Risposte

Oggi giorno diamo per scontato l'uso della derivata, lo studio della derivata di una funzione nasce inizialmente per risolvere problemi geometrici, ossia per trovare l'inclinazione della retta tangente in un punto di una curva. Ma con il tempo si è capito che le derivate sono utilizzate praticamente in discipline di ogni campo del sapere, come strumento di indagine per studiare le caratteristiche delle funzioni. Per esempio il calcolo della derivata di una funzione è usato in fisica per calcolare l'accelerazione istantanea di un corpo, in economia per studiare il prodotto marginale di una funzione di produzione, in statistica per calcolare il tasso di crescita demografico di una popolazione e così via.
Quali informazioni si ottengono dalla derivata di una funzione? Lo studio della derivata di una funzione consente di trovare le seguenti informazioni: la crescenza decrescenza,concavità, convessità, asintoti flessi e infine punti di massimo e di minimo.

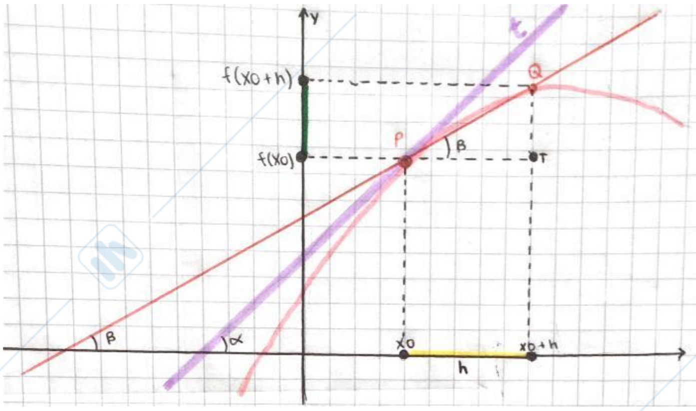
Per poter capire e rispondere la domanda iniziale dobbiamo partire dalla derivata e per parlare di derivata parliamo di Tangente. La derivata di una funzione in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto. Si tratta quindi di un numero che misura la pendenza della retta tangente. Cosa significa la derivata gráficamente? Come il grafico di f e di f0 riflettono la relazione quantità-variazione? La pendenza è l'idea chiave che legano grafici e variazioni. Per definizione, la pendenza è la quantità di variazione, cioè il rapporto tra due cambiamenti, Δx e Δy. Vedendo la formula di pendenza che è :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Specificamente, la pendenza del grafico della funzione f in ogni punto (x, f (x)) è il tasso di variazione istantanea di f rispetto ad x. Quindi possiamo dire che data una funzione y=f(x) definita in certo dominio [a,b], per trovare la retta tangente alla curva in un suo punto P(Xo,Yo),considerando un altro punto Q(X+h,f(Xo = h)) della curva.
Tracciamo la retta secante il grafico PQ e la retta tangente al gráfico nel punto P.
Nel triangolo PQT la tangente dell'angolo acuto **β** é uguale al rapporto fra il cateto opposto all'angolo **β** e il cateto adiacente, cioè:

$$tg\,\beta = \frac{\overline{QT}}{\overline{PT}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Appunto ci ricorda alla variazione in y e x, che come in la pendenza si parla anche in questo caso di derivata, tale espressione è detta rapporto incrementale della funzione f(x) relativo al punto Xo.
Δy = f(Xoh+ h) − f(Xo) è detto incremento della variabile dipendente y mentre che Δx = (Xo+ h) − Xo= h è detto incremento della variabile indipendente x. Attribuendo a h valori sempre più piccoli, (h ⟶ 0), il punto Q si avvicina sempre di più al punto P. La retta secante PQ tende a diventare la retta tangente alla curva in P. Il coefficiente angolare della retta secante PQ, ossia il rapporto incrementale, tende al coefficiente angolare della tangente alla curva in P. Il disegno di questo sarebbe piú o meno così:



Quindi possiamo dare la definizione di derivata Data una funzione y = f(x) , definita in un intervallo [a,b] , si chiama derivata della funzione nel punto Xo ∈ (a,b), e si indica con f'(Xo), il limite, se esiste ed è finito, per h ⟶ 0 , del rapporto incrementale di f(x) relativo a Xo. Quindi la vera formula della derivata per trovare qualsiasi calcolo di questa è uguala a:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Una funzione y=f(x) si dice derivabile in un punto Xo se esiste finita la derivata f'(Xo) . In particolare:

- la funzione f(x) è definita in un intorno del punto Xo.
- esiste finito il limite del rapporto incrementale di f(x) relativo a Xo.

Se il limite del rapporto incrementale non esiste o è infinito, si dice che la funzione non è derivabile in quel punto. Se la funzione f(x) è derivabile in ciascun punto x ∈ (a,b) si dice che essa è derivabile nell'intervallo (a,b). Dobbiamo essere consapevoli che ci sono funzioni e punti dove non esiste la derivata questi possono essere cuando: la funzione non è continua, é un punto angoloso, è un punto di cuspide ed è un punto di flesso a tangente verticale.

La funzione si dice continua in conseguenza derivabile quando Una funzione f (x) si dice continua in un punto x = a se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

1.il punto x = a abbia un'immagine. → ∈\ esiste f (a) Cioè, dobbiamo verificare che la funzione sia definita nel punto x = a. In altre parole, sia x = a appartenere al dominio di f (x).

2 Che il limite della funzione esiste nel punto x = a.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Se hai studiato i limiti, saprai che il limite nel punto x = a esiste se ha limiti a destra ea sinistra e questi valori sono uguali.

3.Lascia che l'immagine del punto x = a coincida con il limite della funzione nel punto.

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Infine, il valore dell'immagine deve essere lo stesso del valore limite.

Finalmente dopo aver saputo sulla derivata e analizzare di forma ragionevole il suo inizio possiamo iniziare a parlare sullo studio della crescenza/decrescenza con la prima derivata. La derivata prima di una funzione può essere utile per stabilire se la funzione è crescente, decrescente o costante. Questo può essere stabilito andando a studiare il segno della derivata prima della funzione.

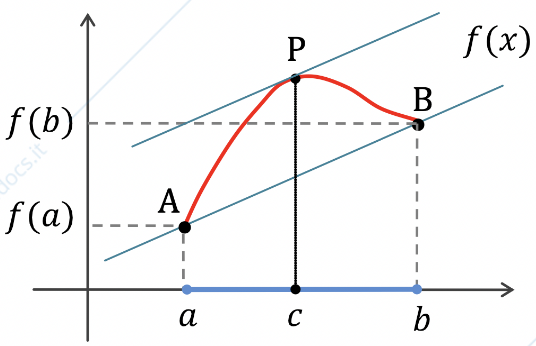
- Se la derivata prima è positiva in un intervallo, allora la funzione è sicuramente crescente in quell'intervallo: $f'(x) > 0 \rightarrow$ f crescente.
- Analogamente, se la derivata prima è negativa in un intervallo, allora la funzione è sicuramente crescente in quell'intervallo: $f'(x) < 0 \rightarrow$ f decrescente.

Quando la funzione è concava verso il basso, la derivata f 'è una funzione decrescente e quando la curva è concava verso l'alto la derivata è una funzione crescente.

Per parlare di conacavitá dobbiamo dare la sua definizione il termine concavo è un termine che viene utilizzato sia in matematica (soprattutto geometria) che in fisica per riferirsi a un tipo di angolo che si genera prima di una curva e che ne assume il lato interno, cioè dove si genera la cavità interna . L'opposto del concavo è il termine convesso, il lato esterno della curva. Entrambi i termini sono normalmente usati come aggettivi qualificanti e possono essere usati per designare diversi elementi o oggetti in cui si verifica questo fenomeno.Siano f e f 'differenziabili. Se studiamo analiticamente la funzione, diremo che f è convessa in un punto x se la derivata seconda è maggiore di 0 ($f''(x) > 0$) e concava se è minore di 0 ($f''(x) < 0$). Quindi:

- Se f (x) è una funzione concava, allora –f (x) è una funzione convessa.
- Se f (x) è una funzione convessa, allora –f (x) è una funzione concava.

Teorema de Lagrange:



Enunciato: Se una funzione f(x) é:

- continua nell'intervallo chiuso e limitato [a,b]
- derivabili nei punti interni dell'intervallo [a,b] allora esiste almeno un punto c interno all'intervalo tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione

- f(x) é continua in [a,b] e derivabile nei punti interni per ipotesi.
- f(a) e $\frac{(f(b)-f(a)}{b-a}$ sono costanti e quindi sono continue e derivabili in tutto R.
- (x-a) è un binomio di primo grado e quindi é una funzione continua e derivabile in R.

Consideriamo la funzione: f(x) = f(x) - kx,

con k $\in$ R.

f(x) è continua in [a, b], perché somma di funzioni continue in [a,b];

f(x) è derivabile in a,b perché somma di funzioni derivabili in [a,b]. Determiniamo k in modo che f(x) soddisfi la terza ipotesi del teorema di Rolle, e cioè si abbia f(a) = f(b).

Deve essere

$f(a) - ka = f(b) - kb \rightarrow k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sostituiamo nella funzione f(x) = f(x) -$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ x. Poiché f(x) soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, esiste almeno un punto c $\in$ a,b tale che f'(c)=0. Calcoliamo la derivata di f(x),

f'(x)=f'(x)- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ da cui f'(c) = f'(c)-$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$=0 e in conseguenza otteniamo la tesi f'(x)=$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Possiamo dimostrare questo con un esempio consideriamo, nell'intervallo [1,2] la f(x)=$\frac{x2+1}{x}$.

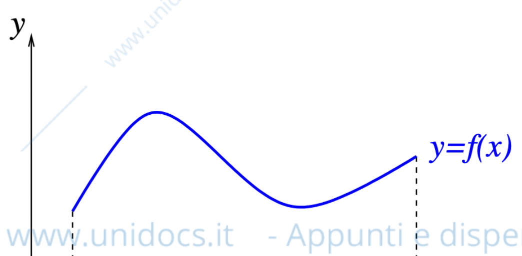
La funzione è continua e derivabile per ogni ≠ 0.Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Verifichiamo che esiste un punto c $\in$ 1,2 tale che f'(c)= $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ risolviamo quindi f'(x) = $\frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x2+1)}{x2}$=$\frac{x2-1}{x2}$=1-$\frac{1}{x2}$e f(1)=2, f(2)=$\frac{5}{2}$→ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$= ½ per definizione e come abbiamo spiegato deve essere : 1- $\frac{1}{c2}$= ½ → $\frac{1}{c2}$= ½ → c2 = 2 → c= $\pm\sqrt{2}$.

Quindi per c1=$\sqrt{2} \in 1, 2$ dimostrato e verificato quindi dal teorema di Lagrange. In conclusione Il teorema di Lagrange ci permette di stabilire la monotonia di una funzione derivabile in un certo intervallo, in base al segno della derivata.

Continuando con questo percorso straordinario non possiamo non parlare dell'integrale, in sintesi l'integrale è il reciproco processo di derivazione, cioè data una funzione f (x), cerca quelle funzioni F (x) che, derivate, portano a f (x). Il concetto di integrale nasce per risolvere due classi di problemi:

- calcolo delle aree di figure delimitate da curve, calcolo di volume, calcolo del valore di una forza e calcolo dello spazio percorso → per cercare questi concetti lo chiamiamo integrale definito.
- problema inverso del calcolo della derivata sata una funzione f(x), trovare una funzione f(x) tale che f'(x) = f(x) → questa lo chiamiamo integrale indefinito.

Noi parleremo in questo caso solo dell'integrale definito e daremmo la sue definizione enunciando le sue proprietá per poter fornire strumenti e semplificare un'espressione. L'integrale definito è un concetto utilizzato per determinare il valore delle aree delimitate da curve e linee. Dato l'intervallo [a, b] in cui, per ciascuno dei suoi punti x, definiamo una



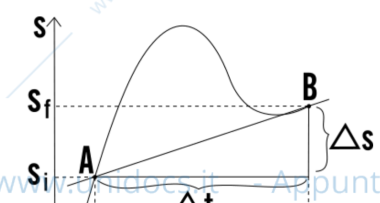
funzione f (x) maggiore o uguale a 0 in [a, b], è detto integrale definito della funzione tra i punti aeb all'area della porzione del piano che è delimitata dalla funzione, l'asse orizzontale OX e le linee verticali delle equazioni x = aex = b. L'integrale definito della funzione tra gli estremi dell'intervallo [a, b] è indicato come: $\int_a^b f(x)\,dx$. Le proprietá di queste sono:

- Ogni integrale esteso a un intervallo di un singolo punto, [a, a], è uguale a zero.
- Quando la funzione f (x) è maggiore di zero, il suo integrale è positivo; se la funzione è minore di zero, il suo integrale è negativo.
- L'integrale di una somma di funzioni è uguale alla somma dei suoi integrali presi separatamente.
- L'integrale del prodotto di una costante e di una funzione è uguale alla costante moltiplicata per l'integrale della funzione (ovvero, è possibile "estrarre" la costante dall'integrale).
- Permutando i limiti di un integrale, cambia segno.
- Dati tre punti tali che a <b <c, allora è soddisfatto che (integrazione a tratti):

$$\int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_b^c f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx$$

A questo punto sapendo i concetti basi della matematica possiamo mescolarlo e introdurlo in altro ambito della conoscenza scientifica che sarebbe la fisica. Come abbiamo visto precedentemente la velocità istantanea in Fisica è una grandezza vettoriale definita come la derivata della posizione di un corpo rispetto al tempo attraverso la legge oraria. Si dice legge oraria un'equazione che descrive l'andamento della posizione di un punto materiale in movimento in funzione del tempo.Possiamo quindi definire legge oraria del moto una relazione matematica che lega il tempo alla posizione assunta dal corpo al variare del tempo. Con abuso di linguaggio, la velocità istantanea viene anche indicata come derivata dello spazio rispetto al tempo. Dopo aver visto la nozione di velocità media possiamo passare a parlare della velocità istantanea. Voglio spiegare cos'è la velocità istantanea e come si definisce concettualmente utilizzando la matematica. Cos'è la velocità istantanea, e come si ricava? Se volessimo conoscere il valore della velocità di un punto in un istante preciso di tempo? Di certo non potremmo ricorrere alla velocità media, perché essa rappresenta la velocità di un punto in un intervallo di tempo e non in un istante preciso. Introduciamo il concetto di velocità istantanea partendo da un punto di vista grafico. Normalmente, descrivere il moto di un punto che si muove lungo una linea retta, si fa uso del grafico spazio-tempo. Si tratta di un normalissimo piano cartesiano dove si colloca il tempo sull'asse x e lo spazio sull'asse y. Supponiamo di avere un grafico che descrive come varia la posizione in funzione del tempo. In altri termini, supponiamo di disporre del grafico di una funzione che descrive la posizione di un punto materiale istante per istante: S = f(t)

La differenza tra il tempo finale e quello iniziale rappresenta l'intervallo Δt, mentre la differenza tra la posizione finale e quella iniziale è lo spostamento Δs.



La pendenza, ossia il coefficiente angolare della retta congiungente i punti A e B, fornisce il valore della velocità media tenuta per effettuare lo spostamento Δs dell'intervallo di tempo Δt.

$$\text{mAB} = \text{Vm,AB} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Ora, se volessimo conoscere la velocità istantanea del punto quando si trova in A, potremmo seguire questo ragionamento: spostiamo il punto B nella posizione B' più vicina ad A. La pendenza della retta congiungente A e B' ci dà la velocità media del punto, che ha effettuato lo spostamento Δs nel tempo Δt'

$$\text{mAB'} = \text{Vm,AB'} = \frac{\Delta s'}{\Delta t'}$$

Il nuovo valore di velocitá é diverso da quello precedente, perché diversa è la pendenza della retta. Avviciniamo ulteriormente B' ad a in un nuovo punto che chiamiamo B". Potremmo anche calcolare la nuova volicitá per il tratto AB". L'idea é che ad ogni passaggio di avvicinamento di B ad A, l'intervallo di tempo sull'asse delle x (cioè la differenza tra tempo finale e tempo iniziale) si riduce sempre di piú. Il ragionamento in conclusione sarebbe che la velocità istantanea è pari alla pendenza della tangente al grafico spazio-tempo in quel punto. La lógica cha abbiamo usato precedentemente é esattamente la stessa che si usa in matematica per arrivare a definire il concetto di derivata. Data una funzione f(x) continua in un intervallo, si definisce derivata il limite del rapporto incrementale.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y}$$

Dalla matematica e come abbiamo vista prima apprendiamo anche la derivata, calcolata in un preciso valore di x, dove fornisce il coefficiente angolare(ossia la pendenza) della retta tangente al grafico in quel punto, possiamo finalmente dare la definizione la quale lega la nozione di velocitá instantanea e derivata. La velocitá instantanea é la derivata della posizione rispetto al tempo che si scrive:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

dove ds e dt sono rispettivamente lo spostamente e l'intervallo di tempo molto prossimi a zero. L'accelerazione istantanea è il valore limite dell'accelerazione media t nell'intorno di un determinato istante, quando il t diventa molto piccolo. E quindi seguendo la stessa logica in conseguenza l'accelerazione istantanea in Fisica è una grandezza vettoriale definita come la derivata della velocità rispetto al tempo, e che esprime la variazione di velocità di un corpo istante per istante.

Continuiamo con il nostro percorso e parliamo ancora di fisica, come possiamo collegarlo alla matematica. Se applichi una forza su un oggetto in movimento, diciamo che la forza che stai esercitando funziona. Allo stesso modo, se un corpo si muove sotto l'azione di una forza gravitazionale, esegue anche un lavoro chiamato lavoro gravitazionale. Successivamente potremmo capire l'espressione generale del lavoro svolto dalla forza gravitazionale quando il corpo si muove in un percorso rettilineo. Inoltre, ci concentreremo nel caso in cui abbiamo un campo generato da una massa puntiforme. Sapendo che la gravità non è una forza costante, ma varia con la distanza dal corpo che la crea dobbiamo calcolare il lavoro svolto da forze variabili. Nel percorso dell'anno abbiamo studiato i grafici di lavoro quando troviamo una forza costante e una forza variabile. In entrambi i casi, e ogni volta che ci troviamo di fronte a un moto rettilineo, il valore dell'opera coincide con l'area racchiusa sotto la curva. Tuttavia, nel livello precedente abbiamo lasciato aperta la questione di come calcolare precisamente quest'area nel caso di forze variabili. La forza, indipendentemente dalla sua natura, generalmente è la causa dell'accelerazione di un corpo. In Fisica, in particolare, essa è definita come un vettore, cioè una grandezza dotata di precise intensità, direzione e verso. Nonostante possa sembrare qualcosa che non si può calcolare, ci sono misure precise che la determinano; si parla spesso della forza media, appunto il valore medio tra quello transitato. Considerata una qualunque forza a cui attribuiamo la lettera F, di intensità variabile, è sempre possibile definire una forza media Fm (sta per Forza media) che abbia la stessa direzione e verso di F e, che agisca per lo stesso intervallo di tempo Δt; essa è tale che il prodotto Fm Δt (la sua intensità per l'intervallo di tempo considerato), per semplicità grafica sia uguale all'area che si trova sotto la curva della forza variabile, ovvero uguale all'impulso di F. Avremo infine che Fm=$\frac{1}{\tau-0}\int_{0}^{\tau} F(t)$dt.

Da un punto di vista grafico, l'idea è di dividere l'area totale in rettangoli infinitamente stretti, calcolare l'area di ciascuno e sommarli per determinare l'area totale sotto la curva. Da un punto di vista fisico, quello che stiamo facendo è considerare spostamenti infinitamente piccoli dr →. Poiché questi sono così piccoli, la forza F → rimane costante in ciascuno di essi, quindi possiamo scrivere: $dW = F \bullet dr$. Il lavoro totale W svolto dalla forza tra la sua posizione iniziale e quella finale sarà dato dalla somma di tali lavori eseguiti a spostamenti infinitamente piccoli, indicati dW. Per eseguire questa somma ricorriamo in matematica all'integrale definito.

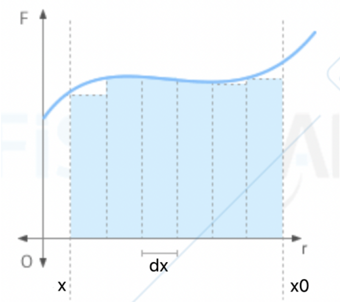
Il lavoro svolto da una forza lungo un percorso rettilineo è determinato dall'espressione:

$$W = \int_{x0}^{r} dW = \int_{x0}^{r} F \cdot dr$$

Dove:

- W, dW: è il lavoro totale svolto rispettivamente da una forza e da un differenziale di lavoro. La sua unità di misura nel Sistema Internazionale (S.I.) è il joule (J).
- F →: è la forza che agisce durante il viaggio. Può essere costante o variabile. La sua unità di misura nel Sistema Internazionale (S.I.) è il newton (N).
- dx →: Questa è una differenza di viaggio. Possiamo supporre che la forza F → rimanga costante su di essa. La sua unità di misura nel Sistema Internazionale (S.I.) è il metro (m).

- $x0$ e x: Valori limite del percorso, cioè i valori ai quali inizia e finisce il calcolo del lavoro svolto dalla forza. Trattandosi di un movimento rettilineo, corrispondono rispettivamente ai valori di distanza dall'origine dei punti iniziale e finale.



La base di ogni rettangolo rappresenta lo spostamento infinitesimale, indicato come dx. Il lavoro svolto in ogni spostamento infinitesimale è un infinitesimo di lavoro, cioè dW. La somma di tutti loro tra x0 e x risulta essere il valore cercato. La forza, indipendentemente dalla sua natura, generalmente è la causa dell'accelerazione di un corpo. In Fisica, in particolare, essa è definita come un vettore, cioè una grandezza dotata di precise intensità, direzione e verso. Nonostante possa sembrare qualcosa che non si può calcolare, ci sono misure precise che la determinano; si parla spesso della forza media, appunto il valore medio tra quelli contingenti. Considerata una qualunque forza a cui attribuiamo la lettera F, di intensità variabile, è sempre possibile definire una forza media Fm (sta per Forza media) che abbia la stessa direzione e verso di F e, che agisca per lo stesso intervallo di tempo Δt; essa è tale che il prodotto Fm Δt (la sua intensità per l'intervallo di tempo considerato), per semplicità grafica sia uguale all'area che si trova sotto la curva della forza variabile, ovvero uguale all'impulso di F.

La forza gravitazionale descritta dalla legge di gravità, come altre forze come la forza elastica o la forza elettrica, è una forza centrale e quindi è una forza conservativa. Questo implica che:

- Il lavoro svolto da una forza gravitazionale per spostare un corpo da una posizione A a un'altra B dipende solo da quelle posizioni e non dal percorso seguito per arrivare da A a B. È per questo motivo che, sebbene l'espressione precedente sia valida solo quando il percorso è una linea retta, i risultati sono validi per qualsiasi percorso seguito. Questa restrizione ci permette di ottenere il lavoro per mezzo di integrali definiti contro integrali di linea, al di fuori dell'ambito di questo livello, in cui dobbiamo considerare l'espressione matematica del percorso seguito.
- Quando il percorso che il corpo segue tra A e B è un percorso o ciclo chiuso, il lavoro gravitazionale è zero.

Quando una massa M crea un campo gravitazionale in cui viene introdotta un'altra massa m, quest'ultima subirà gli effetti di una forza gravitazionale, risultato della sua interazione con il campo. Il lavoro svolto da detta forza per trasferire m da un punto A a un altro B non dipende dalla traiettoria, quindi possiamo considerare una traiettoria radiale come quella nella figura sotto. Cioè che abbiamo: $W_g(A \to B)$=.Possiamo sviluppare l'integrale precedente tenendo conto di alcune considerazioni. Da un lato, il valore della forza gravitazionale Fg = G. Dall'altro, il suo significato è esattamente l'opposto di dx. Inoltre, ricordando l'espressione del prodotto scalare di due vettori, abbiamo quello $Fg \cdot dx \rightarrow = Fg \cdot dx \cdot \cos(\alpha) = Fg \cdot dr \cdot \cos(180^{\circ}) = -Fg \cdot dr$.

Ci rimane: Wg(A→B)=$\int_A^B F\cdot\, dx = \int_A^B -G\cdot\frac{M\cdot m}{x2}$ $\cdot\, dx = -G\cdot M\cdot m\int_A^B r\hat{}-2\cdot dx = G\cdot M\cdot m[\frac{1}{xB}-\frac{1}{xA}]$ Dove semplificatamente il risultato sarebbe Wg= $-\ \Delta Epg$.

Mettiti alla prova: $fk(x) = \frac{4x}{k}e^{1-\frac{x}{k}}$ dobbiamo trovare il valore di f per poter fare così la derivata quindi: $f(x) = \frac{\frac{4xe^{1-\frac{x}{k}}}{k}}{k} \Rightarrow f(x) = \frac{4xe^{1-\frac{x}{k}}}{k^2} \Rightarrow f = \frac{4xe^{1-\frac{x}{k}}}{k^2x} \Rightarrow f = \frac{4xe^{1-\frac{x}{k}}}{k^2}$. Troviamo la derivata della funzione f → f'(x) = $\frac{4}{k^2}\cdot\frac{d}{dx}[xe^{1-\frac{x}{k}}] \Rightarrow$ $\frac{4(\frac{d}{dx}[x]\cdot e^{1-\frac{x}{k}}+x\cdot\frac{d}{dx}[e^{1-\frac{x}{k}}])}{k^2} \Rightarrow \frac{4(xe^{1-\frac{x}{k}}(\frac{d}{dx}[1]-\frac{1}{k}\cdot\frac{d}{dx}[x])+e^{1-\frac{x}{k}})}{k^2} \Rightarrow$ $\frac{4(xe^{1-\frac{x}{k}}(0-\frac{1}{k})+e^{1-\frac{x}{k}})}{k^2} \Rightarrow -\frac{4(x-k)e^{1-\frac{x}{k}}}{k^3}$. Per poter trovare i massimi pareggiamo la derivata a 0 per sapere in quale momento la tangente è orizzontale. $-\frac{4e(x-k)-\frac{x}{k}}{k^3}=0 \Rightarrow$ $-4e(x-k)+\frac{x}{k} = 0 \Rightarrow -4ekx + 4ek^2 + x = 0 \Rightarrow$ $-4ekx + x = -4ek^2 \Rightarrow -x(4ek-1) = -4ek^2 \Rightarrow -x = -\frac{4ek^2}{4ek-1} \Rightarrow$ x= $\frac{4ek^2}{4ek-1}$. Quindi con quel valore ci esce che in quel punto chiamato punti critici o stazionari nei quali la retta tangente è orizzontale, se vogliamo sapere ora se quei punti sono massimi o minimi<quello che dobbiamo fare è evaluare nella funzione quel punto, sostituendo la x nella funzione iniziale quindi avremo: $f(\frac{4ek^2}{4ek-1}) = \frac{4\frac{4ek^2}{4ek-1}}{k}e^{1-\frac{\frac{4ek^2}{4ek-1}}{k}} \Rightarrow$ $f\cdot 4ek^2 = \frac{4\cdot 4ek^2e^{1-\frac{4ek^2}{4ek-1}}}{k} \Rightarrow \frac{f\cdot 4ek^2}{4ek-1} = \frac{4\frac{4ek^2}{4ek-1}}{k}e^{1-\frac{4ek^2}{4ek-1}} \Rightarrow f = \frac{4^{\frac{4ek^2}{4ek-1}}(4ek-1)}{4k^3e^{\frac{4ek^2}{4ek-1}}}$ finalmente dopo aver sostituito la x nell equazione troviamo i punti stazionari cioè i punti minimi della funzione e abbiamo: $(\frac{4ek^2}{4ek-1}, \frac{4^{\frac{4ek^2}{4ek-1}}(4ek-1)}{4k^3e^{\frac{4ek^2}{4ek-1}}})$. Compiendo con i requisiti gli daremo un valore a k=1 e avremo la seguente $f(x) = \frac{4x}{1}e^{1-\frac{x}{1}}$ → troviamo la derivata → $4\frac{d}{dx}[xe^{1-x}] = 4\frac{d}{dx}[x]\cdot e^{1-x}\cdot\frac{d}{dx}[e^{1-x}] =$ $4(xe^{1-x}(\frac{d}{dx}[1]-\frac{d}{dx}[x]) + e^{1-x}) = -4(x-1)e^{1-x}$ dopo la derivata liguagliamo a zero.

$-4(x-1)e^{1-x}=0 \rightarrow (x-1)e^{1-x}=0 \rightarrow$ x-1=0 v $e^{1-x}=0 \rightarrow$ x=1 poi sostituiamo nella funzione la x per uno per trovare il punto stazionario e il suo minimo. $-4(1-1)xe^{1-1}=0$. Punto crítico = (1,0). Si suppone che x = c é un punto crítico di f(x) quindi:

- Se f'(x) > 0 a la sinistra di x = c e f'(x) < 0 a la destra di x = c quindi x = c é un massimo.
- Se f'(x) < 0 alla destra di x + c e f'(x) > 0 a la destra di x = c quindi x=c é un mínimo.
- Se f'(x) ha lo stesso segno in entrambi lati del x=0 quindi x=c non é né un minimo né un massimo.

Troviamo il dominio = $-\infty < x < \infty$verifichiamo il comportamento dei intervalli delle funzioni monotone.

	$-\infty < x < 1$	x=1	1 <x<∞
Segno	+	0	-
Comportamento	convesa	Massimo	cóncava

Sostituiamo il punto estremo x=1 in $4e^{1-x}x \Rightarrow 4$ Quindi il massimo della funzione é (1,4).

Finalmente per trovare i flessi troviamo la seconda derivata che è uguale a f''(x) = $-8e^{1-x}+4x\,e^{1-x} \rightarrow$ che lo uguagliamo a zero per trovare i flessi, $8e^{1-x}+4x\,e^{1-x}=0$ $\rightarrow$

$4e^{1-x}\cdot(2-x)=0 \rightarrow e^{1-x}\cdot(2-x)=0 \rightarrow$ x=2 → determiniamo il punto di ogni intervallo:

$\{-\infty, 2\}$, $\{2, +\infty\}$ e scegliamo due punti per ogni intervallo in questo caso sarebbero il 1 e il 3. Quando la f''(1)=$-8e^{1-1}+4(1e^{1-1})=$ -8 +4 · 1= -4 Quando la f''(3)= 8 $e^{1-3}+4(3e^{1-3})$ =0,5413 Quando la f''(2)= $\frac{4\cdot 2}{1}e^{1-2}=\frac{8}{e}$ In conclusione le due coordinate del punto di inflessione sono $(2,\frac{8}{e})$.

Enunciando il teorema della media abbiamo che f:[a,b] → ℝ una funzione continua nell'intervallo [a,b] quindi esiste un valore c ∈ [a,b] tale che: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Dato che il valore medio f in [a,b] è definito come: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ per lo che possiamo interpretare che f raggiunge il suo punto medio c ∈ (a,b). In generale se f:[a,b] → ℝ é continua e g é una funzione integrabile che non cambia segno in [a,b] quindi esiste c ∈ (a,b) tale che $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

Verifica che il valor medio della funzione fk(x) nell'intervallo [0; k] è indipendente dal valore di k. Per dimostrare appunto che k é indipendente dobbiamo dare un valore qualsiasi a k. k=2.

V(2) = $\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{4x}{2} e^{1-\frac{x}{2}} dx \rightarrow \frac{2}{2}\int_0^2 x \bullet e^{1-\frac{x}{2}} dx \rightarrow$ -8 + 4e V(k) = $\int_0^k \frac{4x}{k} e^{1-\frac{x}{k}} dx \rightarrow$ -8 + 4e e troviamo che indipendentemente del valore k, avremo lo stesso risultato e non dipenderá il numero che le mettiamo.

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi lungo l'asse x di un sistema di riferimento cartesiano in cui le distanze sono misurate in metri. La legge oraria del punto materiale è data dalla funzione x(t) = f1(t) per t ≥ 0 con le opportune unità di misura. Determina la velocità media del punto nell'intervallo [0; 1]. Quindi básicamente utilizziamo quello che avevamo prima per trovare la velocitá media facciamo: Vm $=\frac{1}{1-0}$ $\int_0^1 4(e^{1-t} - t\, e^{1-t})$dt → usiamo sostituzione u= 1-t → $\int e^{1-t} = -\int e^{u} du \rightarrow$ -e $^{1-t}$ →4 (e $^{1-t}$+te $^{1-t}$+e $^{1-t}$) → 4te $^{1-t}$ per calcolare l'integrale definita dobbiamo sostituire i limiti della integrazione quindi: 4 x 1 e $^{1-1}$ $-4{\cdot}0$ e $^{1-0}$= 4

Come abbiamo visto prima si chiama velocità istantanea la velocità media nel limite di Δt che tende a zero quindi istantanea sarà tangente alla traiettoria. Essa può cambiare istante per istante, ma il suo valore medio corrisponderà alla velocità media. Se il moto è caratterizzato da velocità costante, cioè si tratta moto rettilineo uniforme, allora velocità media e istantanea coincidono ad ogni istante di tempo o intervallo considerato lungo tutto il moto ma invece se si tratta di un moto rettilineo uniformemente accelerato, ovvero di un moto in cui la velocitá cambia nel tempo, allora bisognerá distinguere tra la velocitá istantanea e media. Quindi possiamo definire che la velocitá instantanea è un promedio quella che abbiamo calcolato prima, mentre che la velocitá instantanea é simplemente il valore che continuamente cambia durante il percorso, essa aumenta al passare di tempo a causa dell'accelerazione.

Seguendo la stessa idea in conclusione si esiste quel punto dove le velocitá saranno uguali solo se questa è continua, cioè derivabile, se in questo caso non è derivabile quindi non continua, non esiste un punto uguale tra le due velocitá. La velocitá instantanea puó essere positiva negativa o nulla:

- V > 0 Se la curva è crescente, cioè lo spostamento é positivo.
- V = 0 Se la curva ha un massimo o un minimo cioè se il moto sta cambiando di verso.
- V < 0 Se la curva é decrescente cioe se lo spostamento è verso le x negative.

Finalmente e per finire con questo percorso esiste un istante in cui la forza agente sul punto P si annulla? Se la risposta è affermativa, quanto vale in questo caso l'intensità della velocità di P? Quindi dobbiamo fare l'integrale definita con i parametri esposti prima che sarebbe fare l'integrale definita tra il tempo positivo da [0;∞]Lo uguagliamo a 0 per sapere in quale istante la forza di intesitá è nulla se troviamo un valore nei numeri reali avremo un instante, se no semplicemente la forza non si annulla. $\int_0^1 4(e^{1-t} - t\, e^{1-t})$dt = 0. In questo caso al risolvere l'integrale troviamo che é divergente cioè -∞quindi non si annulla la forza possiamo fare un'altro studio dipendendo dalla accelerazione mettendoli un valore numerico a t, e troveremo che il risultato sará zero confermando una seconda volta che non ce un istante il cui annulli la forza del movimento di P.

$a(t) = \frac{dV(t)}{dt} = 4(e^{-t+1}t - 2e^{-t+1}) = 0$ dove t=2, $\varphi(t) = 0$, V(t)=V(2). Alla fine troviamo il risultato $2e^{-1} = 2e^{-1} \rightarrow 0$. Non c'è punto che annulla la forza di agente del punto P.