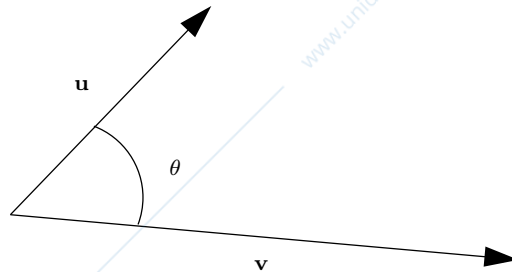


Esercizi per il corso di Curve e Superfici:
 A.A. 2021–2022 - Seconda esercitazione
 Prof. E. Miglio, M. Fois

18 Marzo 2022

1 Prodotto scalare e posizione reciproca di due vettori

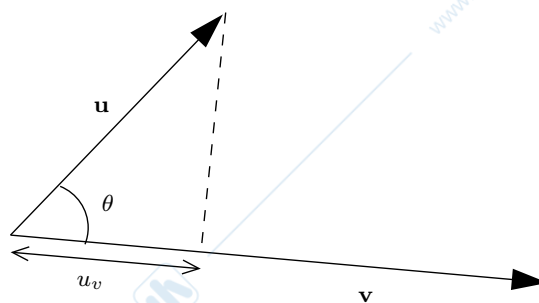


Dati due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} il prodotto scalare si può calcolare anche utilizzando la formula

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra \mathbf{u} e \mathbf{v} . Si può dunque calcolare θ come

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} \in [0, \pi].$$



La proiezione con segno u_v del vettore \mathbf{u} sul vettore \mathbf{v} si può calcolare nel seguente modo:

$$u_v = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = |\mathbf{u}| \cos \theta.$$

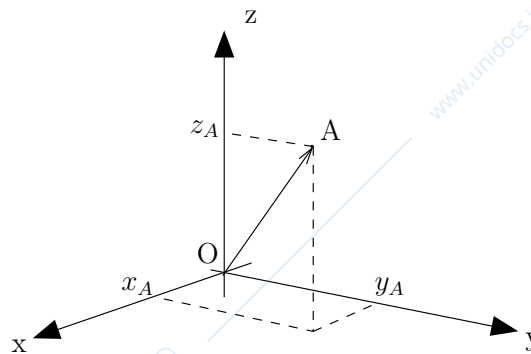
Dalla precedente relazione notiamo che $u_v < 0$ se l'angolo compreso tra \mathbf{u} e \mathbf{v} è ottuso ($\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$), $u_v > 0$ se l'angolo compreso tra \mathbf{u} e \mathbf{v} è acuto ($\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$), e $u_v = 0$ se i due vettori sono ortogonali ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Esercizi

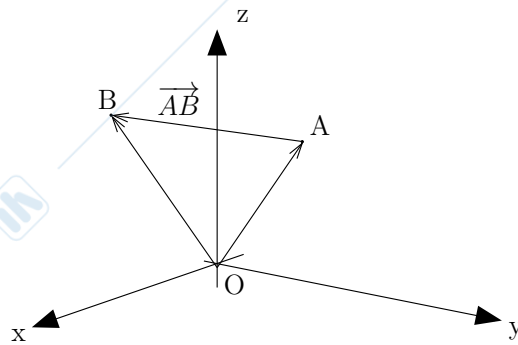
Per i seguenti vettori, applicati nell'origine degli assi,

- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [0, 1, 1]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 1, 0]^T$.
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [1, 0, 1]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 1, 0]^T$.
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [2, 0, 4]^T$ e $\mathbf{v} = [1, 0, 2]^T$.
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [0, 1, 0]^T$ e $\mathbf{v} = [1/2, \sqrt{3}/2, 0]^T$.
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [0, 0, 3]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 2, 2]^T$.
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [0, 0, 3]^T$ e $\mathbf{v} = [0, -2, 2]^T$ e la lunghezza v_u della proiezione di \mathbf{v} sulla direzione definita da \mathbf{u} .
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [0, 0, 3]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 2, -2]^T$ e la lunghezza v_u della proiezione di \mathbf{v} sulla direzione definita da \mathbf{u} .
- calcolare il valore (in radianti) dell'angolo compreso tra $\mathbf{u} = [0, 0, 3]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 2, -2]^T$ e la lunghezza u_v della proiezione di \mathbf{u} sulla direzione definita da \mathbf{v} .
- dati i vettori $\mathbf{u} = [1, a, 2]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 1, 1]^T$ determinare, se possibile, il valore di a tale per cui \mathbf{u} e \mathbf{v} sono perpendicolari.
- dati i vettori $\mathbf{u} = [a, 0, 2]^T$ e $\mathbf{v} = [0, 1, 1]^T$ determinare, se possibile, il valore di a tale per cui \mathbf{u} e \mathbf{v} sono perpendicolari.
- dati i vettori $\mathbf{u} = [1, -2, 3]^T$ e $\mathbf{v} = [-2, a, 6]^T$ determinare, se possibile, il valore di a tale per cui \mathbf{u} e \mathbf{v} sono paralleli.

2 Vettori nello spazio



Dato un punto $A(x_A; y_A; z_A)$ nello spazio euclideo, possiamo interpretare A come un vettore le cui componenti coincidono con le coordinate di A . Possiamo indicare questo vettore come $\vec{OA} = [x_A, y_A, z_A]^T$, ossia il vettore che é applicato nell'origine O e punta verso A .

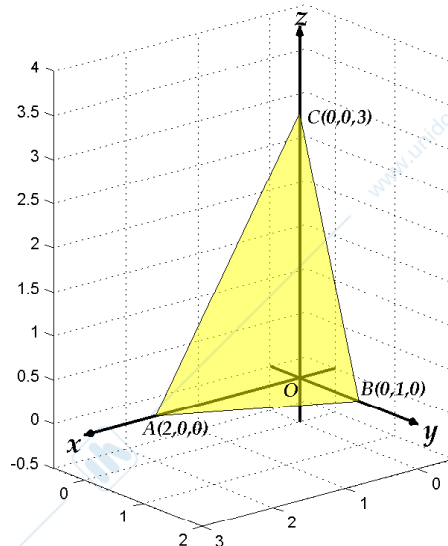


Dati due punti $A(x_A; y_A; z_A)$ e $B(x_B; y_B; z_B)$, definiamo il vettore

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]^T.$$

Esercizi

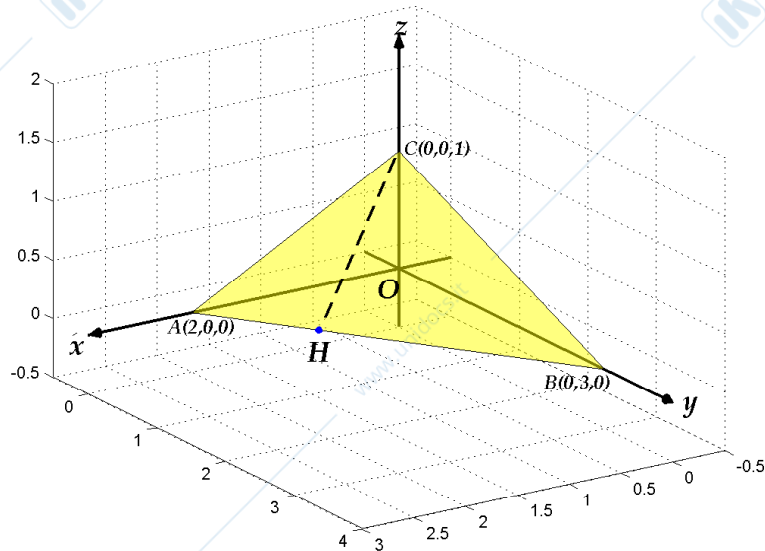
- Sono dati i vettori $\mathbf{u} = [1, 2, 0]^T$ e $\mathbf{v} = [2, 1, 0]^T$.
 - Calcolare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Determinare anche il coseno dell'angolo compreso tra \mathbf{u} e \mathbf{v} .
 - Determinare i versori $\text{vers}(\mathbf{u})$ e $\text{vers}(\mathbf{v})$. Determinare un vettore \mathbf{w} che abbia le seguenti caratteristiche: stessa direzione di \mathbf{u} , verso concorde a quello di \mathbf{u} e lunghezza 4.
 - Calcolare la proiezione di \mathbf{u} su \mathbf{v} .
- Sono dati i punti $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.



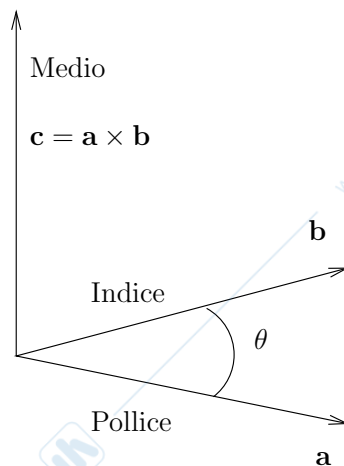
- Determinare i vettori \vec{AB} e \vec{AC} .
 - Determinare le coordinate del punto D tale per cui $\vec{BD} = \vec{AC}$.
- Ripetere l'esercizio precedente con i punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

4. Sono dati i punti $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 1)$.

- Determinare i vettori \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{CB} verificando che $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
- Determinare le coordinate del punto H proiezione ortogonale di C sul vettore \overrightarrow{AB} .
- Calcolare il perimetro \mathcal{P} e l'area \mathcal{A} del triangolo ABC .



3 Prodotto vettoriale



Dati due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , il prodotto vettoriale tra \mathbf{a} e \mathbf{b} è un'operazione che restituisce un vettore \mathbf{c} , indicato come

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Proprietà del prodotto vettoriale:

- il modulo di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ rappresenta l'area del parallelogramma identificato dai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} e può essere calcolato tramite la formula

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta;$$

2. la direzione di $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é ortogonale al piano individuato da \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
3. verso definito da una terna destrorsa (vedi figura sopra);
4. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, ovvero invertendo l'ordine del prodotto vettoriale otteniamo un vettore che ha direzione sempre perpendicolare ai due vettori di partenza, ma con verso opposto.

Esercizi

Dati i punti $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 1)$ (come nell'ultimo punto dell'esercizio precedente),

1. Calcolare i prodotti vettoriali $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{CB}$;
2. Calcolare l'area \mathcal{A} del triangolo ABC utilizzando opportunamente le proprietà del prodotto vettoriale.