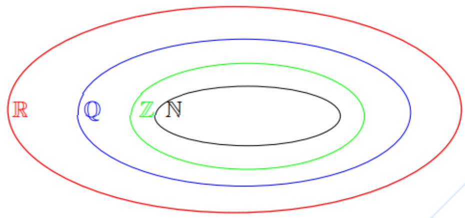
Insiemi numerici

- naturali N: interi (positivi + zero)
- relativi Z: interi (positivi + negativi + zero)
- razionali Q: rapporto di due numeri interi.
- reali R, anche i numeri irrazionali (es. π)



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Sistemi di riferimento

MONODIMENSIONALE	BIDIMENSIONALE	TRIDIMENSIONALE
retta	Assi cartesiani x, y	Assi x, y, z
$\overline{AB} = \lvert x_B - x_A \rvert$ $d_{A\to B} = x_B - x_A$ $d_{A\to B} = -d_{B\to A}$	$\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$	$\overline{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$ $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$
$\overline{AM} = \overline{MB}$ $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$	$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$	

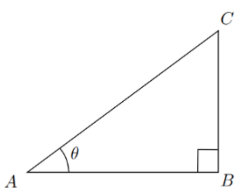
Trigonometria: angoli

- si misurano in senso positivo seguendo il senso antiorario
- angoli notevoli
- radianti: 1 rad è la misura di un angolo tale per cui la lunghezza arco = raggio

$$\frac{\text{arco di circonferenza}}{\text{raggio}} = \theta \qquad \theta_{\text{gradi}} : 360° = \theta_{\text{rad}} : 2\pi$$

Seno, coseno e tangente

Due triangoli sono simili se hanno gli angoli uguali → lati corrispondenti sono proporzionali.



$$\sin\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}$$

$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

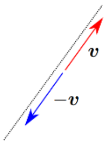
$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta.$$

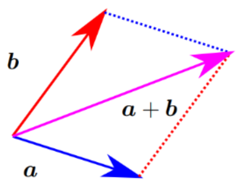
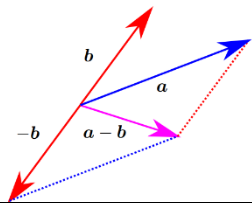
$$\arcsin(\sin\theta) = \theta \quad \text{e} \quad \arccos(\cos\theta) = \theta \quad \text{e} \quad \arctan(\tan\theta) = \theta$$

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\pi/12 = 15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
$\pi/10 = 18°$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
$\pi/6 = 30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4 = 45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3 = 60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\pi/2 = 90°$	1	0	non esiste
$\pi = 180°$	0	-1	0
$3\pi/2 = 270°$	-1	0	non esiste
$2\pi = 360°$	0	1	0

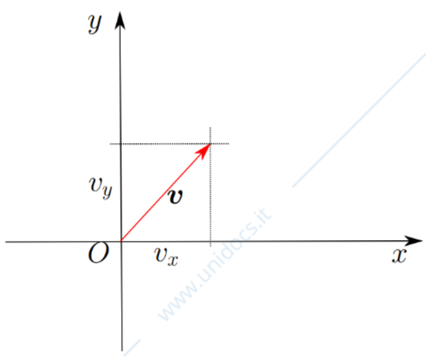
Vettori

- = entità definita tramite modulo, direzione verso.
- si rappresentano con una freccia
- sono indipendenti dalla loro collocazione nello spazio, a meno di specificare il punto di applicazione ("di partenza").
- si indicano con lettere minuscole in grassetto $\boldsymbol{v}$, con una freccia o $\vec{v}$ sottolineati $\underline{v}$.
- Modulo = lunghezza, indicato con |v| o con ||v||
- vettore nullo $\|\boldsymbol{v}\| = 0,$
- vettore opposto



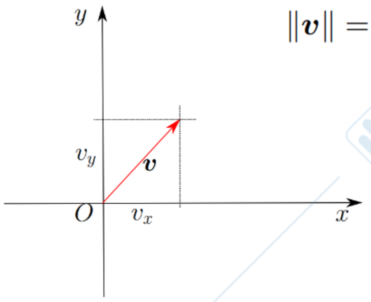
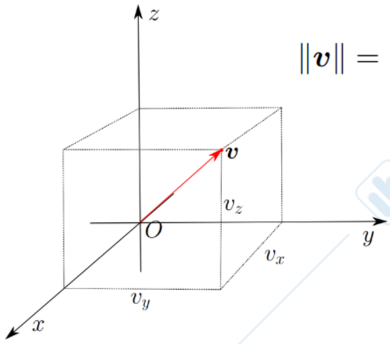
SOMMA	DIFFERENZA
	

.

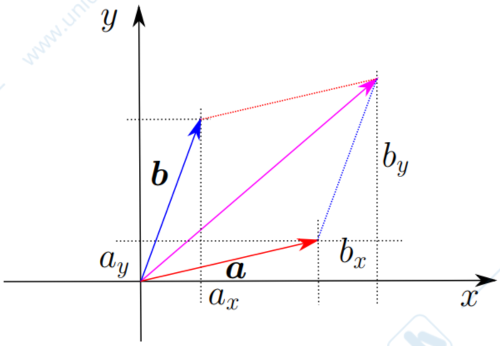


$$\boldsymbol{v}_{\text{riga}} = [v_x, v_y] \qquad \boldsymbol{v}_{\text{colonna}} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$[v_x, v_y]^\top = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

Calcolo modulo in 2D	Calcolo modulo in 3D
teorema di Pitagora $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ 	$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ 

Somma tra due vettori → somma delle componenti



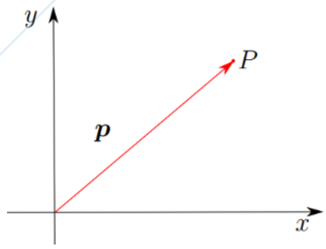
$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x_a - x_b \\ y_a - y_b \end{bmatrix}$$

Punti e vettori

Per ogni punto del piano o dello spazio P posso scrivere il vettore p che, spiccato dall'origine O, indica il punto P.

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$$



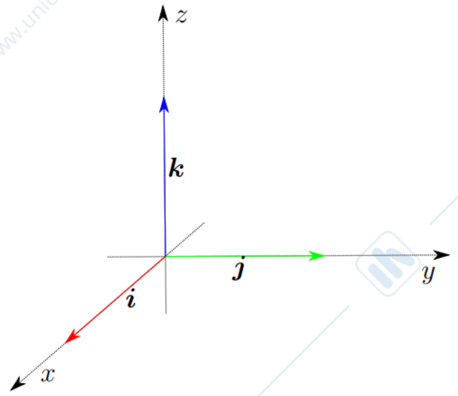
Versori $\hat{\boldsymbol{v}}$

è un vettore con direzione = a v, verso = a v e modulo (o norma) unitario |v| = 1.

Tale vettore viene calcolato, partendo da v, dividendo ogni componente per il modulo, come

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \frac{v_x}{\|\boldsymbol{v}\|} \\ \frac{v_y}{\|\boldsymbol{v}\|} \\ \frac{v_z}{\|\boldsymbol{v}\|} \end{bmatrix} = \left[\frac{v_x}{\|\boldsymbol{v}\|}, \frac{v_y}{\|\boldsymbol{v}\|}, \frac{v_z}{\|\boldsymbol{v}\|} \right]^\top$$

$$\|\hat{\boldsymbol{v}}\| = \sqrt{\frac{v_x^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} + \frac{v_y^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2} + \frac{v_z^2}{\|\boldsymbol{v}\|^2}} = 1.$$



$$\boldsymbol{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Prodotto tra un vettore e uno scalare (restituisce un vettore con direzione =) : moltiplico tutte le componenti del vettore per λ

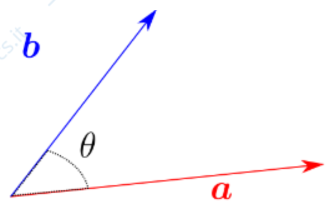
numero reale, $\lambda \in \mathbb{R}$ e il vettore $\boldsymbol{v} = [v_x, v_y]^\top$ $\quad \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{v} = \lambda \begin{bmatrix}v_x\\v_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda v_x\\ \lambda v_y\end{bmatrix}$

Due vettori sono *paralleli* se esiste un numero λ tale che $\quad \boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$

Scomposizione vettore secondo <u>*i, j, k*</u>

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = v_x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + v_y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + v_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_x\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\v_y\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\v_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$$

<table>
<tr><th>Prodotto scalare</th><th>Prodotto vettore</th></tr>
<tr><td>Operazione tra 2 vettori che restituisce uno scalare</td><td>Operazione tra 2 vettori che restituisce un terzo vettore (possibile solo in 3D)</td></tr>
<tr><td>



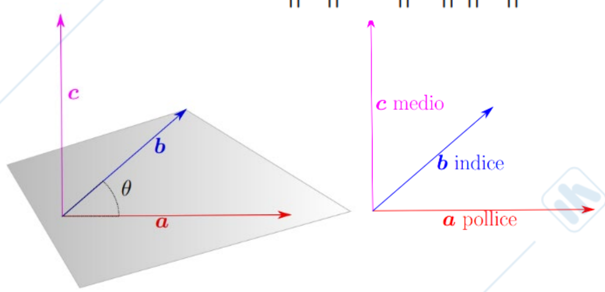
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

</td><td>

c è perpendicolare sia al vettore ***a*** che a ***b***.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

$$\|\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$$



</td></tr>
<tr><td>

- commutativa $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
- modulo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$
- distributiva $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

$$(\alpha\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

Se a o b =0, prodotto =0

</td><td>

anticommutativo $\quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$$

</td></tr>
</table>

$\theta < \frac{\pi}{2}$ angolo acuto $\quad \cos\theta > 0 \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} > 0$

$\theta > \frac{\pi}{2}$ angolo ottuso $\quad \cos\theta < 0 \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} < 0$

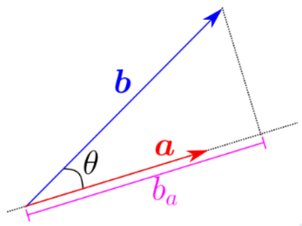
$\theta = \frac{\pi}{2}$ angolo retto $\quad \cos\theta = 0 \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0.$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

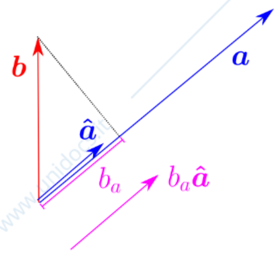
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}$$

$$\theta = \arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}$$

2 vettori sono perpendicolari quando il loro prodotto scalare è nullo



$$b_a = \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}$$



$$b_a\hat{\boldsymbol{a}}$$