TEORIA DELLA PROBABILITA'

La teoria della probabilità è il fondamento su cui è costruita tutta la **STATISTICA**, in quanto fornisce un mezzo per modellare la popolazione, gli esperimenti o tutto ciò che può essere considerato un fenomeno casuale.
Attraverso questi modelli gli statistici sono in grado di trarre inferenze sulla popolazione, esaminando solo una parte dell'insieme.

È fondamentale LA TEORIA DEGLI INSIEMI:
La probabilità è una funzione d'insieme e gli insiemi sono il dominio di questa funzione.
L'obiettivo degli statistici è arrivare a delle conclusioni su una popolazione effettuando un esperimento.
Per prima cosa bisogna identificare **SPAZIO CAMPIONARIO S,** cioè tutti i possibili risultati. Ad esempio, nel lancio di una moneta, i possibili risultati sono 2: testa o croce.
Gli spazi possono essere **numerabili** (n° finito di elementi) oppure **non numerabili** (n° infinito di elementi), questa distinzione fra gli spazi del campione numerabili e non numerabili è importante soltanto in quanto detta il senso in cui le probabilità possono essere assegnate.
Per la maggior parte dei casi, questo non causa problemi, anche se il trattamento matematico delle situazioni è diverso. A livello filosofico, si potrebbe sostenere che ci può essere solo uno spazio di campionamento numerabile, dal momento che le misurazioni non possono essere effettuate con l'accuratezza infinita. Mentre in pratica questo è vero, i metodi probabilistici e statistici associati allo spazio di campionamento non numerabile sono in generale meno ingombranti di quelli per lo spazio di campionamento numerabile, e forniscono una stretta approssimazione alla vera situazione, che è quella numerabile. Poi una volta definito lo spazio del campione, siamo in grado di considerare le serie di possibili risultati di un esperimento.

L' **EVENTO** è una qualsiasi serie di possibili risultati di un esperimento. È un sottoinsieme dello spazio campionario S, incluso S stesso.
Quindi, Sia A un evento e sottoinsieme di S. Diciamo che un evento si verifica quando il risultato dell'esperimento appartiene ad A.
L'evento può avere anche più esiti, quindi basta che se ne verifichi uno per poter considerare l'evento realizzato. Quando si parla della probabilità, in generale parliamo della probabilità di un evento, piuttosto che di un insieme, ma possiamo usare i termini in modo intercambiabile. Abbiamo prima bisogno di definire formalmente le seguenti due relazioni, che ci permettono di ordinare ed equiparare gli insiemi

- Esistono due importanti relazioni tra gli insiemi:

Se A contenuto in B e x appartiene A allora x appartiene B (SOTTOINSIEME)
Se A = B e A contenuto in B allora B contenuto in A (EGUAGLIANZA)

- Dati due eventi A e B, possiamo effettuare delle operazioni elementari:

UNIONE: l'unione di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A, a B o ad entrambi
A unito B = { x tale che x appartiene ad A **o** x appartiene B }

INTERSEZIONE: l'intersezione tra A e B è cioè l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A e sia a B
A intersecato B = { x tale che x appartiene ad A **e** x appartiene a B }

COMPLEMENTAZIONE: il complementare di A è l'insieme degli elementi che non appartengono ad A
A complementare = { x tale che x non appartiene ad A}

TEOREMA:
Dati gli eventi A, B e C, definiti in uno spazio campionario S, valgono le seguenti proprietà:
PROPRIETA' COMMUTATIVA: A unito B = B unito A
A intersecato B = B intersecato A

PROPRIETA' ASSOCIATIVA: A unito (B unito C) = (A unito B) unito C
A intersecato (B intersecato C) = (A intersecato B) intersecato C

PROPRIETA' DISTRIBUTIVA: A intersecato (B unito C) = (A intersecato B) unito (A intersecato C)
A unito (B intersecato C) = (A unito B) intersecato (A unito C)

LEGGI DI MORGAN: (A unito B) complementare = A complementare intersecato B complementare
(A intersecato B) complementare = A complementare unito B complementare

DEFINIZIONE:
Due eventi A e B si dicono **DISGIUNTI o MUTUALMENTE ESLCUSIVI** se non hanno nessun punto in comune, quindi: **A intersecato B = ∅**
Ad esempio A : numeri pari B : numeri dispari

1.2 LE BASI DELLA TEORIA DELLA PROBABILITA':

Quando viene effettuato un esperimento, l'esito appartiene allo spazio campionario.
Se l'esperimento viene ripetuto un certo n° di volte, possono verificarsi esiti differenti in ogni prova oppure alcuni risultati possono ripetersi nelle varie prove. Gli esiti più probabili sono quelli che si verificano più spesso, cioè hanno una maggiore frequenza. Se i risultati di un esperimento possono essere descritti probabilistica mente, stiamo andando ad analizzare statisticamente l'esperimento.
Quindi ora dobbiamo descrivere alcune delle basi della teoria della probabilità. Non definiamo le probabilità in termini di frequenze, ma invece utilizziamo l'approccio assiomatico matematicamente più semplice. L'approccio assiomatico non riguarda le interpretazioni delle probabilità, ma riguarda solo il fatto che le probabilità sono definite da una funzione che soddisfa gli assiomi.
Le interpretazioni delle probabilità sono tutt'altra questione. la "frequenza di occorrenza" di un evento è un esempio di una particolare interpretazione della probabilità. Un'altra possibile interpretazione è soggettiva, dove invece di pensare alla probabilità come alla frequenza, possiamo considerarla come una credenza nella possibilità che un evento si verifichi.

1.2.1 FONDAMENTI ASSIOMATICI:

Per ogni evento A nello spazio campionario, vogliamo associare ad A un numero tra 0 e 1 che chiamiamo probabilità di A -> P(A).
Non è possibile definire il dominio di P (cioè l'insieme in cui gli argomenti della funzione sono definiti) con ogni sottoinsieme di S.

DEFINIZIONE:
Una serie di sottoinsiemi S viene definito **SIGMA ALGEBRA** O CAMPO DI BOREL, indicato con β, se soddisfa 3 condizioni:

- **L'insieme vuoto è un elemento di β**
- **β è un insieme chiuso per complementazione**
- **β è un insieme chiuso per unioni numerabili**

Inoltre, l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualsiasi insieme. **∅ contenuto in S**
Dal momento che **S = ∅ complementare**, S è sempre contenuto in β .
Inoltre, dalle leggi di Morgan ricaviamo che β è un insieme chiuso per intersezioni numerabili.

DEFINIZIONE:
Dato uno spazio campionario S e un sigma algebra β ad esso associato, la funzione di probabilità è una funzione P con dominio β che soddisfa gli **ASSIOMI DI KOLMOGOROV**:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall$ A appartenente β
- la probabilità dell'evento certo è pari a 1
- La probabilità dell'unione di un numero finito di eventi disgiunti è pari alla somma delle probabilità di questi eventi

Quindi, ogni funzione P che soddisfa questi 3 assiomi è chiamata funzione di probabilità. Per ogni spazio campione si possono definire diverse funzioni di probabilità.

TEOREMA:
Sia S un insieme finito,
Sia B un qualsiasi sigma algebra del sottoinsieme di S,
Sia p1, p2…pn una serie di numeri non negativi la cui somma è pari a 1:
Per qualsiasi A appartenente a B abbiamo che la probabilità di A è uguale alla somma delle probabilità di pi.
Inoltre, la somma di un insieme vuoto è 0.
Quindi, P è una funzione di probabilità su β e questo rimane valido anche se S risulta essere un insieme numerabile.

1.2.2 CALCOLO DELLA PROBABILITA'

Dagli assiomi di probabilità possiamo accumulare molte proprietà della funzione di probabilità, proprietà che sono abbastanza utili nel calcolo delle probabilità più complicate.
Si parte da alcune funzioni delle proprietà quando applicate ad un singolo evento.
TEOREMA:
Se P è una funzione di probabilità e A è un qualsiasi insieme di B, allora:
$P(\emptyset) = 0$
$P(A) \leq 1$
P(A complementare) = 1 – P(A)

Il teorema seguente, che è simile nello spirito al precedente teorema, contiene delle dichiarazioni che non sono così evidenti.
TEOREMA:
Se P è una funzione di probabilità e A e B sono due qualsiasi insiemi di β, allora:
- P(B intersecato A complementare) = P(B) – P(A intersecato B)
- P(A unito B) = P(A) + P(B) – P(A intersecato B)
- Se A è sottoinsieme di B allora $P(A) \leq P(B)$

Un esempio è la **DISUGUAGLIANZA DI BONFERRONI: P (A intersecato B) ≥ P(A) + P(B) – 1**
è utile quando è difficile o addirittura impossibile calcolare la probabilità dell'intersezione, ma si vuole comunque avere un'idea della grandezza della probabilità.

1.2.3 TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO:

I metodi del **calcolo** è uno strumento per costruire assegnazioni di probabilità su spazi campionari finiti. I problemi di calcolo, in generale, risultano molto complicati e per questo molte volte i nostri conteggi sono soggetti a restrizioni. Il modo per risolvere questi problemi è di andare a suddividerli in una serie di compiti che siamo facili poi da contare. Il seguente teorema è il primo passo in questo processo ed è conosciuto come il **Teorema fondamentale del conteggio**.
TEOREMA:
Se un lavoro consiste in k differenti compiti, il cui compito i-esimo può essere svolto in ni modi, con i = 1, 2….k, allora il lavoro può essere svolto in n1 x n2 x … x nk modi.
DIMOSTRAZIONE:
è sufficiente provare il teorema per k=2. La prova è solo un calcolo accurato. Il 1° compito può essere svolto in 1 modo, il 2° compito può essere svolto in 2 modi. Quindi il lavoro può essere svolto in 1x2=2 modi.
DEFINIZIONE che è di aiuto:
Per un numero non-negativo intero n, esiste un n fattoriale, che è uguale al prodotto di tutti i numeri positivi ≤ **n**
Inoltre, **0 fattoriale = 1**
DEFINIZIONE:

Per due numeri non-negativi interi **n** e **r**, dove **n ≥ r**, abbiamo che **n su r** è uguale a: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

1.3 PROBABILITA' CONDIZIONATA:

Tutte le probabilità che abbiamo trattato finora sono state probabilità incondizionate. È stato definito uno spazio di campionamento e sono state calcolate tutte le probabilità rispetto a tale spazio di campionamento. In molti casi, tuttavia, siamo in grado di aggiornare lo spazio campione sulla base di nuove informazioni. In questi casi, vogliamo essere in grado di aggiornare i calcoli di probabilità o calcolare le probabilità condizionali.
La probabilità condizionata esprime la probabilità che si verifichi l'evento A nell'ipotesi in cui si sia verificato l'evento B.

DEFINIZIONE:

se A e B sono eventi in S e P(B) > 0, allora la probabilità condizionata di A dato B è pari al rapporto tra P(A intersecato B) e P(B).

- Se B diventa lo spazio campionario, la probabilità condizionata di B dato B è = 1
- Se A e B sono insiemi disgiunti, la probabilità condizionata è = 0

TEOREMA DI BAYES:

Siano A e B due eventi dipendenti, abbiamo che la probabilità condizionata di A dato B è pari a: P(A) moltiplicato per P(di B dato A) tutto fratto P(B)

DEFINIZIONE:

Due eventi, A e B sono **indipendenti** se **P(A intersecato B) = P(A) x P(B)**
Quindi, significa che il verificarsi di A non modifica la probabilità di verificarsi di B (giri della roulettes).

TEOREMA:

se A e B sono eventi indipendenti, allora sono anche indipendenti:

- **A e B complementare**
- **A complementare e B**
- **A complementare e B complementare**

Andiamo a provare solo il punto a: dobbiamo dimostrare che P(A $\cap B complementare ¿= P(A)P(B complementare)$ abbiamo:

P(A∩B compl.)= P(A)-P(A∩B)
= P(A)- P(A)P(B)
= P(A)(1-P(B))
= P(A)P(Bcompl.)

1.4 VARIABILI CASUALI:

Una **variabile casuale** è una funzione definita sullo spazio campionario S all'interno dei numeri reali.

1.5 FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE

Ad ogni variabile casuale X si associa una **Funzione di distribuzione cumulata di X**, definita come $F_X(x) = P_X(X \le x)$ per ogni x

TEOREMA:

La funzione F(x) è una funzione di distribuzione cumulata se e solo se ho queste 3 condizioni:

- $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$
- **F(x) è una funzione non decrescente di x**
- **F(x) è continua a destra, per ogni numero X0 tale che** $\lim_{x\to Xo} F(x)=F(Xo)$

DEFINIZIONE:

Le variabili casuali X e Y sono identicamente distribuite se, per ogni insieme A appartenente a B, la P(X appartenente A) = P(Y appartenente A). Ma non per forza devono essere uguali.

TEOREMA:

Le affermazioni "l**e variabili casuali X e Y sono identicamente distribuite**" e "**Fx(x) = Fy(x) per ogni x**" sono equivalenti.

1.6 FUNZIONE DI MASSA E DENSITA'

Associata alla variabile casuale X c'è anche la funzione di densità (se la variabile casuale è continua) oppure di massa (se la variabile casuale è discreta).

Quindi, la funzione di probabilità di massa di una variabile casuale discreta X è data da:

fX(x) = P(X=x)   per ogni x

TEOREMA:

una funzione fx(x) è una funzione di probabilità di massa se e solo se:

- **fx(x) ≥ 0   per ogni x**
- **∑ fx(x) = 1**