

IL ROTORE DI JEFFCOTT

Si consideri un sistema costituito da un albero elastico non inerte, sostenuto alle estremità da due cuscinetti schematizzabili come due appoggi rigidi; sull'albero, in corrispondenza della sua sezione di mezzo, è calettato un disco pesante di massa m (l'asse polare del disco è parallelo all'asse di rotazione).

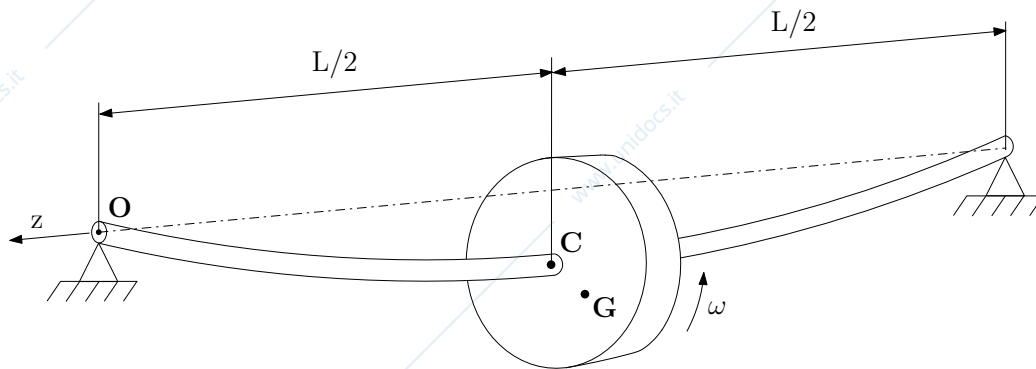


Figura 1: Albero elastico con disco in mezzeria

Si immagina che l'equilibramento statico effettuato sul disco non sia perfetto e pertanto il baricentro G del disco si trovi ad una certa distanza, molto piccola, del centro geometrico del disco C . Quando l'albero ruota con velocità angolare ω costante, la forza centrifuga flette l'albero (Fig. 1), ma l'aver supposto il disco in mezzeria comporta che il suo asse trasli rimanendo parallelo all'asse di rotazione, e quindi non nasca un momento risultante delle forze d'inerzia, almeno per inflessioni simmetriche dell'albero. Il segmento CG è indicato in letteratura come eccentricità ε del disco.

Si vuole ora determinare il moto dell'albero. A questo scopo si faccia riferimento alla Fig. 2, in cui è rappresentato il sistema immaginato sezionato con un piano normale all'asse z congiungente i cuscinetti di estremità e passante per il baricentro G . In detto piano si muove anche il centro C ; quindi il segmento CG , solidale al disco, ruota su questo piano con velocità angolare ω e forma un angolo $\varphi + \beta = \psi$ rispetto all'asse x di riferimento.

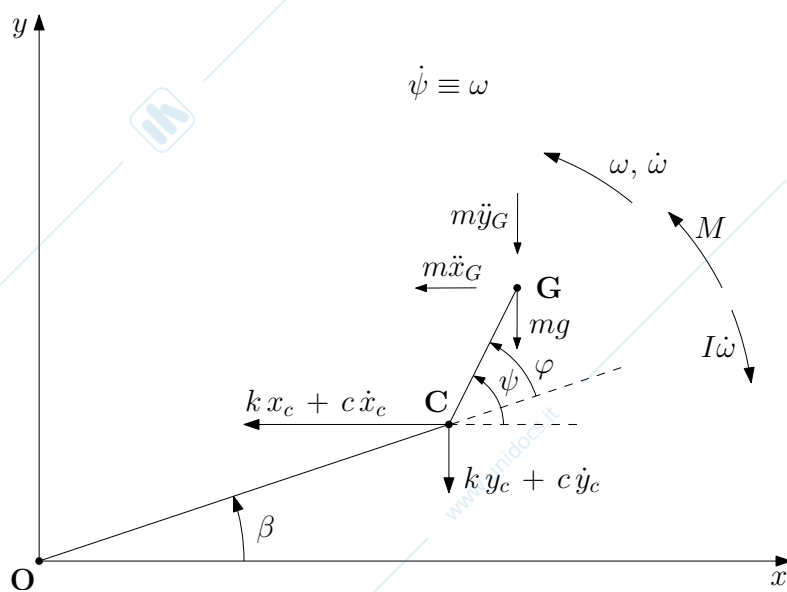


Figura 2: Piano normale all'asse di rotazione

I simboli riportati hanno il seguente significato:

Descrizione	Spiegazione
O	traccia dell'asse di rotazione sul piano $x-y$ del disco
C	centro geometrico del disco
G	baricentro del disco
$CG = \varepsilon = \text{costante}$	eccentricità del disco
$OC = \delta = \delta(t)$	freccia elastica dell'albero
$x-y-z$	terna fissa
$x-y$	piano in cui avviene il moto
k	rigidezza dell'albero (lineare)
c	costante di smorzamento (viscoso)
I	momento d'inerzia polare del disco

Approccio newtoniano

Verranno ora ricavate le equazioni del moto del rotore facendo uso delle leggi di Newton (equilibrio di forze) e delle coordinate cartesiane. Isolato il rotore e messe in evidenza tutte le forze che agiscono su di esso, si hanno le seguenti equazioni di equilibrio:

$$\leftarrow m \ddot{x}_G + c \dot{x}_C + k x_C = 0$$

$$\downarrow m \ddot{y}_G + c \dot{y}_C + k y_C + mg = 0$$

$$\odot_G M - k x_C \varepsilon \sin \psi - c \dot{x}_C \varepsilon \sin \psi + k y_C \varepsilon \cos \psi + c \dot{y}_C \varepsilon \cos \psi - I \ddot{\psi} = 0$$

ove:

$$\begin{cases} x_G = x_C + \varepsilon \cos \psi \\ y_G = y_C + \varepsilon \sin \psi \end{cases}$$

Poiché:

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x}_C - \varepsilon \dot{\psi} \sin \psi & ; & \ddot{x}_G = \underbrace{\ddot{x}_C}_{\text{trascinamento}} - \underbrace{\varepsilon \ddot{\psi} \sin \psi + \varepsilon \dot{\psi}^2 \cos \psi}_{\text{relativo}} \\ \dot{y}_G = \dot{y}_C + \varepsilon \dot{\psi} \cos \psi & ; & \ddot{y}_G = \underbrace{\ddot{y}_C}_{\text{trascinamento}} + \underbrace{\varepsilon \ddot{\psi} \cos \psi - \varepsilon \dot{\psi}^2 \sin \psi}_{\text{relativo}} \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_C + c \dot{x}_C + k x_C = m \varepsilon (\dot{\psi}^2 \cos \psi + \ddot{\psi} \sin \psi) \\ m \ddot{y}_C + c \dot{y}_C + k y_C = m \varepsilon (\dot{\psi}^2 \sin \psi - \ddot{\psi} \cos \psi) - mg \\ I \ddot{\psi} + \varepsilon (k x_C + c \dot{x}_C) \sin \psi - \varepsilon (k y_C + c \dot{y}_C) \cos \psi = M \end{cases}$$

con:

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\psi} \\ \dot{\omega} &= \ddot{\psi} \end{aligned}$$

Caso particolare ($\omega = \text{cost}$, $g = 0$)

Si consideri ora il caso di un rotore avente asse verticale ($g = 0$) e con velocità angolare $\omega = \text{costante}$.

Il sistema precedente si semplifica e si ottiene:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_C + c \dot{x}_C + k x_C = m \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ m \ddot{y}_C + c \dot{y}_C + k y_C = m \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \\ \varepsilon(k x_C + c \dot{x}_C) \sin \omega t - \varepsilon(k y_C + c \dot{y}_C) \cos \omega t = M \end{cases} \quad (1)$$

Per un assegnato valore di ω , le prime due equazioni consentono di ricavare x_C, y_C e, successivamente, dalla terza equazione si ricava M . Ora ci occuperemo esclusivamente delle prime due equazioni, poiché sono sufficienti a ricavare il moto, ovvero:

$$\begin{cases} m \ddot{x}_C + c \dot{x}_C + k x_C = m \varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ m \ddot{y}_C + c \dot{y}_C + k y_C = m \varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{cases} \quad (2)$$

La soluzione del sistema (2) è somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e dell'integrale particolare dell'equazione completa. Il primo corrisponde alle oscillazioni libere del sistema che si smorzano nel tempo a causa dell'azione dissipativa rappresentata dal termine viscoso; pertanto, dopo un tempo sufficientemente elevato, rimane il solo integrale particolare che rappresenta la risposta forzata.

Le equazioni sono DISACCOPPIATE e sono equivalenti a quelle di un sistema "massa-molla-smorzatore" forzato.

Si ha perciò:

$$\begin{cases} x_C = A_1 \cos(\omega t - \alpha_1) \\ y_C = A_2 \sin(\omega t - \alpha_2) \end{cases} \quad (3)$$

E' tuttavia immediato verificare che:

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = \delta = \frac{m \varepsilon \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \\ \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = \tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \end{cases} \quad (4)$$

Si riconosce immediatamente che la traiettoria seguita dal centro C del disco è una traiettoria circolare percorsa, come evidenziato dalle eq.(3), alla velocità angolare ω . Poiché il segmento CG , solidale al disco, ruota con velocità angolare ω , risulta che i segmenti OC e CG non hanno moto relativo in

quanto il ritardo di fase φ è costante rispetto al tempo con ω fissata: pertanto la spezzata OCC ruota rigidamente con la velocità angolare ω . Questo caso, in cui il piano della deformata ruota con la stessa velocità angolare del disco, corrisponde ad un *moto di precessione sincrona* e rappresenta, nel modello ora studiato, l'unico moto possibile a regime. L'angolo di fase φ corrisponde all'angolo di cui è deviato il segmento CG rispetto al segmento OC ; in altre parole il baricentro G non giace sulla retta della freccia elastica.

Il sistema (3) si può quindi riscrivere come:

$$\begin{cases} x_C = \delta \cos(\omega t - \varphi) \\ y_C = \delta \sin(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (5)$$

Indicando con:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \text{velocità critica in assenza di smorzamento}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_c}$$

le (4) diventano:

$$\begin{cases} \delta = \varepsilon \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \end{cases} \quad (6)$$

Analizzando queste due ultime relazioni è possibile trarre le seguenti conclusioni.

Per un assegnato valore del parametro di smorzamento ζ , l'angolo di fase φ cresce al crescere della velocità angolare ω ; quando quest'ultima è inferiore ad ω_c , l'angolo φ è inferiore a 90° e pertanto il baricentro si trova all'esterno della traiettoria percorsa da C ; quando al contrario ω è maggiore di ω_c , allora G si trova all'interno della traiettoria percorsa da C ; nel caso particolare di $\omega = \omega_c$ si ha che CG è perpendicolare ad OC .

Quando si considera il caso ideale di smorzamento nullo, allora la tangente dell'angolo φ è sempre nulla o uguale a 180° in corrispondenza ad ω minore o maggiore di ω_c , pertanto i punti O, C, G sono allineati con G che è posto all'esterno oppure all'interno del segmento OC .

Nel caso di smorzamento nullo ed $\omega = \omega_c$, l'angolo φ risulta indeterminato. In Figura 3 sono rappresentate tre tipiche situazioni di moto a regime.

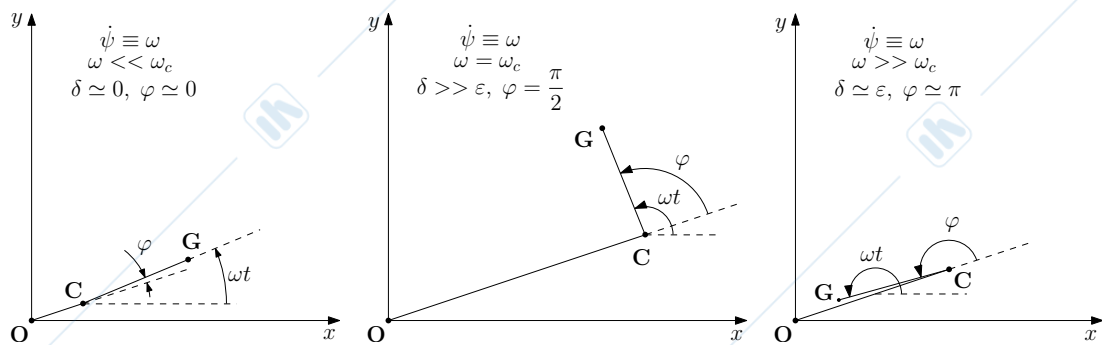


Figura 3: Tipiche situazioni di moto a regime

L'andamento della freccia elastica dell'albero δ , tracciata in funzione della velocità angolare ω , per differenti valori del parametro ζ è rappresentato in Figura 4. Si osserva che la freccia elastica cresce al crescere della velocità angolare e raggiunge un massimo per un valore della velocità angolare che si ricava dalla seguente equazione:

$$\frac{d\delta}{d\omega} = 0$$

Sviluppati i calcoli si ottiene:

$$\omega_s = \frac{\omega_C}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \rightarrow \text{velocità critica} \left(\text{solo con } \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Poiché in generale la quantità ζ^2 è molto piccola rispetto all'unità, risulta che il valore ω_s , in corrispondenza del quale si ha il massimo valore della freccia, coincide praticamente con ω_c . La velocità angolare ω_s è nota come la *velocità critica flessionale* dell'albero ed è anche la velocità per la quale si ha la massima sollecitazione dei cuscinetti

$$F_{supp} = \frac{1}{2} k \delta$$

Essa corrisponde numericamente al valore della pulsazione propria ω_c dell'albero considerato come trave elastica e non inerte.

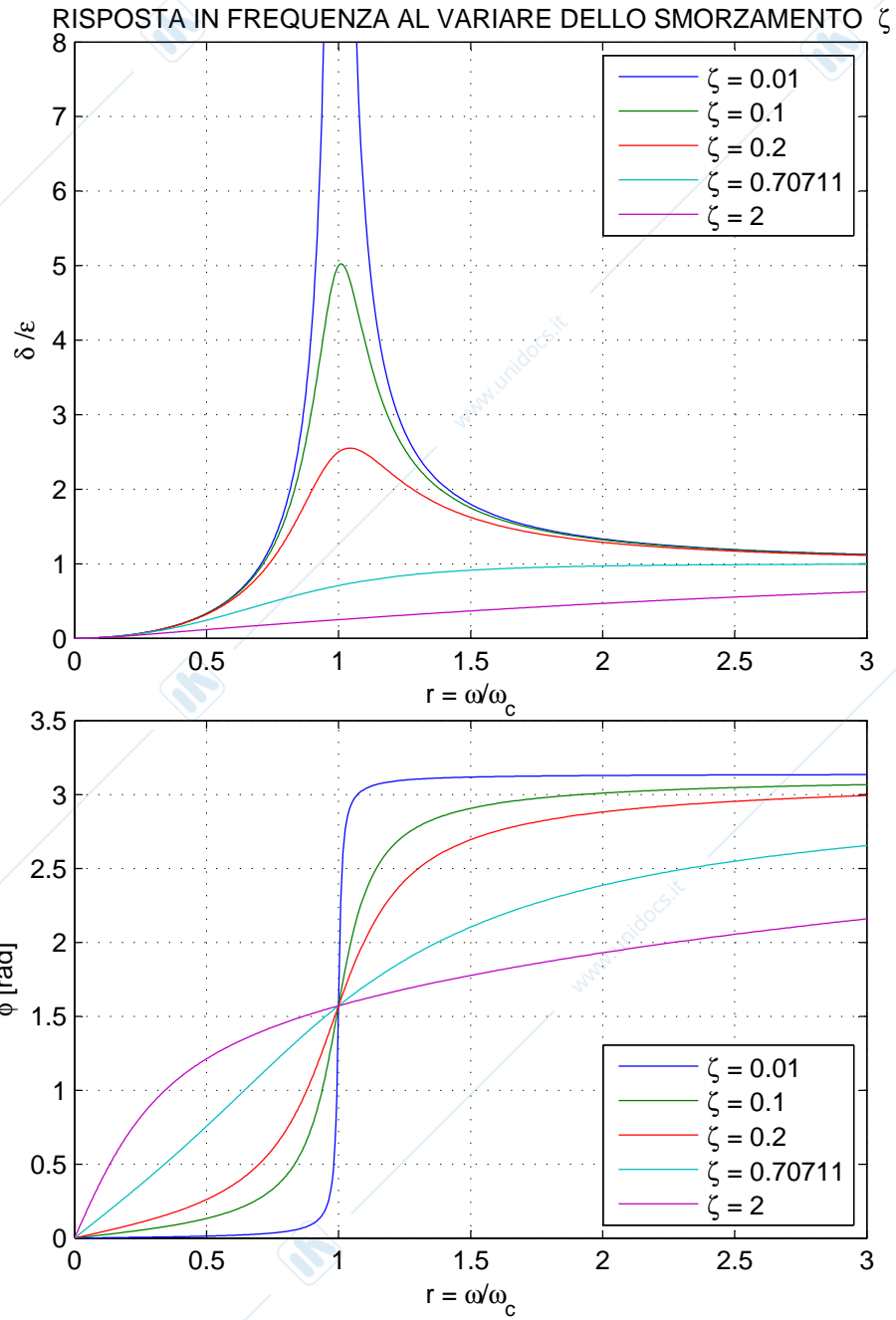


Figura 4: Risposta in frequenza al variare di ζ

Per valori della velocità angolare molto più grandi della pulsazione propria, la freccia elastica diminuisce fino a portarsi asintoticamente al valore corrispondente alla eccentricità ε ; poiché contemporaneamente il baricentro del rotore si è portato all'interno della traiettoria percorsa da C , questo significa che il baricentro tende a portarsi in O , ossia il disco si autocentra. Dal modello ora studiato si ricava che la velocità critica è un caso di risonanza e pertanto, per valori piccoli dell'eccentricità, associati a grandi azioni dissipative, si hanno frecce elastiche contenute.

Si conclude che alla velocità critica si verifica un massimo della inflessione dell'albero, massimo che dipende dall'eccentricità ε , e quindi con una centratura molto accurata (equilibramento) si limita la forza che si scarica sui cuscinetti; l'albero può inoltre ruotare alla velocità critica, per un tempo breve, senza che si verifichino inconvenienti.

Si sottolinea che il modello descritto prevede che il comportamento del rotore sia sempre stabile e che l'albero possa funzionare anche a velocità superiori alla velocità critica; in questo caso il baricentro tende ad avvicinarsi all'asse di rotazione in misura tanto maggiore quanto maggiore è la velocità di rotazione. Nel caso ideale di smorzamento nullo e di perfetta centratura, ossia $\zeta = \varepsilon = 0$, dalla (6) si deduce che la freccia elastica δ è sempre nulla, eccetto che per $\omega = \omega_c$. In quest'ultimo caso infatti la freccia risulta avere una espressione indeterminata; la condizione:

$$\omega^2 = \omega_c^2 = \frac{k}{m}$$

indica che per un qualsiasi valore della freccia δ si ha equilibrio tra la reazione elastica dell'albero $k\delta$ e la forza centrifuga $m\delta\omega^2$; sono queste le condizioni che caratterizzano un *equilibrio indifferente*.

Pertanto, se nel caso reale la velocità critica flessionale di un albero può essere interpretata come un fenomeno di risonanza dovuto ad una forza rotante $m\varepsilon\omega^2$ che eccita le vibrazioni di un albero ipotizzato fermo, nel caso ideale la velocità critica è quella velocità per la quale si realizzano le condizioni di equilibrio indifferente, ossia equilibrio tra le forze di richiamo elastico e le azioni di inerzia, indipendentemente dal valore della freccia δ .

Per consentire la rotazione dell'albero è necessaria una coppia motrice M , il cui valore si ricava calcolando x_C ed y_C e sostituendoli nelle (1), ottenendo:

$$M = k\varepsilon(x_C \sin\psi - y_C \cos\psi) + c\varepsilon(\dot{x}_C \sin\psi - \dot{y}_C \cos\psi) + I\ddot{\psi} \quad (7)$$

Introducendo l'ipotesi

$$\omega = \dot{\psi} = \text{costante}$$

e le espressioni (5) del centro C nella (7), si ha:

$$\begin{aligned}
 M &= k \varepsilon \delta [\cos(\omega t - \varphi) \sin \omega t - \sin(\omega t - \varphi) \cos \omega t] + \\
 &\quad - c \varepsilon \delta \omega [\sin(\omega t - \varphi) \sin \omega t + \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t] = \\
 &= k \varepsilon \delta \sin \varphi - c \varepsilon \delta \omega \cos \varphi = \\
 &= \varepsilon \delta [k \sin \varphi - c \omega \cos \varphi] = \{ \text{dalla definizione di } c \omega \text{ di eq. (4)} \} = \\
 &= \varepsilon \delta \left[k \sin \varphi - (k - m \omega^2) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi \right] = \\
 &= \varepsilon \delta m \omega^2 \sin \varphi
 \end{aligned}$$

In *condizioni stazionarie* ($\omega = \text{costante}$), la componente di forza d'inerzia dovuta all'accelerazione relativa è solo normale (centripeta da $G \rightarrow C$) e non entra nell'espressione della coppia M .

Le equazioni (2) sono particolarmente adatte a essere trattate in forma complessa. Moltiplicata la seconda per l'unità immaginaria i , sommate le equazioni membro a membro, si ha:

$$m(\ddot{x}_C + i \ddot{y}_C) + c(\dot{x}_C + i \dot{y}_C) + k(x_C + i y_C) = m \varepsilon \omega^2 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

e introdotta la coordinata complessa $z_C = x_C + i y_C$, si ottiene:

$$m \ddot{z}_C + c \dot{z}_C + k z_C = m \varepsilon \omega^2 e^{i \omega t}$$

Se, come per le (2), si considera solo l'integrale particolare, si può scrivere:

$$z_C = z e^{i \omega t}$$

con:

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{m \varepsilon \omega^2}{k - m \omega^2 + i c \omega} = |z| e^{i \alpha} \\
 |z| &= \delta = \frac{m \delta \omega^2}{\sqrt{(k - m \omega^2)^2 + (c \omega)^2}} \\
 \tan \alpha &= -\frac{c \omega}{k - m \omega^2} = -\tan \varphi \quad (\text{con } \alpha = -\varphi)
 \end{aligned}$$

ossia un vettore di ampiezza $|z|$ che ruota con velocità angolare ω .