RIPASSO SULLE MATRICI

1. Definizione di matrice

Una ***matrice*** (di numeri reali) è una tabella di m x n numeri disposti su m righe e n colonne.

I numeri che compaiono nella tabella si dicono ***elementi della matrice*** .

Ad esempio, il quadro di numeri

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & -5 & 6 & -8 & -4 \\ 3 & 3 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

disposto su 3 righe e 5 colonne è una matrice 3 x 5.

In generale gli elementi di una matrice A si indicano con il simbolo a_{ij} dove il primo indice *i* indica la riga di appartenenza mentre il secondo indice *j* precisa la colonna a cui l'elemento appartiene, così ad esempio si ha

$$a_{25} = \text{elemento che compare nella seconda riga e quinta colonna} = -4$$

In generale una matrice A di m righe e n colonne si denota con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1j} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2j} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{ij} & .. & a_{in} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mj} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

oppure in forma più sintetica $A = (a_{ij})$ $i = 1 .. m$, $j = 1 .. n$

In generale le matrici sono denotate con lettere maiuscole dell'alfabeto mentre i loro elementi con la corrispondente lettera minuscola abbinata al doppio indice.

Il numero di righe e di colonne di una matrice è detto ***ordine*** o ***dimensione*** della matrice.

1.1 Uguaglianza tra matrici

Due matrici A e B si dicono ***uguali*** se hanno la stessa dimensione e se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i , j

Esempio

Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Si osservi che $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i = 1 , 2 , j = 1 , 2 , 3 mentre $a_{21} \neq c_{21}$ e quindi A = B ma $A \neq C$

1.2 Vettori riga e vettori colonna

Una matrice costituita da una sola riga è detta ***vettore riga*** .

Ad esempio

$[12 \quad 1 \quad -3]$ è un vettore riga

Una matrice costituita da una sola colonna è detta ***vettore colonna*** .

Ad esempio

$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ è un vettore colonna

1.3 Matrice quadrata

Una matrice è detta ***quadrata*** se il numero delle righe è uguale al numero delle colonne.

In questo caso il numero delle righe (colonne) è detto ordine della matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

A è una matrice quadrata di ordine 3

1.4 Diagonale principale

Data una matrice quadrata di ordine n, si definisce ***diagonale principale*** di A l'insieme degli elementi di uguale indice ovvero:

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$$

Esempio

Rispetto alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

la diagonale principale è costituita dagli elementi: 2 , 3 , 9

1.5 Matrice Identità

Una matrice quadrata avente gli elementi della diagonale principale uguali a 1 e i restanti uguali a zero è detta ***matrice identità***.

Indicheremo la matrice identità con I o con I_n se ne dobbiamo precisare l'ordine.

Esempio

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6 Matrice triangolare inferiore (superiore)

Una matrice ***triangolare inferiore*** (***superiore***) è una matrice quadrata i cui elementi al di sopra (sotto) della diagonale principale sono tutti nulli.

Matrice triangolare inferiore:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ 0 & 0 & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.7 Matrice diagonale

Una matrice quadrata è detta ***diagonale*** se $a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \cdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si osservi che una matrice diagonale è simmetrica, ed è sia triangolare superiore che inferiore

1.8 Matrice Trasposta

Si dice ***trasposta*** di una matrice A e si indica con il simbolo A^T oppure A', la matrice ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne.

Esempio

Data la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

la sua trasposta è A^T :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Evidentemente se A è m x n allora A^T è di ordine n x m. In particolare il trasposto di un vettore riga è un vettore colonna e viceversa.

Se $n \neq m$ la trasposta di A è sicuramente diversa da A avendo le due matrici diverse dimensioni.

Anche nel caso di matrici in cui m = n (ossia di matrici quadrate) la trasposta è in generale diversa dalla matrice data.

Esempio

Rispetto alla matrice quadrata A:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

la sua trasposta è A^T (o A')

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Si osservi che $A \neq A^T$

Solo nel caso in cui la matrice quadrata è simmetrica, $A=A^T$

$$A^T=A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.9 Matrice simmetrica

Sia A una matrice quadrata di ordine n. A è detta ***simmetrica*** se: $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i,j con. $i \neq j$

Esempio

Si considerino le matrici

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Risulta $A = A^T$, $B \neq B^T$ ovvero A è una matrice simmetrica mentre B non lo è.

1.10 Rango

Si dice **rango** di A il massimo numero di righe *linearmente indipendenti* di A. In generale, due vettori sono linearmente indipendenti se l'unica soluzione di λ_1 a + λ_2 b =0 (dove λ_i sono scalari, mentre a e b vettori) è: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

1.11 Traccia

La traccia di una matrice quadrata nxn è la somma dei suoi elementi sulla diagonale principale.

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Si può dimostrare che:

Tr (cA) = c(Tr(A))

Tr (A') = Tr (A)

Tr (A+B) = Tr (A) + Tr (B)

Tr (AB) = Tr (BA)

Tr (I_K) = K

1.12 Matrice idempotente

Si definisce *idempotente* una matrice quadrata tale che: A=AA

1.13 Matrice definita positiva

Una matrice quadrata A si dice definita positiva se, per ogni vettore x non nullo, risulta: $x^T Ax > 0$

2. *Operazioni tra matrici*

2.1 Somma di matrici

Siano $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$ due matrici aventi la stessa dimensione m x n.

Si definisce somma delle matrici A e B, la matrice C = A + B il cui generico elemento è dato da

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, \forall j$$

Si tratta in pratica di sommare tra loro gli elementi di ugual posizione di riga e colonna.

Ovviamente se A e B sono m x n anche C è m x n.

Esempio

Si considerino le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 13 \\ -3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

così ottenuta:

$c_{11}=a_{11}+b_{11}= 1 + (-1) = 0$

$c_{12}=a_{12}+b_{12} = 0 + 3 = 3$

$c_{13}=a_{13}+b_{13}= 6 + 7 = 13$

$c_{21}=a_{21}+b_{21}= -2 + (-1) = -3$

$c_{22}=a_{22}+b_{22}= 3 + 2 = 5$

$c_{23}=a_{23}+b_{23}= (-4) + 9 = 5$

Proprietà della somma

Poichè la somma tra matrici si esegue sommando gli elementi di ugual posizione che sono numeri reali, è facile verificare che essa soddisfa le seguenti proprietà:

Proprietà Associativa

Siano A , B , C matrici di dimensione m x n risulta

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Proprietà Commutativa

Siano A e B matrici m x n risulta

$$A + B = B + A$$

Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma

Sia A una matrice m x n, esiste una matrice 0 di dimensione m x n avente tutti gli elementi uguali a zero, detta **matrice nulla** , tale che

$$A + 0 = A$$

la matrice nulla 0 è detta elemento neutro rispetto alla somma.

Esistenza dell'opposto

Per ogni matrice A m x n esiste una matrice denotata con -A, tale che A + (-A) = 0

-A è detta **matrice opposta** di A e si ottiene da A cambiando ordinatamente di segno i suoi elementi

$$-A = (-a_{i,j}) \ \forall i, \forall j$$

2.2 Prodotto di una matrice per uno scalare

Dato un numero reale k (detto scalare) ed una matrice $A = (a_{i,j})$, si definisce prodotto della matrice A per lo scalare k la matrice indicata con k A il cui generico elemento è $k\, a_{i,j}$

Esempio

Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

e lo scalare k = 3

$$k\,A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 12 & 21 & 18 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che (-1) A = -A, ovvero il prodotto tra lo scalare -1 e la matrice A dà come risultato l'opposta di A.

Proprietà del prodotto per uno scalare

Anche nel caso del prodotto per uno scalare è immediato verificare le seguenti proprietà

Per ogni matrice A,B di dimensione m x n e per ogni k,h numeri reali risulta

1) (k + h) A = k A + h A

2) k (A + B) = k A + k B

3) (k h) A = k (h A)

4) 1 A = A

Osservazione

- Essendo i vettori particolari matrici valgono per essi le stesse operazioni con le relative proprietà

- L'insieme delle matrici m x n dotato delle 2 operazioni di somma e prodotto per uno scalare con le relative proprietà è uno *spazio vettoriale*

2.3 Prodotto tra matrici

Sia A una matrice m x n e B una matrice n x k, si definisce *prodotto* tra le matrici A e B la matrice C = A B il cui generico elemento $c_{i,j}$ è la somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga di A per i corrispondenti elementi della j-esima colonna di B, ovvero

$$c_{ij} = \sum_{z=1}^{n} a_{iz} b_{zj}$$

il prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B così definito è detto *prodotto scalare* .

La matrice prodotto C ha tante righe quante sono le righe di A e tante colonne quante sono le colonne di B.

Osservazione

Per verificare la possibilità di poter moltiplicare la matrice A di ordine p x q con la matrice B di ordine r x s conviene scrivere

(p x q)(r x s)

Si hanno così quattro numeri: 2 esterni (p ed s) e 2 interni (q e r). E' possibile effettuare il prodotto A B ***se e solo*** se gli interni coincidono cioè q = r.

In tal caso la matrice C = A B ha per ordine quello individuato dai due numeri esterni presi nell'ordine, cioè p x s.

Il prodotto tra matrici è anche detto *prodotto riga colonna* .

Esempio

Si considerino le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Poichè A ha dimensione (2 x 3) e B (3 x 4) è possibile eseguire il prodotto tra queste due matrici e la dimensione di C = A B è (2 x 4).

Vediamo come si determina tale matrice.

L'elemento di posto c_{11} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (2\cdot1+1\cdot2+(-1)\cdot(-1)) = 5$$

c_{12}= (I riga di A)x(II colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= (2\cdot1+1\cdot(-3)+(-1)\cdot(-1)) = 0$$

c_{13} = (I riga di A)x(III colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

= (2·2+1·1+(-1)·5))

c_{14} = (I riga di A)x(IV colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

= (2·2+1·3+(-1)·2) = 5

c_{21} = (II riga di A)x(I colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

= ((-2)·1+3·2+4·(-1)) = 0

c_{22} = (II riga di A)x(II colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

= ((-2)·1+3·(-3)+4·(-1)) = -15

c_{23} = (II riga di A)x(III colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$=((-2)\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 5)) = 19$$

c_{24} = (II riga di A)x(IV colonna di B) =

$$= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= ((-2)\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 2) = 13$$

Ovvero

$$C = A\,B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -15 & 19 & 13 \end{bmatrix}$$

Osservazione

Con riferimento alle matrici A e B dell'esempio precedente non è possibile effettuare il prodotto BA in quanto considerando le dimensioni (3 x 4) (2 x 3) gli interni non coincidono.

E' possibile effettuare sia il prodotto A B che il prodotto B A quando in (p x q) (r x s) coincidono sia gli elementi interni che gli elementi esterni. Risulta però in generale AB≠BA.

Da ricordare:

*Il prodotto tra matrici **NON E' SEMPRE** eseguibile*

Se è possibile eseguire il prodotto A B non è detto che si possa eseguire il prodotto B A e quindi bisogna stare attenti all'ordine in cui si esegue la moltiplicazione.

Se due matrici sono quadrate e dello stesso ordine si può eseguire sia il prodotto A B che il prodotto B A ottenendo una matrice quadrata dello stesso ordine, anche in questo caso però il prodotto non è in generale commutativo.

Come mostra il seguente esempio:

si considerino le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Risulta:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

e quindi AB≠BA.

Proprietà del prodotto tra matrici quadrate

Si consideri l'insieme delle matrici quadrate di ordine n, valgono le seguenti proprietà:

Proprietà associativa

$A(BC) = (AB)C \quad \forall A, B, C$

Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto

La matrice identica I di ordine è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

Risulta, infatti:

$AI = IA = A \quad \forall A$

Proprietà distributiva

$A(B + C) = AB + AC \quad \forall A, B, C$

3. Inversa e Determinante

3.1 Inversa di una matrice

Come è noto, nell'insieme dei numeri reali si definisce l'inverso o reciproco di un numero a, quel numero che moltiplicato per a dà come risultato 1 ovvero l'elemento neutro rispetto al prodotto.

In modo del tutto analogo si può definire l' inversa di una matrice ***quadrata.***

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

Si definisce *matrice inversa* di A o più semplicemente *inversa* di A e si indica con il simbolo A^{-1} la matrice quadrata (se esiste) di ordine n tale che

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$$

Se una matrice A ha inversa allora A è detta *invertibile* o *non singolare*

Mentre per un numero reale esiste una semplice regola per verificare l'esistenza del suo inverso e per determinarlo (a ha inverso $\Leftrightarrow a \neq 0$; l'inverso di a è 1/a), non è altrettanto facile stabilire l'invertibilità di una matrice.

A tale riguardo la definizione di inversa non fornisce nessun elemento utile, se non per casi particolari quali ad esempio i seguenti:

- Se una matrice ha una riga di zeri (ad esempio la prima riga), il prodotto tra tale matrice ed una qualsiasi altra dello stesso ordine produrrà sempre la prima riga tutta nulla di conseguenza una tale matrice non è invertibile in quanto la definizione di inversa richiede che in ogni riga ci sia un elemento uguale ad 1.

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e una qualsiasi matrice B dello stesso ordine, ad esempio

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} .$$

Risulta $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x+2z & y+2t \end{bmatrix}$ diverso da $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e quindi A non è invertibile.

- Se una matrice è diagonale allora è invertibile se e solo se gli elementi a_{ii} sulla diagonale sono non nulli; in tal caso l'inversa è ancora una matrice diagonale con elementi uguali $1/a_{ii}$.

Esempio

Si consideri la matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

risulta

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Infatti

$$D \cdot D^{-1} = D^{-1} \cdot D = I$$

Si osservi inoltre che anche se una matrice ha elementi tutti diversi da zero non è detto che sia invertibile come mostra il seguente

Esempio

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo utilizzando la definizione che la matrice A non è invertibile, ovvero

che non esiste una matrice B tale che A B = B A = I. Denotiamo con B = $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ la matrice cercata.

Risulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad =$$

se e solo se x , y , z , t verificano i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 2y + 4t = 1 \end{cases}$$

Poichè il primo membro della seconda equazione è il doppio della prima, il sistema risulta impossibile e quindi A non ammette inversa.

Per comprendere come si arriva a determinare condizioni di invertibilità, si consideri una matrice generica di dimensioni 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

E' possibile dimostrare che:

Teorema

La matrice A è invertibile se e solo se $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$,

In tal caso la matrice inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Uno sguardo alla matrice ottenuta fa comprendere una semplice regola di calcolo: per trovare l'inversa di A (2 x 2) basta scambiare tra loro gli elementi sulla diagonale principale, cambiare di segno gli altri elementi e dividere tutto per il numero

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ chiamato *determinante* di A.

3.2 Determinante di una matrice di ordine n

In generale ad ogni matrice quadrata è possibile associare un numero reale detto determinante, indicato in generale con il simbolo |A| oppure det A, che permette di stabilire l'invertibilità o meno di una matrice.

3.3 Calcolo del determinante di una matrice*

Il calcolo di questo numero è effettuato tramite il cosiddetto *sviluppo di Laplace* che può essere eseguito rispetto ad una qualsiasi riga oppure rispetto ad una qualsiasi colonna.

Sviluppo di Laplace (rispetto alla riga i-esima)

La formula dello sviluppo di Laplace rispetto alla riga i-ma di una matrice A di ordine n è la seguente:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+j)} \quad a_{ij} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la sottomatrice ottenuta da A cancellando la i-ma riga e la j-ma colonna.

* Questa sezione è inserita per completezza: può essere saltata.

Il determinante det A_{ij} è detto *minore complementare* dell'elemento a_{ij};

il prodotto $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ è detto *complemento algebrico* .

In base a tale nomenclatura possiamo dire che:

Primo teorema di Laplace: *il determinante di una matrice quadrata A è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.*

Esempio

Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo il determinante sviluppando rispetto alla prima riga, ovvero

$$\det A = (-1)^{1+1} 1 \cdot \det A_{11} + (-1)^{1+2} 0 \cdot \det A_{12} + (-1)^{1+3} 1 \cdot \det A_{13}$$

da cui :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ovvero il calcolo del determinante di A è ricondotto al calcolo di 3 determinanti 2 x 2.

Si ottiene così

$\det A = (1)(1)(1 \cdot 1 - 4 \cdot 3) + (-1)(0)(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) + (1)(1)(2 \cdot 4 - 0 \cdot 1) = 1 -12 + 0 + 8 = -3$

Verifichiamo che applicando lo sviluppo di Laplace rispetto ad un'altra riga ad esempio la terza, si ottiene lo stesso numero.

Si ha

$$\det(A) = (-1)^{3+1} 0 \cdot \det A_{31} + (-1)^{3+2}\, 4 \cdot \det A_{32} + (-1)^{3+3} 1 \cdot \det A_{33} =$$

$$= -4 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -4 + 1 = -3$$

Sviluppo di Laplace rispetto ad una colonna

Si può dimostrare che lo sviluppo di Laplace rispetto ad una qualsiasi colonna individua sempre il determinante ovvero:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i+j)} \quad a_{ij} \det A_{ij}$$

Si ha così:

Secondo teorema di Laplace: *il determinante di una matrice (quadrata) A è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una colonna qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.*

Osservazione

Il calcolo del determinante di una matrice di dimensione 4 x 4 , sviluppando ad esempio rispetto alla prima riga, è pari a:

$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - a_{14} \det A_{14}$

dove adesso le sottomatrici A_{11} , A_{12} , A_{13} ,A_{14} sono di dimensioni 3 x 3 quindi per completare il calcolo dobbiamo riapplicare lo sviluppo di Laplace a tali sottomatrici.

Ovviamente nel selezionare una riga o una colonna per applicare lo sviluppo di Laplace si sceglierà quella che contiene il maggior numero di zeri allo scopo di ridurre al minimo i calcoli necessari.

In ogni caso per matrici di grandi dimensioni il numero dei calcoli diviene enorme e il tempo richiesto per eseguirli può diventare lungo anche per un elaboratore elettronico.

Come vedremo, però il determinante gode di diverse proprietà alcune delle quali particolarmente utili per il calcolo del determinante stesso.

Considerazioni sullo sviluppo di Laplace

Riassumendo se ad esempio A è di dimensione 5 x 5 si devono calcolare (in generale) 5 determinanti di matrici di dimensioni 4 x 4. Il calcolo di tali determinanti comporta il calcolo di 4 determinanti di matrici di dimensioni 3 x 3, ovvero 20 determinanti di matrici di dimensioni 3 x 3.

A sua volta ogni calcolo di un determinante di una matrice di dimensione 3 x 3 comporta il calcolo dei determinanti di 3 matrici di dimensione 2 x 2 .

Quindi per calcolare il determinante di una matrice di dimensione 5 x 5 si devono calcolare 60 (5•4•3) determinanti di matrici di dimensioni 2 x 2.

Regola di Sarrus

Nel caso di una matrice quadrata di ordine 3, è possibile calcolare il determinante con la regola di Sarrus:

si accostano alla terza colonna della matrice la prima e la seconda colonna, ovvero:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Quindi si esegue la somma dei prodotti degli elementi situati sulle diagonali di colore blu e si sottrae la somma dei prodotti degli elementi situati sulle diagonali di colore rosso, ovvero

$$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

la regola di Sarrus è valida solo per matrici di dimensioni 3 x 3 !

Esempio

Calcolare con la regola di Sarrus il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

quindi

det A = -10 + 0 + 24 - 4 - 3 - 0 = 7

(fine parte facoltativa sul calcolo del determinante)

3.4 Proprietà del determinante

Sia A una matrice quadrata di ordine n

Proprietà 1

Se $\bar{A}$ è la matrice ottenuta da A moltiplicando una colonna (riga) per uno scalare k allora $\det \bar{A} = k \det A$

Proprietà 2

Sia A = ($a^{(1)},\dots,a^{(k)},\dots a^{(n)}$) una matrice quadrata di ordine n dove $a^{(1)},\dots,a^{(k)},\dots a^{(n)}$ denotano le colonne di A. Sia $\bar{A}$ la matrice ottenuta da A aggiungendo alla k-ma colonna un vettore $b^{(k)}$ ovvero $\bar{A} = \left(a^{(1)},\dots,a^{(k)}+b^{(k)},\dots a^{(n)}\right)$.

Risulta $\det \bar{A} = \det\left(a^{(1)},\dots,a^{(k)},\dots a^{(n)}\right) + \det\left(a^{(1)},\dots,b^{(k)},\dots a^{(n)}\right)$

Una analoga proprietà vale per le righe di una matrice.

Proprietà 3

Se A ha due colonne (righe) uguali allora det A = 0

Proprietà 4

Il determinante della matrice identica di ordine n è uno ovvero det I = 1

Le proprietà 1, 2, 3, 4 permettono di determinare altre importanti proprietà, alcune delle quali sono sotto riportate, e di stabilire l'unicità del determinante. Si può verificare che lo sviluppo di Laplace rispetto ad una qualsiasi riga o colonna fornisce un numero che verifica le proprietà 1, 2, 3, 4, quindi tale numero, per l'unicità, è necessariamente il determinante. Si giustifica così il fatto che il calcolo di un determinante è indipendente dalla scelta della riga o della colonna nello sviluppo di Laplace.

Proprietà 5

Se una colonna (riga) di A è formata da elementi nulli allora det A = 0.

Proprietà 6

Se $\overline{A}$ è la matrice ottenuta da A scambiando tra loro due colonne (righe) adiacenti allora $\det \overline{A} = -\det A$.

Proprieta 7

Se si addiziona ad una colonna (riga) un multiplo scalare di un'altra, il valore del determinante non cambia.

Proprietà 8

$\det A^T = \det A$

Proprietà 9

Se una colonna è la combinazione lineare di un'altra il determinante è nullo

Esempio

La seconda colonna è combinazione della prima

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det } A = (1*4) - (2*2) = 0$$

Le proprietà 1 - 2 - 3 - 4 garantiscono l'unicità del determinante.

Casi particolari

Se A è una matrice diagonale o triangolare superiore o triangolare inferiore allora il determinante di A è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale, ovvero:

$$\det A = a_{11}a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$$

Teorema di Binet

Vediamo adesso come si comporta il determinante rispetto alle operazioni di somma e prodotto tra matrici quadrate.

Mentre non vi è nessuna relazione che lega il determinante di una somma di due matrici con i determinanti delle singole matrici, per il prodotto si ha il seguente teorema.

Teorema di Binet

Siano A e B matrici di qualsiasi ordine. Allora det AB = det A·det B

3.5 Esistenza e proprietà dell'inversa di una matrice

Vediamo adesso come l'introduzione del determinante permette di caratterizzare l'invertibilità di una matrice. Vale il seguente teorema

Teorema

Sia A una matrice quadrata di ordine n,

A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Inoltre se $\det A \neq 0$ allora gli elementi c_{ij} di A^{-1} sono dati da

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}$$

dove la matrice A_{ji} è la matrice ottenuta da A cancellando la j-ma riga e la i-ma colonna

Proprietà della matrice inversa

Sia A una matrice quadrata di ordine n

Proprietà 1

Se esiste l'inversa di A essa è unica

Proprietà 2

Se esiste una matrice B tale che A B = I (oppure B A = I) allora B è l'inversa di A ovvero

$$B = A^{-1}.$$

Proprietà 3

Se A è invertibile di ordine n, allora l'inversa di A^{-1} coincide con A ovvero

$$(A^{-1})^{-1} = A .$$

Proprietà 4

Siano A e B due matrici invertibili di ordine n, risulta allora che

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3.6 Differenziazione matriciale

Se $f(b)$ è una funzione di *k* valori distinti *b,* si possono calcolare le *k* derivate parziali di $f(b)$ rispetto a ciascun b_i ; tali derivate possono essere ordinate in un vettore colonna, ottenendo così la

definizione: $\dfrac{\partial[f(b)]}{\partial b} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial[f(b)]}{\partial b_1} \\ \dfrac{\partial[f(b)]}{\partial b_1} \\ \dots \\ \dfrac{\partial[f(b)]}{\partial b_k} \end{bmatrix}$

Esempio 1:

Se $f(b) = a'b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k$, dove $a_1, a_2, \dots, a_k$ sono costanti note, la derivata parziale è:

$$\frac{\partial[a'b]}{\partial b} = \frac{\partial[b'a]}{\partial b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix} = a$$

Esempio 2:

Se $f(b) = b'Ab$ è una funzione quadratica di $b_1, b_2, \dots, b_k$, dove $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$, la derivata parziale è ($\underline{a}_i$ indica le righe di A):

$$\frac{\partial[b'Ab]}{\partial b} = 2\begin{bmatrix} \underline{a}_1 b \\ \underline{a}_2 b \\ \dots \\ \underline{a}_k b \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \dots \\ \underline{a}_k \end{bmatrix} b = 2Ab$$