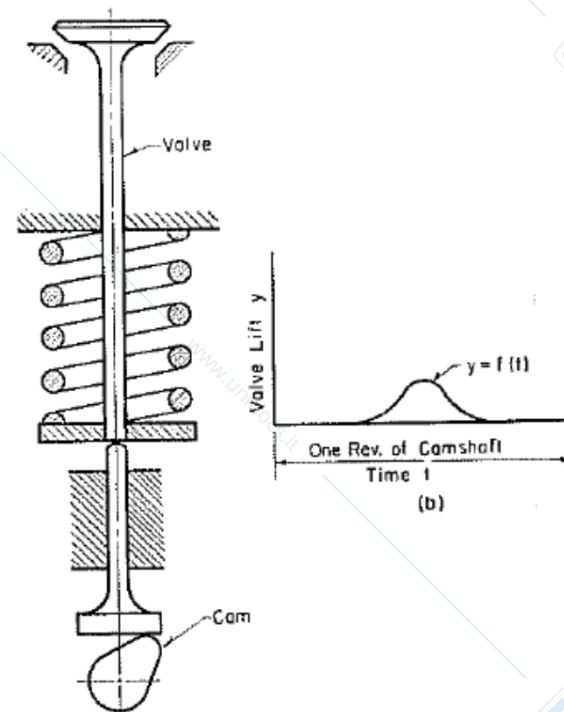
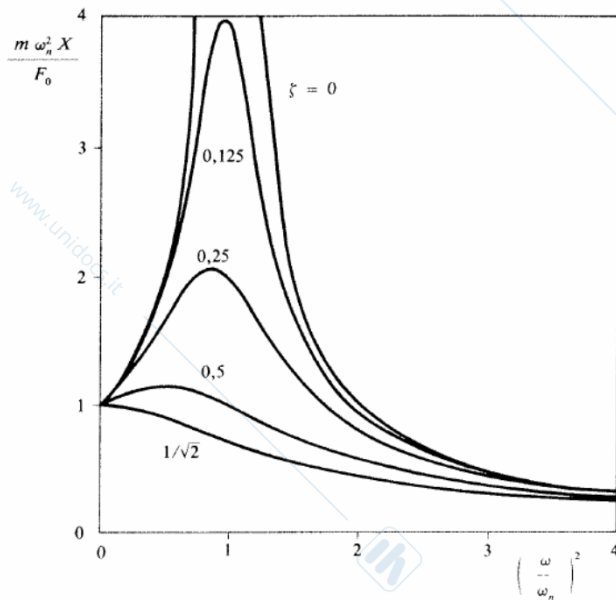
MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

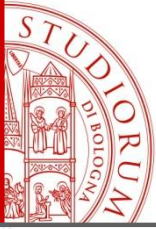
Esempio molla richiamo valvola.

$$y = f(t) = c_0 + c_1 \text{sen}(\omega t + \phi) + c_2 \text{sen}(2\omega t + \phi) + \dots$$

↑ fondamentale ↑ ordine superiore



E' necessario evitare che la frequenza della forzante coincida con una delle frequenze naturali di oscillazione della molla.



MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

Calcolo dei modi propri di vibrare della molla.

$$f_1 = \frac{d}{\pi D^2 i} \cdot \sqrt{\frac{G}{8\rho}} \quad \text{I modo proprio}$$

Dimostrazione:

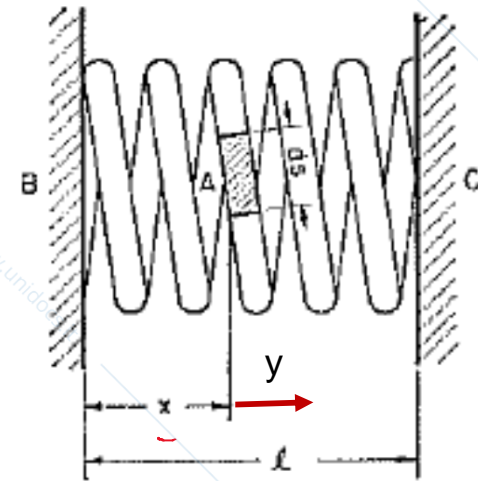
Hp: molla appoggiata alle estremità B e C, lunghezza libera L.

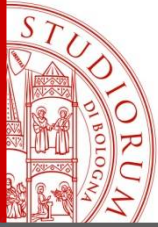
Isolo elemento A, di lunghezza ds , distante x da B.

y è lo spostamento dell'elemento A dalla sua posizione a riposo.

$$m = \frac{\pi d^2}{4} \cdot ds \cdot \frac{\gamma}{g} \quad \gamma = \frac{N}{mm^3}$$

$$F_a = ma = \frac{\pi d^2}{4} \cdot ds \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{Forza d'inerzia dell'elemento lungo } y:$$





MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

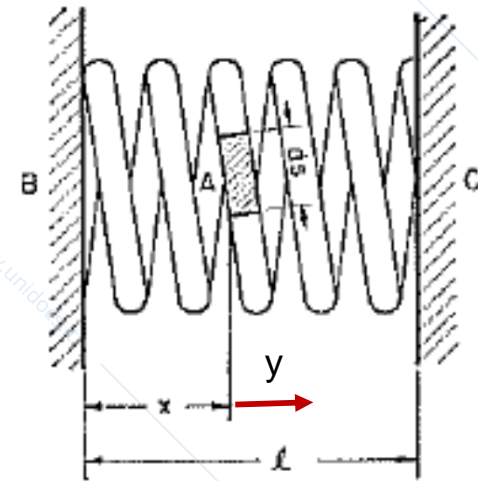
L'elemento A non subisce ovunque lo stesso spostamento, ma y varia con l'ascissa curvilinea s :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot ds$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \pi D \quad \text{per una spira intera}$$

Per una spira completa, a distanza x da **B**, la forza elastica vale:

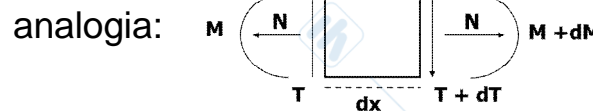
$$P = k\Delta y = \left[\frac{Gd^4}{8D^3} \right] \cdot \pi D \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\pi Gd^4}{8D^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad (*) \text{ SINGOLA SPIRA}$$



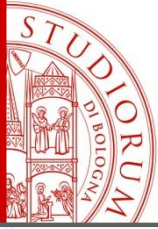
Lungo l'elementino **A**, di lunghezza ds , la variazione di **P** sarà:

$$F_b = \frac{\partial P}{\partial s} \cdot ds = \frac{\pi Gd^4}{8D^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \cdot ds$$

che è la forza che fa accelerare l'elementino **A**



$$\frac{dT}{dx} = -q$$



MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

Sono presenti anche componenti smorzanti, come ad esempio:

- attrito dell'aria <<
- isteresi del materiale
- attrito nelle terminazioni >>

Si ipotizza che siano tutte proporzionali alla **velocità**.

$$F_d = c' \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot ds$$

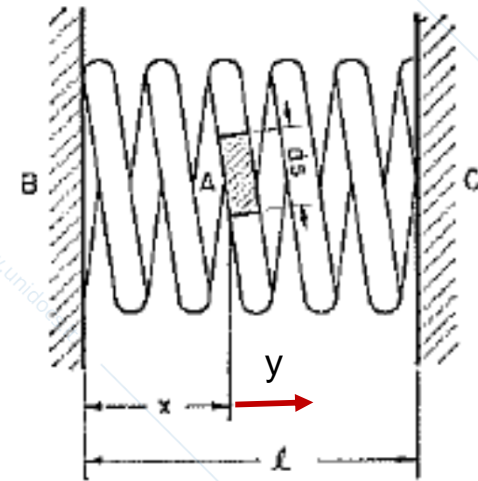
c' = forza smorzante per unità di lunghezza e per unità di velocità

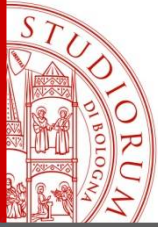
F_d ha segno opposto a F_b , in quanto tende a frenare l'elemento:

$$F_a = F_b - F_d \quad \text{equilibrio}$$

Sostituendo i valori:

$$\frac{\pi d^2 \gamma}{4g} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot ds = \frac{\pi G d^4}{8D^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \cdot ds - c' \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot ds$$





MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

Dopo opportune sostituzioni si ha:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2b \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Equazione differenziale per vibrazione libera smorzata della molla.

$$s = \frac{\pi D \cdot i \cdot x}{l} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{l}{\pi D i} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \frac{l^2}{\pi^2 D^2 i^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

In cui:

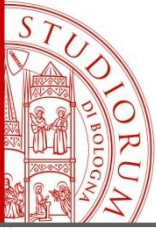
$$a = l \sqrt{\frac{k \cdot g}{W}}$$

$$b = \frac{\pi D i \cdot c' \cdot g}{2W}$$

smorzamento equivalente della molla -> dipende da materiale, spire attive, forma terminazioni ecc.. **SI DETERMINA SPERIMENTALMENTE**

$$W = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \pi D i \cdot \gamma$$

Forza peso spire attive [N]



MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

In assenza di smorzamento (quasi sempre nella pratica) si ha $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, quindi:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Equazione differenziale per vibrazione libera della molla.

Per integrarla e trovare la legge di moto, si ipotizza che y sia esprimibile come prodotto di due funzioni, una dipendente solo dal tempo t , l'altra solo dalla posizione x :

$$y(t, x) = \psi(t) \cdot \varphi(x)$$

$$Y = \psi \cdot \varphi(x)$$

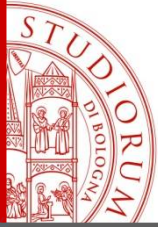
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \psi \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$$

Differenziando e sostituendo:

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{\varphi} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \psi \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}$$

Che ha soluzione solo se entrambi i membri sono uguali ad una costante, che chiamiamo $-\omega^2$.



MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

Si ottengono quindi le due equazioni:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega^2 \psi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2 \varphi}{a^2} = 0$$

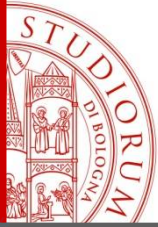
Equazioni differenziali di II ordine, che hanno soluzioni nelle forme:

$$\psi(t) = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$$

$$\varphi(x) = A_2 \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) + B_2 \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right)$$

Quindi:

$$y(t, x) = \left[A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) \right] \cdot \left[A_2 \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) + B_2 \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right) \right]$$



MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

Poiché le estremità sono vincolate:

$$y|_{x=0} = 0$$

$$y|_{x=l} = 0$$

Dalla prima deriva:

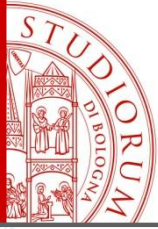
$$B_2 = 0$$

Mentre dalla seconda:

$$A_2 = 0$$
$$\frac{\omega l}{a} = z\pi$$

Soluzione banale, implicherebbe non dipendenza dalla posizione.

Con z intero.



MOLLE ELICOIDALI

Problemi di vibrazione (modi propri e risonanza):

Quindi le frequenze naturali della molla valgono:

$$\omega = \frac{\pi a}{l}; \frac{2\pi a}{l}; \frac{3\pi a}{l} \dots$$

Esprimendo la frequenza naturale in cicli/s anziché in radianti/s (più utile nella pratica), si ha:

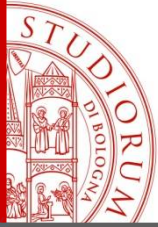
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{z}{2} \cdot \sqrt{\frac{k \cdot g}{W}}$$

Sostituendo e semplificando, per $z=1$ si ottiene la prima frequenza naturale:

$$f_1[\text{Hz}] = \frac{d}{\pi D^2 i} \cdot \sqrt{\frac{10^3 \cdot G}{8\rho}}$$

$$G[\text{N} / \text{mm}^2]$$

$$\rho[\text{kg} / \text{mm}^3]$$



MOLLE ELICOIDALI

Esempio: frequenze naturali di oscillazione

$$d = 5\text{mm}$$

$$D = 40\text{mm}$$

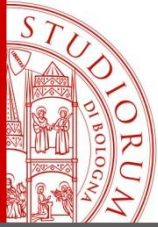
$$\omega = 8$$

$$G = 77000\text{MPa}$$

$$i = 6,5$$

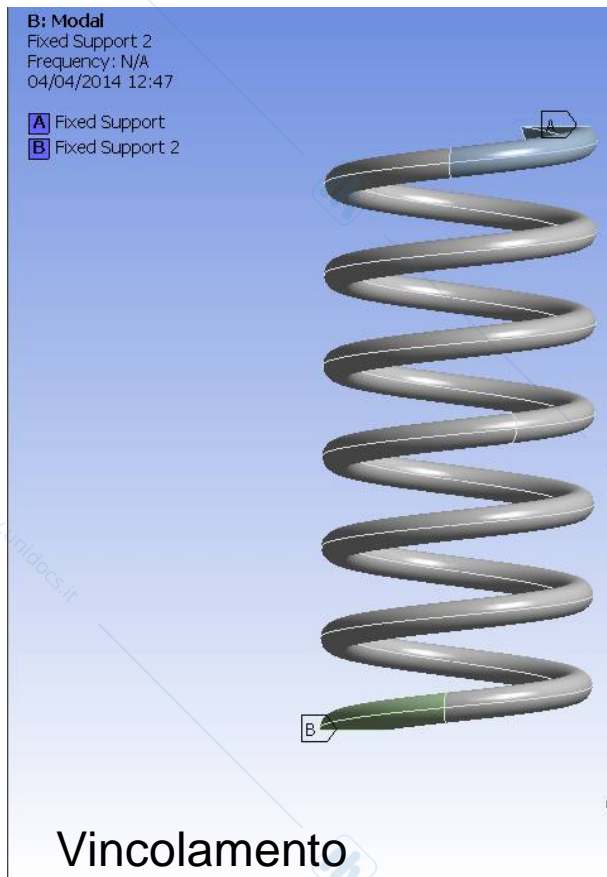
$$\rho = 7,85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$$

$$f_1[\text{Hz}] = \frac{d}{\pi D^2 i} \cdot \sqrt{\frac{10^3 \cdot G}{8 \rho}} = \frac{5}{\pi \cdot 40^2 \cdot 6,5} \cdot \sqrt{\frac{10^3 \cdot 77000}{8 \cdot 7,85 \cdot 10^{-6}}} = 169,45\text{Hz}$$

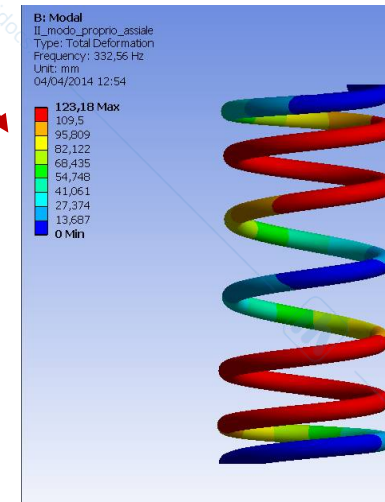
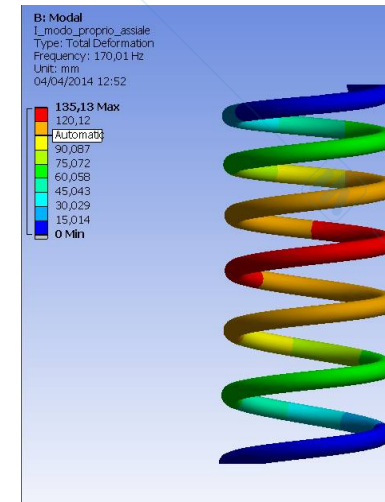


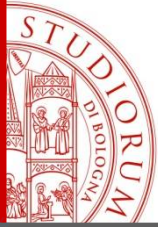
MOLLE ELICOIDALI

Esempio: confronto con modello numerico FEM



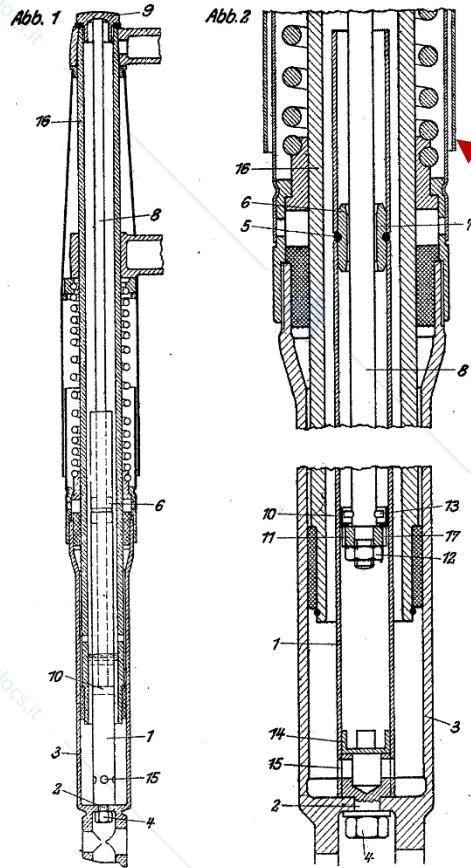
MODE (HERTZ)	FREQUENCY
1	170.0143478703
2	180.5298739193
3	185.7347788076
4	196.5027311749
5	332.5647730258
6	349.8024881540
7	369.1567865261
8	384.8306305906
9	476.7132161450
10	517.2645616248
11	540.6070678677
12	548.3505928899



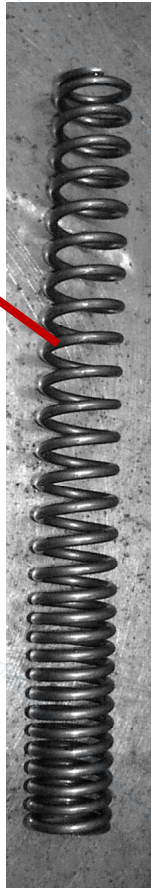


MOLLE ELICOIDALI

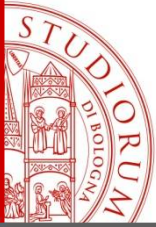
Zu der Patentschrift 675 926
Kl. 63h Gr. 2or



molla per forcella teleidraulica



molla per forcella 'monospring'



ESAME DI COSTRUZIONE DI MACCHINE M

Esercizio 1

28 gennaio 2020

Il forcellone motociclistico rappresentato in Figura ruota rispetto al fulcro **O**, ed è dotato di un ammortizzatore il cui elemento elastico è una molla elicoidale. A riposo, le quote caratteristiche del cinematismo valgono **OA=400mm**, **OB=600mm**, **OC=350mm**, $\alpha=40^\circ$. In questa condizione la molla deve esercitare una forza di precarico pari a F_0 . Quando il perno ruota **B** si sposta verticalmente di $\delta=120\text{mm}$ si desidera che la molla eserciti una forza pari a F_1 . La molla è realizzata con un acciaio avente limite di snervamento $S_y=1900\text{MPa}$ e si impone un rapporto di avvolgimento $\omega=7$. Lavorando con un coefficiente di sicurezza $CS=1.5$, si richiede di determinare: (i) la rigidezza **K** della molla, (ii) il diametro del filo **d**, il diametro d'avvolgimento **D** ed il numero di spire attive **i**, (iii) la corsa di precarico della molla, (iv) la lunghezza a riposo **h** della molla, ipotizzando terminazioni chiuse e molate, (v) la prima frequenza naturale f_1 della molla (vi) il disegno costruttivo della molla.

(si trascurino gli effetti dovuti alla fatica)

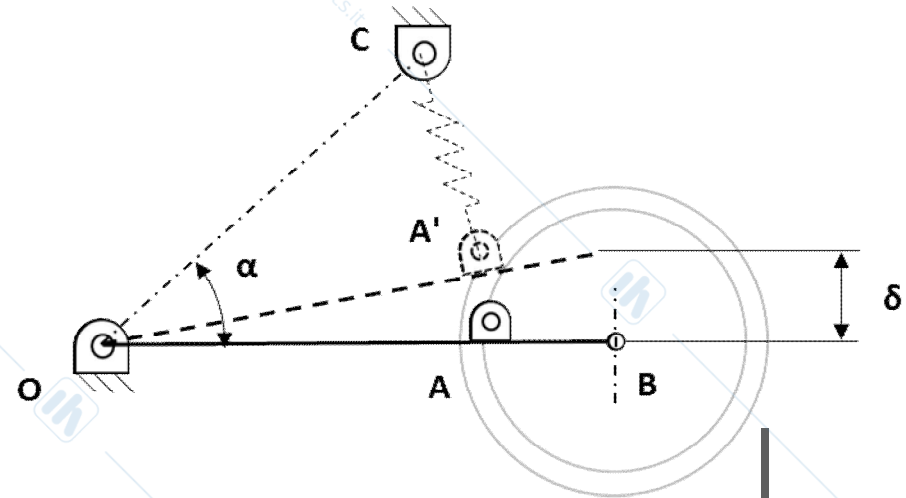
$$F_0=1500\text{N}$$

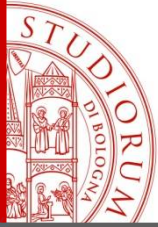
$$F_1=4500\text{N}$$

I_p :

$$E=200.000\text{ Mpa}$$

$$\nu=0,29$$

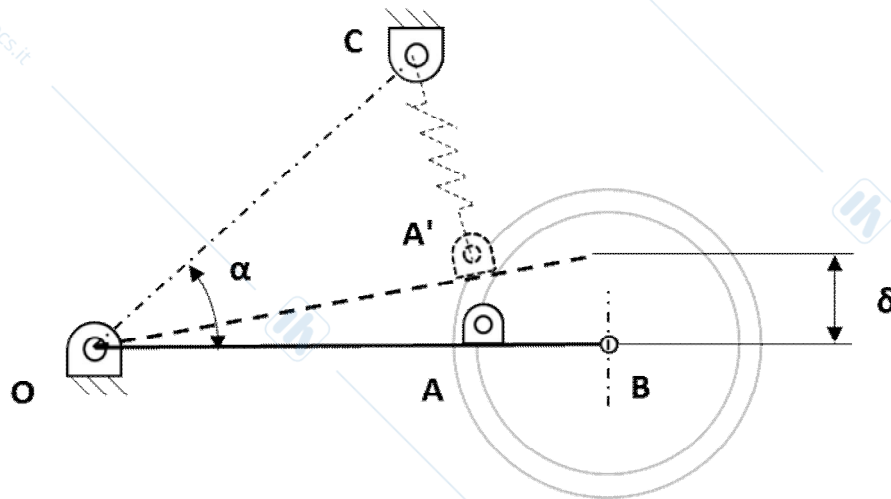




ESAME DI COSTRUZIONE DI MACCHINE M

Esercizio 1

28 gennaio 2020



lunghezza ammortizzatore a riposo AC:
(teorema di Carnot o del coseno)

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos(\alpha)}$$

$$AC = 260,8 \text{ mm}$$

angolo compressione forcellone β :

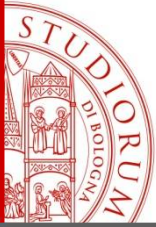
$$\beta = \arcsen\left(\frac{OB}{\delta}\right) = 11,5^\circ$$

lunghezza ammortizzatore compresso A'C:

(teorema di Carnot o del coseno)

$$A'C = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos(\alpha - \beta)}$$

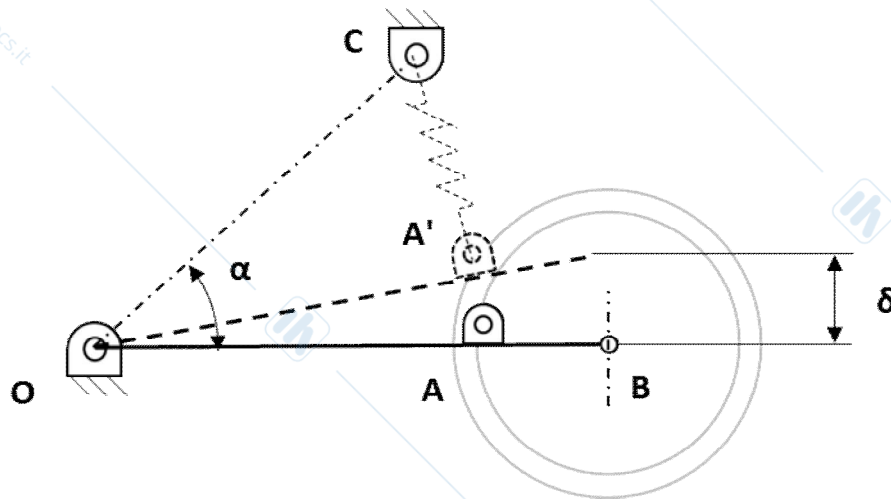
$$A'C = 190,6 \text{ mm}$$



ESAME DI COSTRUZIONE DI MACCHINE M

Esercizio 1

28 gennaio 2020



Corsa della molla:

$$C = AC - A'C = 260,8 - 190,6 = 70,2 \text{ mm}$$

Rigidezza della molla:

$$K = \frac{(F_1 - F_0)}{C} = 42,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Diametro del filo minimo:

$$d = \frac{8F_1\omega}{\pi\tau_{amm}} = \frac{8 \cdot 4500 \cdot 7}{\pi \cdot 731,3} = 10,47 \text{ mm} \cong 10,5$$

Numero di spire utili:

$$i = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot K \cdot D^3} = 6,94 \cong 7$$

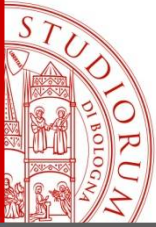
*Numero di spire totali
con estremità chiuse e
molate: 9*

Diametro avvolgimento:

$$D = \omega \cdot d = 73,5 \text{ mm}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77519 \text{ MPa}$$

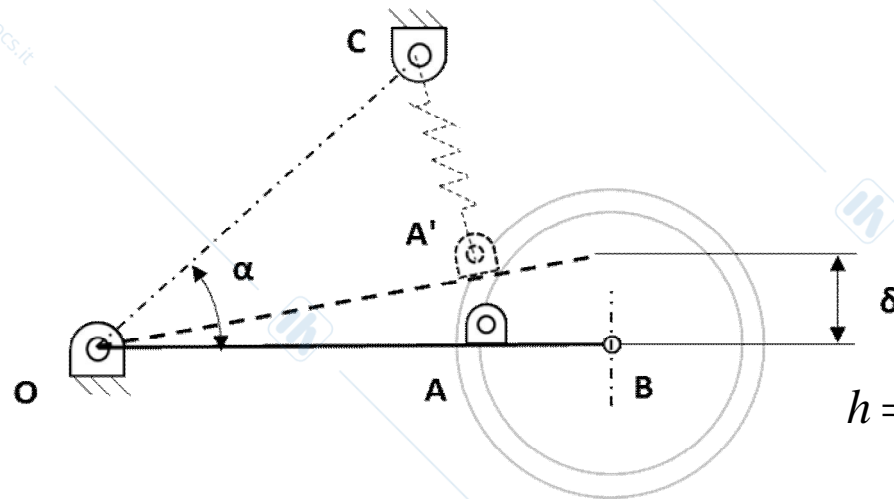
$$\tau_{amm} = \frac{\sigma_{amm}}{\sqrt{3}} = \frac{S_y}{CS \cdot \sqrt{3}}$$



ESAME DI COSTRUZIONE DI MACCHINE M

Esercizio 1

28 gennaio 2020



Corsa di precarico della molla:

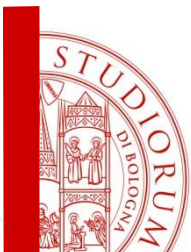
$$C_0 = \frac{F_0}{K} = 35,1 \text{ mm}$$

Lunghezza a riposo della molla:

$$h = i_{tot} \cdot d + C + C_0 + i_{tot} \cdot 0,2 \cdot d = 218,7 \text{ mm}$$

Prima frequenza propria della molla f_1 :

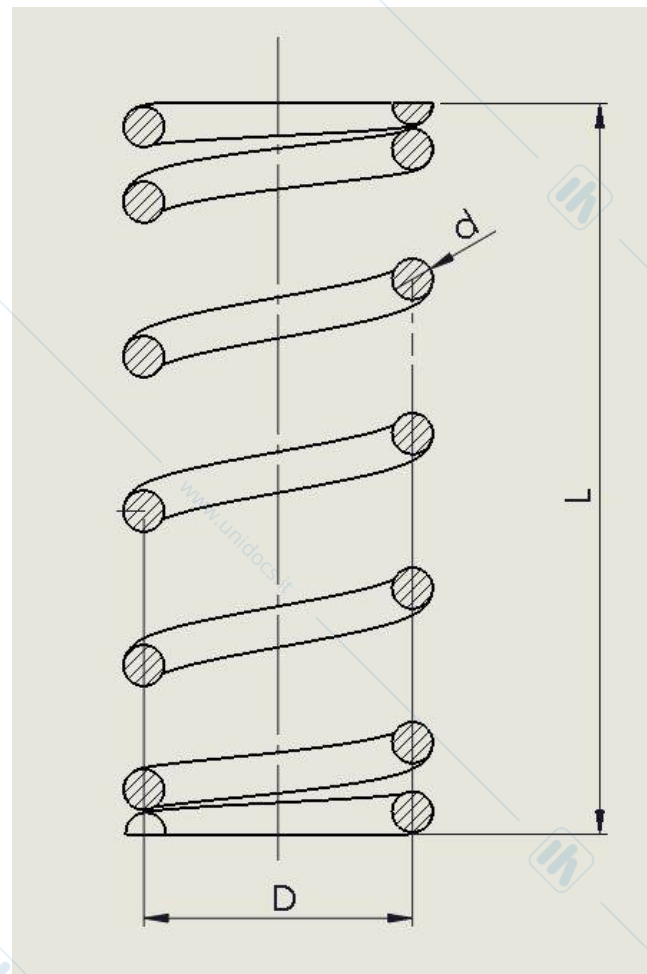
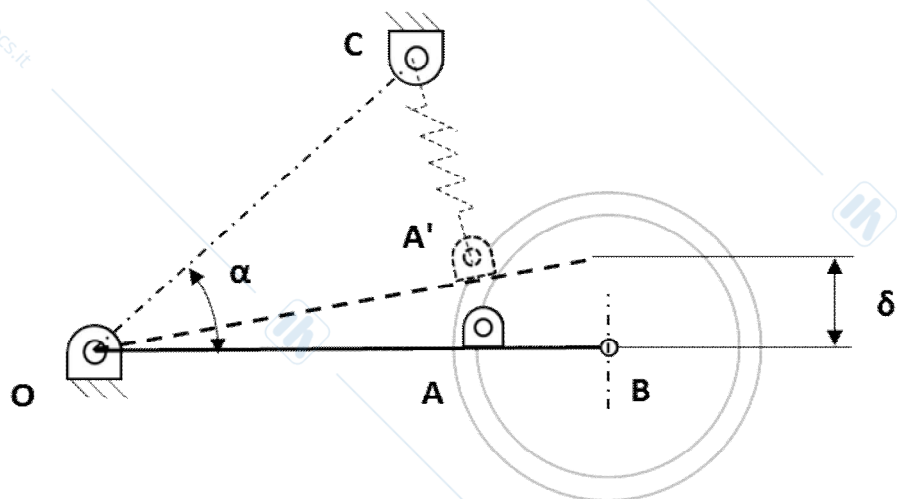
$$f_1 [\text{Hz}] = \frac{d}{\pi D^2 i} \cdot \sqrt{\frac{10^3 \cdot G}{8 \rho}} = 98,2$$

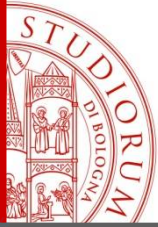


ESAME DI COSTRUZIONE DI MACCHINE M

Esercizio 1

28 gennaio 2020





BIBLIOGRAFIA

- **Wahl A. M.** Mechanical Springs, 2nd Edition (1964), Ed. McGraw-Hill, New York (USA);
- **Caboni F.** Costruzione di Macchine, (1974) Ed. Pitagora, Bologna;
- **Strozzi A.** Costruzione di Macchine, (1998) Ed. Pitagora, Bologna;
- **Niemann G. Winter H. Höhn B.R.** Manuale Degli Organi Delle Macchine, (2006) Ed. Tecniche Nuove, Milano;
- **Shigley J. E. Mischke C.R.** Mechanical Engineering Design, 6th Edition - International (2001), Ed. McGraw-Hill, New York (USA);
- **ISO 18137** (2015) Leaf springs — Technical specifications;
- **ISO 683-14** (2004) Heat-treatable steels, alloy steels and free-cutting steels — Part 14: Hot-rolled steels for quenched and tempered springs;
- **ISO 9442** (1988) Steel - Hot-rolled ribbed and grooved flats for spring leaves - Tolerances and dimensions
- **UNI EN 10270-1** (2003) Filo di acciaio non legato per molle trafilato a freddo e patentato;
- **UNI EN 10270-2** (2003) Filo di acciaio per molle temprato e rinvenuto in olio;
- **UNI EN 10270-3** (2003) Filo di acciaio inossidabile per molle;
- **UNI EN 10089** (2006) Acciai laminati a caldo per molle bonificate;
- **UNI EN 13906-1** (2003) Molle ad elica cilindrica fabbricate con filo a sezione circolare e barra
- Calcolo e progetto: molle di compressione;
- **UNI EN 13906-2** (2003) Molle ad elica cilindrica fabbricate con filo a sezione circolare e barra
- Calcolo e progetto: molle di trazione;
- **UNI EN ISO 2162-2** (1998) Molle - Presentazione dei dati per le molle ad elica cilindrica di compressione;