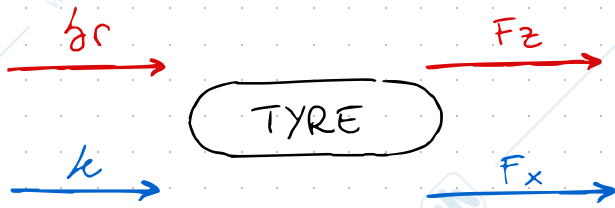
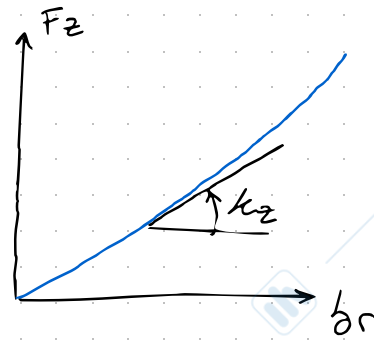


Abbiamo visto che la gomma (tyre) provoca le seguenti dipendenze



con:



Approssimo andamento:

~ LINEARE, con

Pendenza =  $(k_z)$  RIGIDEZZA RADIALE

## ② SIDE SLIP o ANGOLO DI DERIVA

riscrivo Eq di slip in  $f$  del punto C

$$k = \frac{-v_{te} - v_{cx}}{v_{cx}}$$

NUM = velocità tangenziale elemento infinitesimo di pneumatico lungo la direzione di avanzamento

DENOM = velocità di avanzamento EFFETTIVA del centro impronta

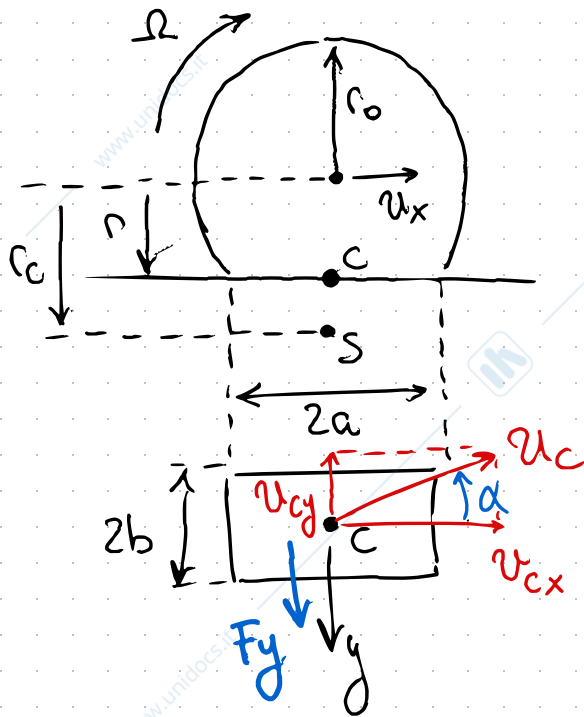
convenzione adapted SAE  $\Rightarrow F_x > 0 \leftrightarrow k > 0$

$(F_y)$   $\rightarrow$  da quale Parametro dipende?

$\alpha$  - angolo di side slip

dove:

$$\tan \alpha = - \frac{v_{cy}}{v_{cx}} \quad \text{SIDE SLIP}$$



• RETTILINEO  $\rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

• CURVA  $\rightarrow F_y \neq 0$  SE c'è scivolamento laterale

inoltre:

$u_{cy} \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 0$   
 $\rightarrow$  Scivolamento laterale

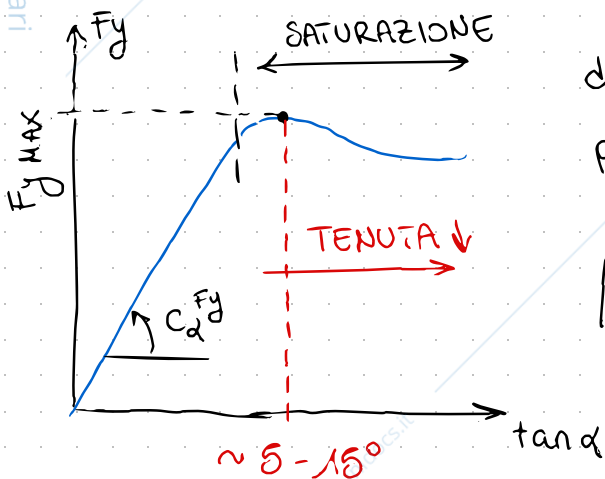
quindi:  $\boxed{\alpha \neq 0 \Rightarrow F_y \neq 0}$

angolo di sideslip POSITIVO  $x$  componente  $u_{cy} < 0$   
 nel sist. ADAPTED SAE, quindi  $\underline{\underline{-u_{cy} > 0}}$

$F_y$  porta ruota a scivolare verso l'esterno curva durante la curva

esempio: giro ruote di  $10^\circ$  MA vado dritto

$\hookrightarrow \underline{\underline{\alpha = 10^\circ}}$  (angolo di deriva)



devo lavorare attorno al valore di picco per generare  $F_{y \max}$  in CURVA

$\boxed{\alpha = 5-15^\circ}$   $\leftarrow$  valore tipico per STRADE ASFALTATE

si ha che:

quando  $\boxed{TENUTA \downarrow \Rightarrow \alpha_{\max} \text{ di } F_{y \max} \uparrow}$

$C_{\alpha}^{F_y}$  = Rigidezza relativa ad  $\alpha$ , detta CORNERING STIFFNESS  
oppure RIGIDEZZA DI DERIVA

Valori tipici:  $\frac{10}{30} \times \text{CARICO } F_z$

Si nota che:  $C_{\alpha}^{F_y} \uparrow \Rightarrow F_y \uparrow$  a parità di  $\alpha$

quindi pneumatico riesce a generare  $F_y \uparrow$  in curva (a parità di deriva  $\alpha$ ) quando è PIÙ RIGIDO

Cornering Stiffness  $\uparrow \Rightarrow$  "Stare sui binari"

esempio

carico:  $F_z = 1000 \text{ N}$  ← carico sul singolo pneumatico

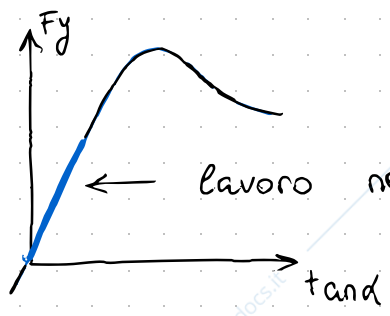
Cornering Stiffness:  $C_{\alpha}^{F_y} = 15 \cdot F_z$   
 $= 15000 \text{ N}$  ← valore tipico Cornering Stiffness

esempio

dato coeff. attrito:  $\mu = 0,9$

trova  $F_y$  quando: 1)  $\alpha = 0,01 \text{ rad} = 0,6^\circ$   
2)  $\alpha = 1 \text{ rad} = 60^\circ$

1)  $\alpha \downarrow \downarrow$



SOLO quando  $\alpha \downarrow$  e sono nel tratto LINEARE

$F_y = C_{\alpha}^{F_y} \cdot \alpha$

da cui:  $F_y = 15000 \cdot \tan 0,01 = \underline{150 \text{ N}}$

②  $\alpha \uparrow \uparrow$

sono nella zona NON LINEARE della curva  $F_y - \tan \delta$   
 noto che:

$$F_{yMAX} = F_z \cdot \mu_y = 900 N$$

da cui:  $F_y < F_{yMAX}$  (perché  $\sim 60^\circ \gg 5-15^\circ$ )

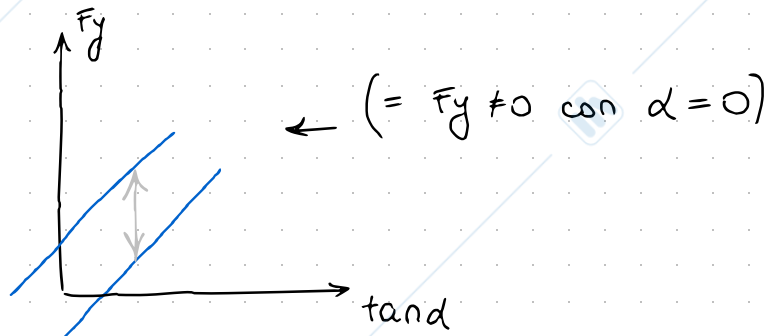
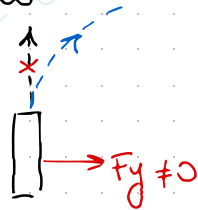
ho 2 motivi per cui avrei  $F_y \neq 0$  quando  $\alpha = 0$

1) macchina NON ben allineata (Assetto NON calibrato)

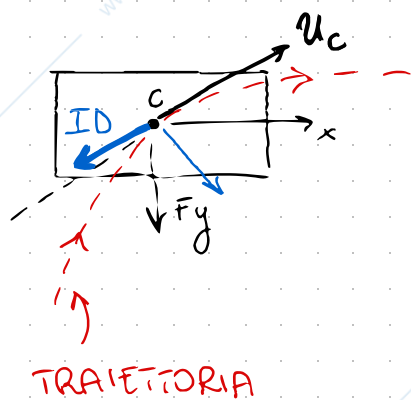
2) PLY-STEER  $\rightarrow$  battistrada si DEFORMA, dunque curve  
 $F_y - \tan \delta$  NON passano per l'origine

pneumatico in

Free-rolling genera  
 una componente  $F_y \neq 0$   
 di SELF-STEER che lo  
 porta a rollare



**INDUCED DRAG**



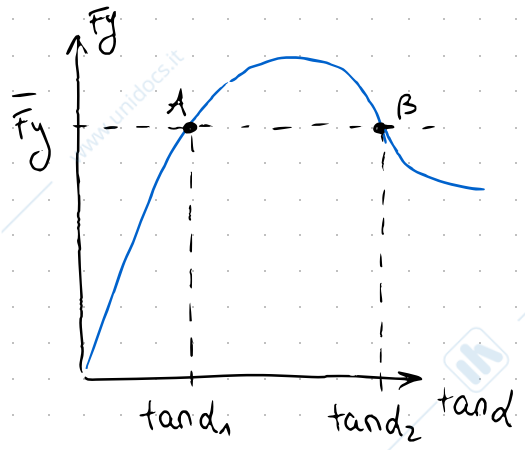
scompongo  $F_y$  lungo le direzioni  $\parallel$  e  $\perp$   
 a  $U_c$  per ottenere la componente:

$$F_{y \text{ send}} \text{ INDUCED DRAG}$$

$\uparrow$  FRENA il veicolo in curva, opponendosi  
 all'avanzamento

per mantenere  $U = \text{cost}$  in curva dovrò quindi accelerare  
 per compensare  $F$  dissipata: curvare  $\Rightarrow$  rallentare

esempio



Ho 2 POSSIBILITA' per generare la STESSA  $F_y$  con  $\alpha \neq$ , quale scelgo?

Soluzione Migliore:  $\alpha$  MIN

↳ MIN Induced Drag:  $F_y$  send

esempio

$\bar{F}_y = 1300 \text{ N}$

$u = 50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$

$D = 1300 \sin \alpha$

$\alpha_1 = 4^\circ$  ← PRIMA del picco

$\alpha_2 = 12^\circ$  ← DOPO il picco

determino: •  $D_1 = 90,7 \text{ N} \Rightarrow P_1 = D_1 \cdot u = 1,3 \text{ kW}$  (1,7 cv)

•  $D_2 = 270 \text{ N} \Rightarrow P_2 = D_2 \cdot u = 3,8 \text{ kW}$  (5 cv)

↑  $3 \times P_1$

NOTA:  $\alpha_1 =$  curva normale e  $\alpha_2 =$  DRIFT  $\Rightarrow$  richiede  $P \uparrow$

③ TURN SLIP

$\varphi_t = - \frac{\dot{\psi}}{u_{cx}}$

← definizione generale

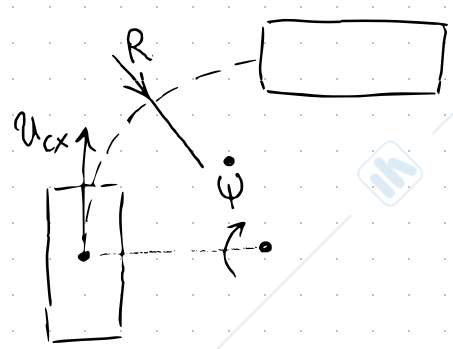
$= - \frac{\dot{\psi}}{\dot{\psi} R}$

←  $\alpha = 0$   
 $\Downarrow$   
 $u_{cx} = \dot{\psi} R$

$= - \frac{1}{R}$

manovre di curva a R basso a bassa velocita  
(es. PARCHEGGIO)

MANOVRA a R ↓



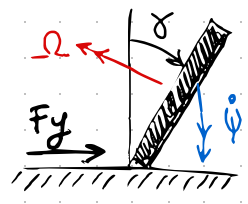
⊙ = VELOCITA' DI IMBARDATA (R) = raggio curva

$\varphi_t \Rightarrow$  pneumatico genera  $F_y \neq 0$  verso e' **INTERNO** costa

$\dot{\psi}$  = velocità con cui  $u_{cx}$  CAMBIA ORIENTAZIONE sul piano xy

in generale NON caratterizzo pneumatico a turn slip

④ SPIN SLIP



pneumatico avanza verso l'interno del foglio con angolo di camber  $\delta \neq 0$  (Moto - Bicicli)

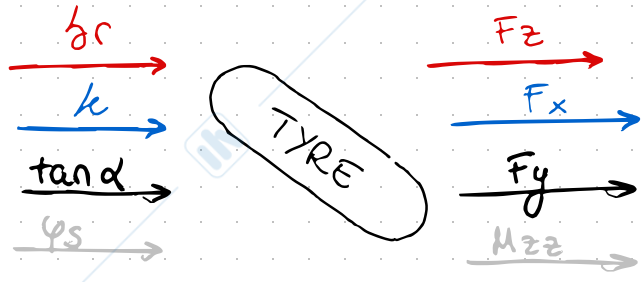
- ha 2 VELOCITÀ ANGOLARI:
- $\dot{\psi}$  di imbardata
  - $-\Omega$  di rotazione

SOMMO le velocità angolari:

$$\varphi_s = - \frac{\omega_z}{u_{cx}} = - \frac{\dot{\psi} - \Omega \sin \delta}{u_{cx}}$$

MA  $-\frac{\dot{\psi}}{u_{cx}} = \varphi_t$  TURN SLIP  $\rightarrow$   $\varphi_s = \varphi_t + \frac{-\Omega \sin \delta}{u_{cx}}$  SPIN SLIP

da cui:



NELLA PRATICA: utilizzo  $\varphi_t$  e  $\delta$  come angoli di slip al posto di  $\varphi_s$

Si nota che  $\varphi_s$  GENERA  $F_y$  e  $M_{zz}$  ← momento di IMBARDATA

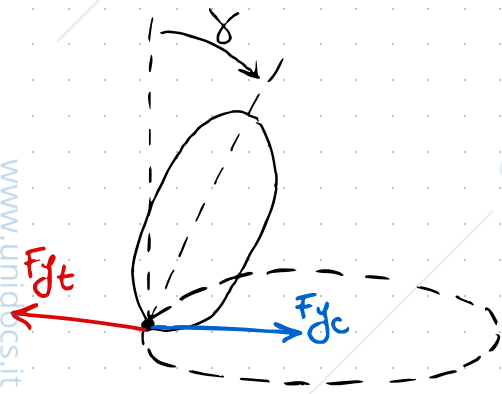
cosa succede quando  $\varphi_s = 0$  ?

Si ha:  $-\frac{\dot{\psi}}{u_{cx}} + \frac{-\Omega \sin \delta}{u_{cx}} = 0$  da cui

- 1)  $\dot{\psi} = \delta = 0 \Rightarrow$  pneumatico in RETTILINEO + NO Camber
- 2)  $[-\Omega \sin \delta = \dot{\psi}] \Rightarrow \delta$  genera  $F_y$  IN e  $\varphi_t$  genera  $F_y$  OUT

In dettaglio, quando  $\boxed{\varphi_s = 0}$  a causa di:

$-R \sin \delta = \dot{\psi}$ , si ha che:



- $F_{yc}$  dovuta al camber (2° termine spin slip) che permette traiettoria circolare alla ruota  $\Rightarrow$  verso INTERNO
- $F_{yt}$  dovuta al turn slip (1° termine  $\varphi_s$ ) generalmente trascurabile, a parte quando facciamo manovre  $u \downarrow$  con  $R \downarrow$  (es parcheggio)  $\Rightarrow$  verso ESTERNO

NOTA: si ha

$$\varphi_s = -\frac{\dot{\psi}}{u_{cx}} + \frac{R \sin \delta}{u_{cx}} = \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

SE  $\boxed{\alpha = 0} \rightarrow \varphi_t = -\frac{1}{R}$

SE  $\boxed{k = 0} \rightarrow$  SCIVOLAMENTO LONGITUDINALE NULLO (FREE ROLLING) da cui:

$$u_{cx} = -2 r_e$$

$$\rightarrow \frac{R}{u_{cx}} = \frac{1}{r_e}$$

da cui:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ k = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \varphi_s = -\frac{1}{R} + \frac{\sin \delta}{r_e} \Rightarrow \delta = \arcsin \left( \frac{r_e}{R} \right) \approx \underline{\underline{0,201 \text{ rad}}}$$

$\nwarrow \sim 0,3 \text{ m}$   
 $\nearrow \sim 1,5 \text{ m}$

# MODI per generare FORZA LATERALE $F_y$

1) tand (MACCHINA) ← deriva

2) Camber (MOTO) ←  $\psi_s$  spin slip

Eq di EQUILIBRIO

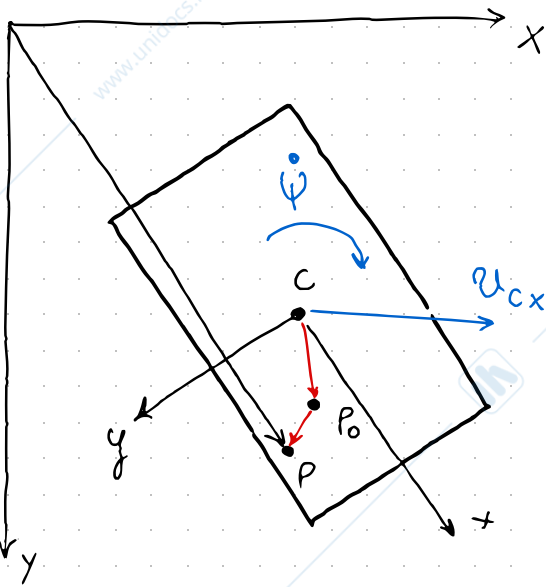
$$\delta_{MAX} = \arctan \frac{a_L}{g}$$

← accelerazione LATERALE

← gravità

## IMPRONTA

considero un sist. di riferimento MOBILE, solidale alla ruota



- $(P_0)$  = posizione del punto P generico dell'impronta PRIMA dell'applicazione delle F attrito

- $(P)$  =  $P_0$  deformato

- $XY$  = sistema FISSO

- $xy$  = TERNA MOBILE, solidale allo pneumatico

legame: VELOCITA' → DEFORMAZIONI  $P_0 \rightarrow P$  → FORZE

avremo:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \dot{\psi} \wedge \vec{CP} + \dot{C}P$$

← cinematica del corpo rigido nel SIST MOBILE

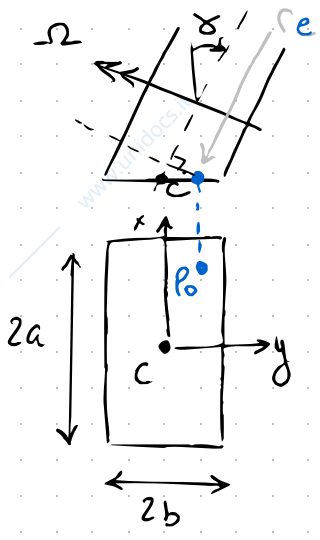
da cui:

$$\begin{cases} v_{Px} \\ v_{Py} \end{cases} = \begin{cases} v_{Cx} \\ v_{Cy} \end{cases} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} \\ \dot{\psi} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} x_0 + \bar{x} \\ y_0 + \bar{y} \end{cases} + \begin{cases} \dot{x}_0 + \dot{\bar{x}} \\ \dot{y}_0 + \dot{\bar{y}} \end{cases}$$

in forma esplicita

NOTA: vettore  $\vec{CP}$  è dato dalla SOMMA delle coordinate del

punto in deformato  $P_0 = (x_0, y_0)$  + DEFORMAZIONI  $P - P_0 = (\bar{x}, \bar{y})$



← [pneumatico con un certo angolo di camber e proiezione (sotto) della sua impronta

per calcolare  $(U_{P_0}) \rightarrow$  trovo il **raggio effettivo nel punto  $P_0$**

RAGGIO EFFETTIVO in  $P_0$

• 1<sup>a</sup> componente:  $-2(re - y_0 \sin \delta)$

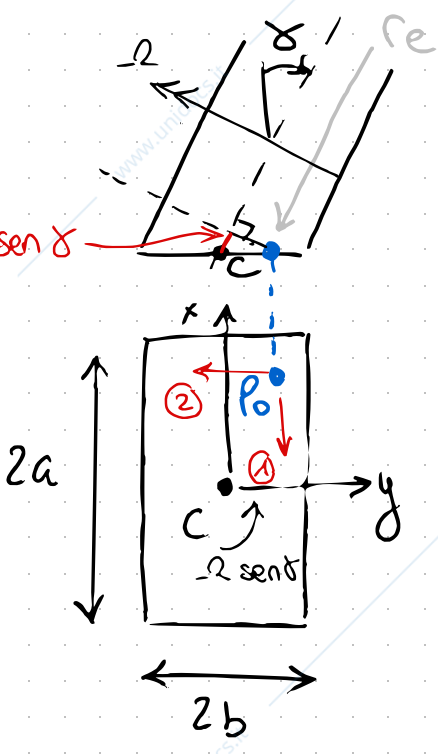
$$\hookrightarrow \boxed{\dot{x}_0 = -2(re - y_0 \sin \delta)}$$

dovuta al ROTOLAMENTO dello pneumatico

• 2<sup>a</sup> componente:  $-2 \sin \delta \cdot x_0$

$$\hookrightarrow \boxed{\dot{y}_0 = -x_0 - 2 \sin \delta}$$

NOTA: uso  $(r_e)$  e non  $r$  riferito al punto C  
 $x_k$  generazione delle F è legata ad  $\delta$   
 e SLIP RATIO  $k \leftrightarrow r_e$

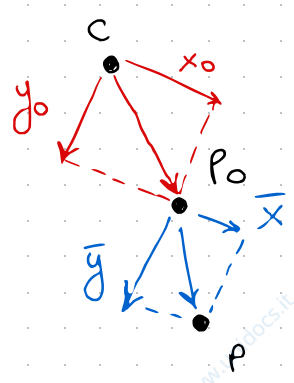


Sappiamo poi che le DEFORMAZIONI del punto dell'impronta P sono funzioni di:

- POSIZIONE  $x_0, y_0$  ← coord in Tema MOBILE
- TEMPO  $t$

da cui:

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(x_0, y_0, t) \\ \bar{y} = \bar{y}(x_0, y_0, t) \end{cases}$$



• IPOTESI SEMPLIFICATIVE

1)  $\dot{y}_0 \downarrow$  => **camber**  $\downarrow\downarrow$  nelle auto, quindi la velocità di spostamento laterale di  $P_0$  sarà  $\downarrow$

2)  $\bar{x}$  e  $\bar{y} \downarrow$  => la deformazione dello pneumatico a causa dell'ATTRITO sarà relativamente  $\downarrow$  quindi  $P \approx P_0$

3)  $\frac{\partial y}{\partial y_0}$  e  $\frac{\partial x}{\partial y_0} \downarrow$  =>  $u$  LATERALE trascurabile 4) Configurazione DEFORMATA e INDEFORMATA sono confondibili  
 $\hookrightarrow x_0 \approx x$  e  $y_0 \approx y$

detto ciò  $\rightarrow$  esplicito sistema lineare a partire da Eq vettoriale

$$\begin{cases} u_{px} = u_{cx} - \dot{\psi} (y_0 + \bar{y}) + \dot{x}_0 + \dot{\bar{x}} \\ u_{py} = u_{cy} + \dot{\psi} (x_0 + \bar{x}) + \dot{y}_0 + \dot{\bar{y}} \end{cases}$$

Sostituisco  $\dot{x}_0$  e  $\dot{y}_0$  determinati e definisco

$$\begin{cases} x = (x_0 + \bar{x}) \\ y = (y_0 + \bar{y}) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{\bar{x}} \\ \dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{\bar{y}} \end{cases}$$

conoscendo i parametri di dipendenza di  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , le loro derivate generali sono:

$$\dot{\bar{x}} = \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_0} \dot{x}_0}_{u \text{ longitudinale}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_0} \dot{y}_0}_{u \text{ laterale } (\downarrow\downarrow)} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$$

da ipotesi (2)

$$\dot{\bar{y}} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y_0} \dot{y}_0 + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}$$

note le ipotesi semplificative, le velocità relative di deformazione tra P e P<sub>0</sub> diventano:

$$\bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \cancel{\frac{\partial \bar{x}}{\partial y_0} \dot{y}_0} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \implies \bar{x} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \dot{x}_0 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$$

$$\bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \cancel{\frac{\partial \bar{y}}{\partial y_0} \dot{y}_0} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \implies \bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \dot{x}_0 + \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}$$

da cui:

$$u_{p_x} = u_{cx} - \dot{\psi} y + \dot{x}_0 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \dot{x}_0 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}$$

ora so che:

$$\begin{cases} k = \frac{-2 r e - u_{cx}}{u_{cx}} \rightarrow u_{cx} = -k u_{cx} - 2 r e \\ \tan \delta = -u_{cy} / u_{cx} \\ \varphi_s = -\frac{\dot{\psi} - 2 \sin \delta}{u_{cx}} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} u_{p_x} &= \frac{-k u_{cx} \oplus 2 r e}{u_{cx}} - \dot{\psi} y_1 \ominus \frac{-2 (r e - y_0 \sin \delta)}{+ \dot{x}_0} \cdot \left( 1 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \\ &= -k u_{cx} - \dot{\psi} y + \underbrace{-2 y_0 \sin \delta}_{= \varphi_s y u_{cx}} - \underbrace{-2 (r e - y_0 \sin \delta)}_{= u_{cx} (1+k)} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \\ &= \boxed{-k u_{cx} + u_{cx} y (\varphi_s) - u_{cx} (1+k) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}} \end{aligned}$$

NOTA: si nota che  $u_{p_x}$  velocità del punto P lungo l'asse x della Terna MOBILE è legata ai valori degli SLIP  $\rightarrow$  SLIP RATIO e SPIN SLIP