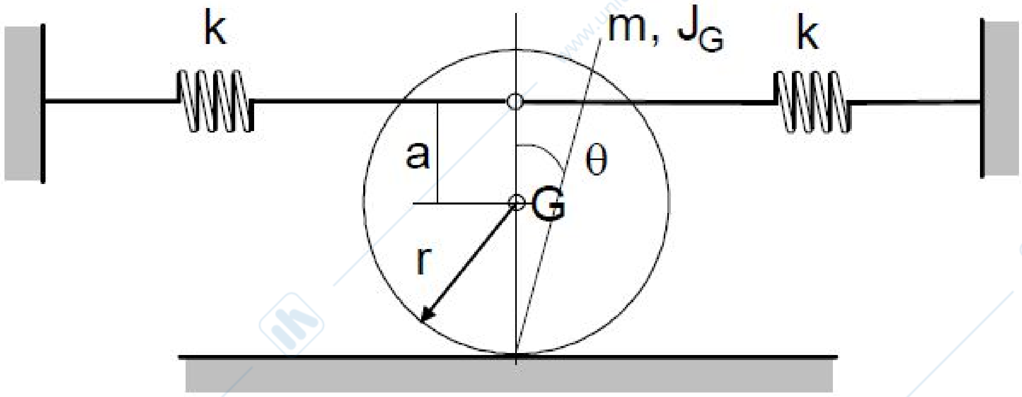
Metodo energetico di Rayleigh

Es. 1

Applicando il metodo energetico di Rayleigh trovare la frequenza naturale di oscillazione del sistema rappresentato in figura, costituito da un cilindro omogeneo di raggio *r*, massa *m* e momento di inerzia baricentrico J_G, vincolato a telaio da due molle di rigidezza *k*, nell'ipotesi che il cilindro rotoli sul piano senza strisciare.

Dati:
m massa del cilindro
r raggio del cilindro
k rigidezza delle molle



a distanza tra il baricentro del disco e il punto di attacco delle molle

Risoluzione:

Per trovare la prima frequenza naturale del sistema si utilizza il metodo dell'energia di Rayleigh, in cui il quadrato della pulsazione viene calcolato come:

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}}$$

Si procede al calcolo delle due energie: per quanto riguarda l'energia potenziale, si considera quella sviluppata dalle due molle poste in parallelo tra di loro

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot [\theta \cdot (a + r)]^2$$

Esprimendo la funzione d'angolo come $\theta = \theta_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, si ottiene:

$$V = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (a + r)^2 \cdot sin^2(\omega t + \alpha) \cdot \theta_0$$

Tuttavia nel coefficiente di Rayleigh compare il valore massimo dell'energia potenziale, che si ottiene ponendo il seno pari a 1 ed eliminando la dipendenza dal tempo:

$$V_{max} = k \cdot (a+r)^2 \cdot \theta_0$$

Per l'energia cinetica si considera il moto di rotazione dell'intero cilindro attorno al suo baricentro e il moto del baricentro stesso:

$$T = \frac{1}{2} \cdot J_G \cdot (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r\dot{\theta})^2$$

Sostituendo l'espressione di θ e ricordando che per un cilindro omogeneo vale $J_G = \frac{1}{2}mr^2$:

$$T = \frac{3}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \theta_0 \cdot cos^2(\omega t + \alpha)$$

Calcolando il massimo:

$$T_{max} = \frac{3}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \theta_0 = \tilde{T} \cdot \omega^2$$

L'espressione delle pulsazioni risulta quindi:

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}}$$

Ma, avendo preso i valori massimi sia dell'energia potenziale che dell'energia cinetica, possiamo scrivere:

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}} = \frac{4k \cdot (a+r)^2}{3mr^2}$$

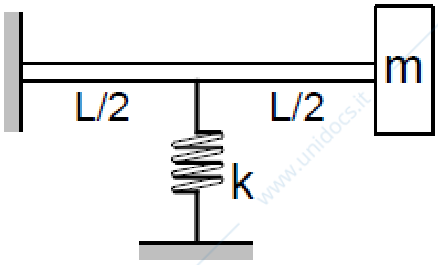
Da cui la pulsazione naturale risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k \cdot (a+r)^2}{3mr^2}}$$

Es. 2

Utilizzare il metodo di Rayleigh per calcolare la prima frequenza propria del sistema rappresentato in figura.

La trave ha modulo elastico E, momento di inerzia di sezione I, sezione S, densità ρ ed alla sua estremità si trova una massa concentrata m. Nella sua mezzeria la trave è collegata a telaio mediante una molla di rigidezza k. Si suggerisce di impiegare la funzione di tentativo $\varphi(x) = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$.



Risoluzione:

Lo spostamento verticale è espresso dalla funzione $v(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t) = \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \cdot \sin \omega t$, dipendente sia dallo spazio che dal tempo.

Si calcola la prima frequenza propria attraverso il metodo di Rayleigh; il calcolo dell'energia potenziale porta a:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2}k[v(x,t)]^2{}_{x=L/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)^2 sin^2(\omega t)\, dx + \frac{1}{2}k \cdot sin^2(\omega t) \cdot [\varphi(x)]^2{}_{x=L/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(EI\frac{12}{L^3} + k\frac{25}{64}\right) \cdot sin^2(\omega t)$$

Si considera l'energia potenziale massima ponendo $sin^2(\omega t) = 1$:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\left(EI\frac{12}{L^3} + k\frac{25}{64}\right)$$

L'energia cinetica tiene conto dello spostamento della massa concentrata all'estremità della trave e della flessione della trave stessa, studiata come corpo continuo:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right]^2_{x=L} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \rho S\omega^2 cos^2(\omega t)\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]^2 dx + \frac{1}{2}m4\omega^2 cos^2(\omega t) \\
&= \frac{1}{2}\omega^2 cos^2(\omega t)\left[\rho S\frac{33}{35}L + 4m\right]
\end{aligned}
$$

Come fatto per l'energia potenziale, si considera il valore massimo di energia cinetica:

$$T_{max=}\frac{1}{2}\omega^2\left[\rho S\frac{33}{35}L + 4m\right] = \tilde{T}\omega^2$$

Si può quindi esprimere il coefficiente di Rayleigh come

$$\omega^2 = \frac{EI\frac{12}{L^3} + k\frac{25}{64}}{\rho S\frac{33}{35}L + 4m}$$

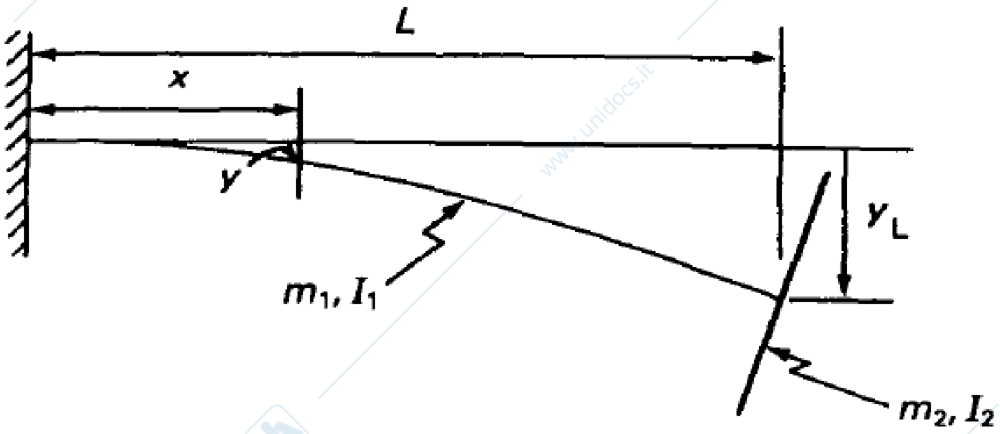
Estraendo la radice quadrata del coefficiente si ottiene la prima pulsazione propria, che risulta pari a:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{EI\frac{12}{L^3} + k\frac{25}{64}}{\rho S\frac{33}{35}L + 4m}}$$

Es. 3

Un albero rigido in acciaio, di 25 mm di diametro e lungo 0.45 m, è incastrato rigidamente ad un'estremità mentre all'altra è montato ad un volano di acciaio. Il volano può essere studiato come un anello di diametro esterno pari a 0.6 m e sezione quadrata di lato 20 mm, con bracci rigidi di massa trascurabile giacenti nel piano medio dell'anello.

Calcolare le frequenze delle vibrazioni flessionali libere utilizzando il metodo dell'energia di Rayleigh; si assuma come funzione di tentativo $y = y_L\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right)$.



Risoluzione:

Il moto del sistema è descritto da una funzione dipendente sia dallo spazio che dal tempo (dove la funzione di tentativo y è dipendente dal solo spazio):

$$v(x,t) = y(x) \cdot \sin(\omega t + \alpha) = y_L\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right) \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

Si sceglie di calcolare le pulsazioni del sistema attraverso il quoziente di Rayleigh, la cui espressione è:

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}}$$

Occorre quindi calcolare l'energia potenziale e l'energia cinetica del sistema.

Per quanto riguarda l'energia potenziale, la sua espressione è:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI_1\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

Svolgendo la derivata seconda della funzione v rispetto alla variabile dello spazio x, si ottiene

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI_1\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx \cdot (\sin(\omega t + \alpha))^2$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Tuttavia nel quoziente di Rayleigh compare il valore massimo dell'energia potenziale, che si ottiene eliminando la dipendenza dal tempo e quindi ponendo il seno pari a 1:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^L EI_1 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

Per l'energia cinetica bisogna tenere conto di due diversi contributi, quello della barra e quello del volano, che rappresentano rispettivamente un sistema continuo e uno discreto: per quanto riguarda il volano, bisogna considerare sia l'energia dovuta allo spostamento del baricentro (disposto in x=L) che quella dovuta alla rotazione:

$$T = T_{barra} + T_{volano}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{m_1}{L}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{\partial v(L,t)}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_L\right)^2$$

Derivando l'espressione di v rispetto a spazio e tempo si ottiene l'espressione completa dell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}\left(\int_0^L \frac{m_1}{L} y^2 dx + m_2 {y_L}^2 + I_2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_L^2\right) \cdot \omega^2 \cdot (\cos(\omega t + \alpha))^2$$

Come già fatto per l'energia potenziale, si ottiene l'energia cinetica massima ponendo il coseno unitario ed eliminando la dipendenza dal tempo, ottenendo così:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\left(\int_0^L \frac{m_1}{L} y^2 dx + m_2 {y_L}^2 + I_2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_L^2\right) \cdot \omega^2 = \tilde{T} \cdot \omega^2$$

Avendo preso i valori massimi delle due energie, ottenuti rispettivamente per sin=1 e cos=1, possiamo scrivere:

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}} = \frac{\int_0^L EI_1 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^L \frac{m_1}{L} y^2 dx + m_2 {y_L}^2 + I_2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_L^2}$$

Risolvendo l'integrale dell'energia potenziale

$$V_{max} = EI_1 {y_L}^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \int_0^L \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right)^2 dx = EI_1 {y_L}^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \cdot \frac{L}{2}$$

E dell'energia cinetica

$$\tilde{T} = \int_0^L \frac{m_1}{L} {y_L}^2 \left[1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right) + \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right)^2\right] dx + m_2 {y_L}^2 + I_2 {y_L}^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$$
$$= \frac{m_1}{L} {y_L}^2 \left(L - \frac{4L}{\pi} + \frac{L}{2}\right) + m_2 {y_L}^2 + I_2 {y_L}^2 \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$$

Si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{EI_1\left(\frac{\pi}{2L}\right)^4 \cdot \frac{L}{2}}{\frac{m_1}{L}\left(L - \frac{4L}{\pi} + \frac{L}{2}\right) + m_2 + I_2\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2}$$

Si sostituiscono i valori numerici delle grandezze, ricordando che la densità dell'acciaio è pari a $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$;

$E = 207 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

$L = 0.45 \text{ m}$

$I_1 = {}^{\pi}/_{64} \times 2.5^4 \times 10^{-8} = 1.916 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

$m_1 = 7850 \times {}^{\pi}/_{4} \times (0.025)^2 \times 0.45 = 1.732 \text{ kg}$

$m_2 = 7850 \times \pi \times (0.02)^2 \times 0.58 = 5.71 \text{ kg}$

$I_2 = {}^{1}/_{2} \times 5.71 \times \left({}^{0.58}/_{2}\right)^2 = 0.24 \text{ kg m}^2$

Si ottiene così il valore del quoziente di Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{1.325 \times 10^5}{9.026} = 14.7 \times 10^3 \,(rad/s)^2$$

Da cui è possibile ricavare la pulsazione naturale e la frequenza associata:

$$\omega = 121 \; rad/s \qquad\qquad f = 19.3 \; Hz$$