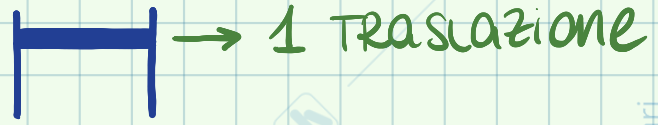


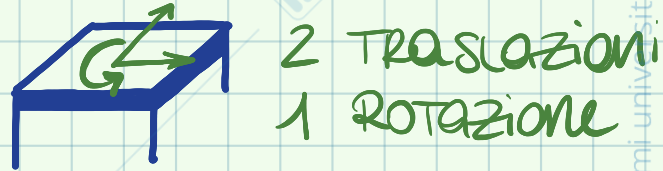
# ANALISI MODALE degli

→ Ipotesi: Solette RIGIDE nel piano

◦ in 2D → 1 gdl



◦ in 3D ⇒ 3 gdl

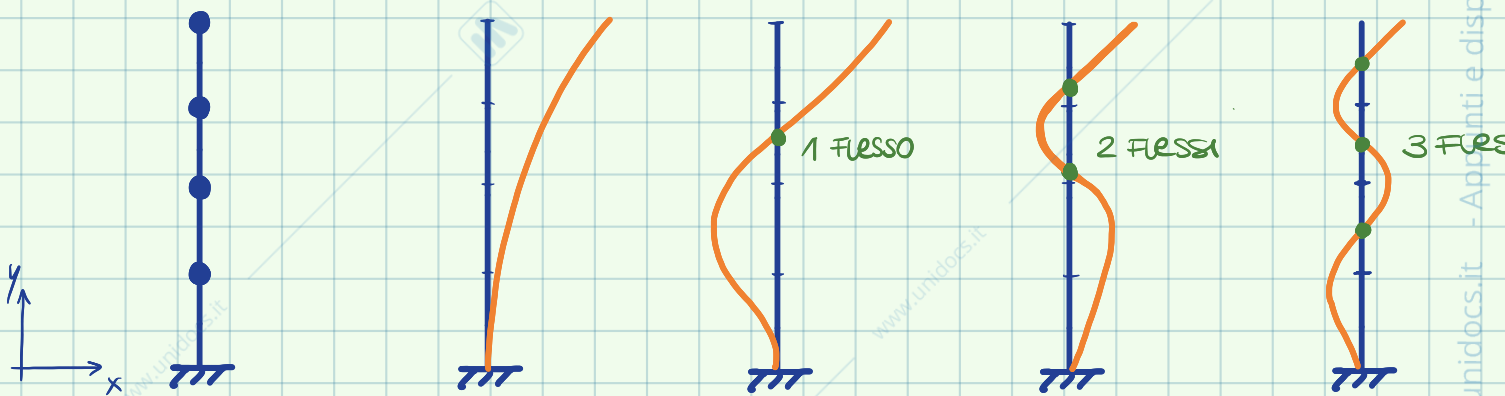


**N.B.**

LA PRIMA FORMA MODALE È SEMPRE NELLA DIREZIONE PIÙ DEBOLE  
cioè nella direzione PIÙ DEFORMABILE DOVE C'È MINORE RIGIDEZZA

→ Esempio. in un caso piano 2D le FORME MODALI sono le seguenti

④ masse → ④ gdl → ④ FORME MODALI = corrispondono alle possibili  
del profilo dell'edificio



④ FORME MODALI:

①

②

③

④

$w_1$

<

$w_2$

<

$w_3$

<

$w_4$

$T_1$

>

$T_2$

>

$T_3$

>

$T_4$

⇒ CASO ③D:

$4 \text{ gdl} \times 3 = 12 \text{ FORME MODALI}$

- ↳ 4 TRASLAZIONI in x
- ↳ 4 TRASLAZIONI in y
- ↳ 4 ROTAZIONI intorno all'asse z

**N.B.**

\* le FORME MODALI POSSONO ESSERE:

- PURE → nel senso di solo spostamento in x, y o intorno a z → se STRUTTUR
- ACCOPIATE → cioè miste, in genere con una direzione prevalente

↳ in dipendenza dalla disposizione o simmetria di struttura e masse

→ SMORZAMENTO. → Cosa succede se un sistema è smorzato?

Se il sistema è smorzato la forma modale varia nel tempo quindi la soluzione non è a variabili separabili

↳ le soluzioni diventano modi complessi

\* Nelle strutture lo smorzamento esiste ed è sempre ma è trascurato perché in generale le strutture sono poco smorzate quindi l'influenza sulla forma modale di questi piccoli smorzamenti non

↳ per questo motivo l'analisi modale (cioè con oscillazioni senza smorzamento) funziona bene per l'analisi strutturale

↳ Problema: lo smorzamento esiste in termini di ampiezze e di attenuazione

↳ per le strutture la soluzione è approssimata ma ragionevole:

- (1) si calcolano le forme modali trascurando lo smorzamento
- (2) si smorza la risposta → cioè si diminuisce la risposta della struttura in funzione dello spostamento a posteriori

## CONCETTI BASE:

La deformazione delle oscillazioni libere può essere espressa come combinazione di modi di base, ciascuna delle quali vibra individualmente con il proprio periodo.

Quindi esiste una serie di periodi propri di una struttura a più gradi di libertà associata una forma modale cioè una forma di spostamenti e rotazioni.

La risposta effettiva in termini di vibrazioni libere è la combinazione lineare di ciascuna con un proprio peso/importanza che dipende dalle condizioni di

La prima forma modale a cui corrisponde il periodo fondamentale, cioè il

## \* Proprietà delle FORME MODALI

① LE FORME MODALI SONO ORTOGONALI RISPETTO A  $\underline{K}$  e  $\underline{M}$   $\rightarrow$  se una forza non compare

$$\begin{cases} * \underline{z}_m^T \underline{M} \underline{z}_n = 0 \\ * \underline{z}_m^T \underline{K} \underline{z}_n = 0 \end{cases} \text{ per } m \neq n \rightarrow \text{FORME MODALI}$$

ma  $\underbrace{\underline{z}_m^T \underline{K}}_{\underline{F}_m} \underline{z}_n = 0$

↳ spostamento della forma modale (n)  
↳ forza della forma modale (m)

$\rightarrow$  Significato: le forze non lavorano sul modo del modo

② Rendono diagonali le matrici  $\underline{K}$  &  $\underline{M}$

③ LE FORME MODALI SONO UN SISTEMA COMPLETO

↳ ogni configurazione della struttura può essere espressa come combinazione lineare delle forme modali

• SPOSTAMENTO GENERICI DELLA STRUTTURA

$$\underline{x} = \sum_1^N \phi_i \underline{z}_i \quad \text{oppure in forma matriciale: } \underline{x} = \underline{z} \cdot \underline{\phi}$$

↳ coefficiente di combinazione

• SPOSTAMENTO NEL TEMPO

$$\underline{x}(t) = \sum_1^N \phi_i \underline{z}_i \sin \omega_i (t - t_i)$$

Nota: gli AUTOVETTORI possono essere normalizzati con criteri di

in genere:  $\underline{z}_n^T \underline{M} \underline{z}_n = 1$

## \* MODI NATURALI e RISPOSTA SISMICA

se  $\underline{x} = \underline{z} \cdot \underline{\phi}$   $\rightarrow$  sostituendo nell'equazione del moto si ottiene:

$$\underline{M} \underline{z} \ddot{\phi} + (\underline{C} \underline{z} \dot{\phi}) + \underline{K} \underline{z} \phi = \underline{P} - \underline{M} \ddot{x}_0$$

↳ SMORZAMENTO TRASCURABILE  
↳ FORZE ESTERNE NULLE

↳ ci occupiamo del moto alla

→ per l'equazione  $i$ -esima

$$\ddot{\phi}_i + \underbrace{\frac{z_i^T K z_i}{z_i^T M z_i}}_{\omega_i^2} \phi_i = - \underbrace{\frac{z_i^T M \Gamma}{z_i^T M z_i}}_{\alpha_i} \ddot{x}_0$$

(2) = FATTORE DI PARTECIPAZIONE

↳ equazione di un oscillatore semplice con moto alla base

$$\ddot{\phi}_i + \omega_i^2 \phi_i = -\alpha_i \ddot{x}_0$$

↳ la risposta si ricompone come:

$$x = \underline{z} \underline{p}(t) \Rightarrow x = z_1 p_1(t) + z_2 p_2(t) + \dots + z_n p_n(t)$$

(2) = FATTORE DI PARTECIPAZIONE

- indica la partecipazione del modo al moto del terreno
- è una caratteristica del modo soltanto
- ↳ diminuisce al crescere del numero di modo (i primi modi prevalgono)
- ↳ dipendono dalla costante di normalizzazione dei modi  
ma la dipendenza scompare nel prodotto  $\alpha_i z_i$

→ Soluzione delle equazioni

ma soluzione approssimata è quella data dallo spettro di risposta

$$\phi_i = \alpha_i D_i$$

↳ VALORE (SMORZATO) DELLO SPETTRO DI RISPOSTA (spz) in corrispondenza di  $T_1$

\* Problema: le norme ci forniscono uno spettro di risposta di accelerazioni,  $A$

↳ quindi si utilizza:  $\phi_i = \frac{1}{\omega_i^2} \alpha_i A_i$  → VALORE DELLO SPETTRO DI RISPOSTA DI ACCELERAZIONI

↳ Nota: la risposta che considero è massima perché lo spettro ci restituisce l'accelerazione massima ma senza informazioni sul tempo

↳ questo va bene a scopo di progetto

→ Quanti modi devono essere calcolati e considerata

[NTC2018] → Per strutture a telaio o simili è indicato nella norma di SOLO i CONTRIBUTI SIGNIFICATIVI

↳ cioè quando i contributi sono almeno il 5% del

**N.B.** Ad ogni modo è associata una quantità di massa coinvolta nel modo, la massa totale, avrà un valore minore di 1

## REGOLA GENERALE

Si calcola la MASSA MODALE PARTECIPANTE per ogni modo in ciascuna direzione (contributi maggiori in x e y) e si somma la massa coinvolta fino ad arrivare a 1. I MODI DA CONSIDERARE SONO TUTTI QUELLI FINO AD OTTENERE LA MASSA MODALE PARTECIPANTE.

- Se la geometria della struttura è regolare le masse cumulano all'ammontare di un numero di modi.
- Le irregolarità in pianta o in alzato distribuiscono la risposta in contributi in modo che è necessario un maggiore numero di modi.

## \* COMBINAZIONE delle RISPOSTE MODALI

1. SOMMA dei valori assoluti

$$r \leq \sum_{n=1}^N |r_n|$$

→ Problema:   
 ↳ i massimi non sono contemporanei   
 ↳ i segni si perdono   
 ↳ è "TROPPA", valore x eccesso

2. SRSS

$$r = \sqrt{\sum_{n=1}^N r_n^2}$$

→ radice quadrata della SOMMA dei QUADRATI

↳ Accettabile SOLO SE I MODI SONO BEN DISTINTI

L'ANALISI MODALE è il metodo di riferimento nelle norme di progetto.

### VANTAGGI:

- Metodo più semplice e generale
- Interpreta il comportamento dinamico della struttura (la partecipazione)
- E' conveniente dal punto di vista del calcolo

### SVANTAGGI:

- Perdita del segno
- Perdita della durata della risposta