Lezione 4 11/Marzo/2020

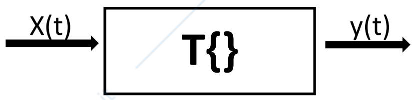
Segnali tempo continuo

Per i segnali tempo-continuo, la variabile indipendente può assumere un qualunque valore (variare con continuità).

DEFINIZIONE DI SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE

l sistemi lineari tempo invariante sono importantissimi da un punto di vista matematico, Però potremmo domandarci in natura quanti sistemi sono effettivamente lineare tempo invariante? In effetti in natura molti dei sistemi sono non lineari a volte anche fortemente non lineari. Allora come mai si dà tanta importanza ai sistemi lineari tempo invarianti? Perché i sistemi lineari tempo invarianti hanno delle caratteristiche matematiche che permettono di poter definire degli strumenti importantissimi, quali la trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier per fare gli esempi. Se un sistema non è lineare tempo invariante questi strumenti importanti di analisi dei segnali non possono essere definiti. Quindi da un punto di vista matematico lavorare con I sistemi lineari tempo invarianti ci dà questa potenza, ovvero la potenza di poter definire degli strumenti molto forti che ci permettono di poter effettuare un'analisi armonica (trasformata di Fourier). Nonostante molti dei sistemi in natura siano fortemente non lineari si procede all'analisi dei sistemi lineari perché spesso un sistema non lineare spesso può essere linearizzato intorno ad un punto di lavoro. Quindi se si studia tale sistema in range molto limitato è possibile approssimare bene il suo comportamento con quello di un sistema lineare. Analogamente per la proprietà di tempo invarianza: se un sistema è tempo variante ma andiamo a studiarlo in un intervallo di tempo molto limitato è possibile considerare tale sistema tempo invariante. Dunque nei problemi derivati dal mondo reale, generalmente non lineari e/o tempo-varianti, spesso si fa ricorso ad approssimazioni, ove possibile, per riportarsi con opportune limitazioni, allo studio di sistemi LTI.

Un sistema tempo continuo è definito da una trasformazione che mappa gli ingressi con le uscite. Schematicamente possiamo rappresentarlo nel seguente modo:



La notazione matematica corrispettiva a questo schema grafico è la seguente:
$y(t)=T\{x(t)\}$ che rappresenta la trasformazione ingresso uscita di un generico sistema tempo continuo.
Il sistema tempo continuo si dice lineare quando per questo sistema vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Se consideriamo 2 generici segnali tempo continuo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ che introdotti nel sistema restituiscono rispettivamente $y_1(t)$ $y_2(t)$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)=T\{ x_1(t) \}$

$x_2(t) \rightarrow y_2(t)=T\{ x_2(t) \}$

Un sistema tempo continuo è lineare se una qualunque combinazione lineare degli ingressi produce in uscita la stessa combinazione lineare delle singole uscite. Matematicamente significa che se indichiamo con $x_3(t)$ un segnale che una qualunque combinazione lineare di altri due ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$ che applicato al sistema ci restituisce il segnale $y_3(t)$ che non è altro che la trasformazione T applicata al segnale $x_3(t)$:

$x_3(t)=a_1\, x_1(t)+ a_2\, x_2(t) \rightarrow y_3(t)=T\{ x_3(t) \}$

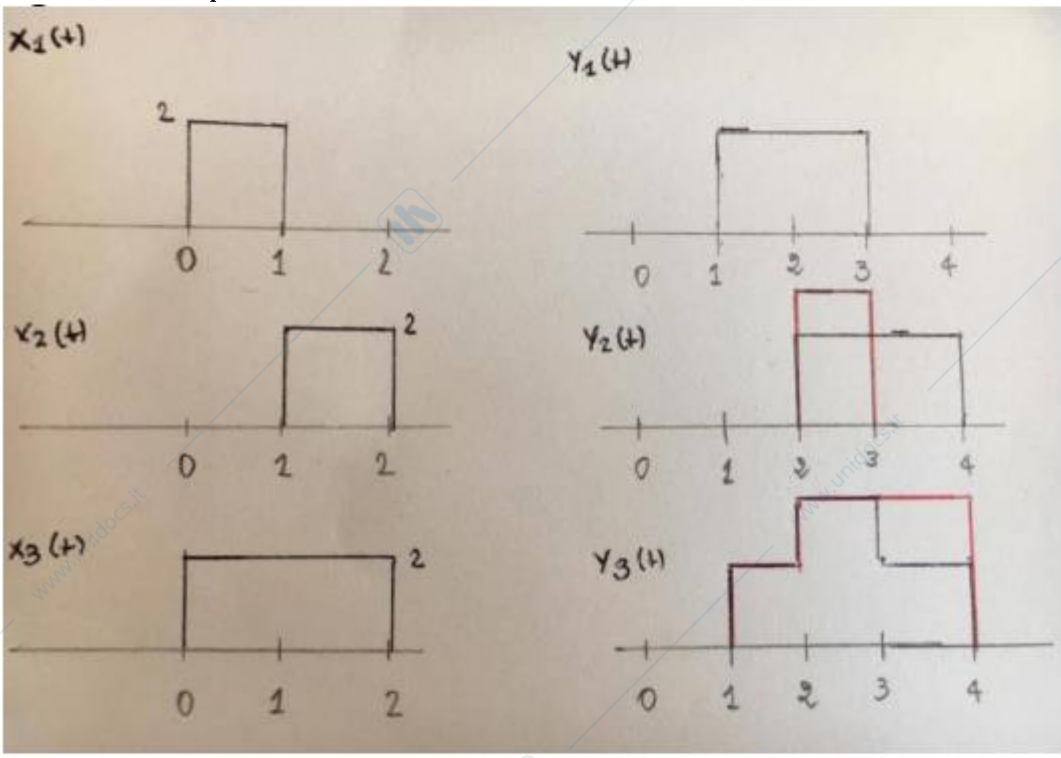
Se l'uscita del sistema è uguale alla stessa combinazione lineare con gli stessi coefficienti applicati alle singole uscite dei 2 segnali allora il sistema si dice lineare. Matematicamente possiamo scrivere:

se $y_3(t)= a_1\, y_1(t)+ a_2\, y_2(t) = T\{ a_1\, x_1(t)+ a_2\, x_2(t) \}\ \forall\, a_1, a_2$ e $\forall\, x_1(t), x_2(t)$

Un sistema tempo continuo è tempo invariante se un segnale di ingresso ritardato nel tempo produce la stessa uscita ritardata nel tempo della stessa entità; in altri termini l'uscita non dipende dall'istante di presentazione dell'ingresso. Se $x_1(t)=x(t-t_0)$ è un segnale ritardato nel tempo di un certo t_0 secondi rispetto al segnale $x(t)$ cui corrisponde il segnale d'uscita $x(t)\rightarrow y(t)=T\{x(t)\}$ che produce in uscita un segnale $y_1(t)$ che è ovviamente la trasformazione di $x_1(t)$. Matematicamente possiamo scrivere:

se $x_1(t) \rightarrow y_1(t)=T\{ x_1(t) \} =y(t-t_0)\ \ \forall t$ e $\forall t_0$

Se do ingresso al sistema un segnale adesso oppure tra un'ora o un anno ottengo la stessa uscita ritardata di un'ora o di un anno: la forma dell'uscita è la stessa soltanto traslata nel tempo della stessa entità. Un sistema lineare tempo invariante si approssima con l'acronimo LTI.
Vediamo un esempio di linearità:



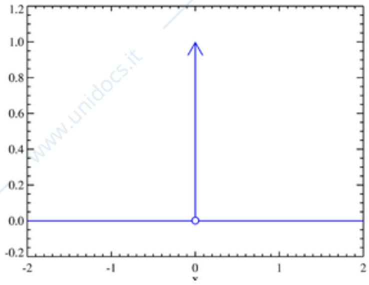
Il sistema è lineare? L'ingresso x3 è la somma dei segnali x1 e x2 quindi è una particolare combinazione lineare con a1=1 e a2=1; il segnale di uscita y3 è dato dalla somma di y1 e y2 pertanto si vede che l'uscita è la stessa combinazione lineare delle singole uscite, quindi la stessa combinazione lineare degli ingressi. Però noi non sappiamo niente su cosa succede per ogni a1 e a2.
→ con le informazioni che abbiamo a disposizione la risposta corretta è che non si può dire perché per dire che è lineare dovremmo verificare che tale relazione valga per tutte le coppie di segnali x1 e x2 e per tutte le possibili combinazioni lineari.
Nel caso dell'esempio in rosso? Il sistema non è lineare.

I sistemi lineari tempo invarianti sono così importanti Perché un sistema LTI è completamente definito dalla sua risposta all'impulso detta anche risposta impulsiva, cioè conoscendo la risposta ad un particolare ingresso quale l'impulso possiamo conoscere la risposta del sistema ad un qualsiasi altro ingresso. Questo si dice anche che conoscere un sistema vuol dire conoscere la risposta all'impulso. Per parlare di risposta impulsiva introduciamo la Delta di Dirac, ovvero l'impulso.

DELTA DI DIRAC

La Delta di Dirac che è stata introdotta appunto da Dirac un fisico degli anni 30 può essere intuitivamente pensata come una funzione ma in effetti non è una funzione. La delta di Dirac è un operatore matematico che può essere pensato come una funzione che va all' infinito nell'origine quindi lo indichiamo con una freccia e vale zero al di fuori dell'origine:

$$\delta(t) = \{\infty \text{ se } t = 0, 0 \text{ se } t \neq 0\}$$



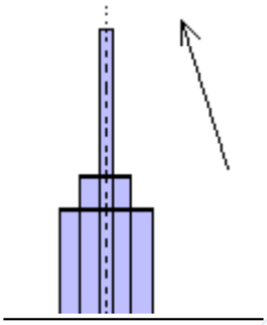
e presenta la proprietà che il suo integrale tra meno infinito e più infinito è pari ad uno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

In matematica non è possibile definire una funzione con queste proprietà nell'insieme dei numeri reali, in quanto una funzione per essere definita tale deve assumere per ogni valore di t un valore finito. Pertanto la funzione delta di Dirac non è una funzione propriamente detta. Per definire la delta bisogna introdurre il cosiddetto spazio delle distribuzioni nel quale la delta di Dirac è definita come una *funzione generalizzata*. Tuttavia, per capire il ragionamento sottostante la delta di Dirac, è possibile introdurre una funzione d'appoggio attraverso la quale intuire come la delta di Dirac possa essere costruita. Consideriamo $K_\tau(t)$ definita come segue:

$$K_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & -\tau \leq t \leq \tau \\ 0, & altrove \end{cases}$$

$Kt(t)$ è una funzione (e di essa è possibile calcolarne l'integrale) e rappresenta un rettangolo centrato nell'origine di altezza pari a $\frac{1}{2\tau}$. Ora immaginiamo di diminuire il valore di τ ovvero di diminuire l'ampiezza dell'intervallo, come possiamo osservare il rettangolo diventerà sempre più stretto intorno all'origine e sempre più alto. Al limite avrà un'ampiezza infinitesima ed un'altezza $\frac{1}{2\tau}$ infinita.



Quanto vale l'area del primo rettangolo? L'area del rettangolo è data da A=B*H dove B= 2τ e H=$\frac{1}{2\tau}$ →

$$A = 2\tau \cdot \frac{1}{2\tau} = 1$$

Pur stringendo τ l'area è sempre uguale ad 1, in quanto B= 2τ e H=$\frac{1}{2\tau}$.
Dunque qualunque di questi rettangoli ha sempre area unitaria pertanto la delta di Dirac può essere vista come il limite di questa successione di funzioni tutte con area unitaria.

Quindi matematicamente:

$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} K_\tau(t)$ dove le funzioni $K_\tau(t)$ sono tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\tau(t)\,dt = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{2\tau}\,dt = 1$$

E poiché abbiamo osservato che intuitivamente $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} K_\tau(t)$ allora possiamo pensare di scrivere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau \to 0} K_\tau(t)\,dt = \lim_{\tau \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\tau(t)\,dt = 1$$

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} K_\tau(t) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} K_\tau(t)\,dt = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} \frac{1}{2\tau}\,dt = 1$$

e quindi di ottenere la proprietà sopra citata per la quale l'integrale tra meno infinito e più infinito della delta di Dirac vale 1.
Nello spazio delle distribuzioni la delta di Dirac gode della seguente proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T)\ \varphi(t)\,dt = \varphi(T)$$

Questa proprietà della delta è molto importante perché ci dice che l'integrale nel tempo di una delta moltiplicata per una funzione $\varphi(t)$ quando il suo argomento è traslato di un tempo T è pari alla funzione $\varphi(t)$ valutata in t=T ovvero restituisce il valore della funzione $\varphi(t)$ in quel particolare valore di t che annulla l'argomento della delta.

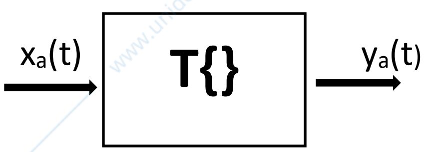
Considerando il caso in cui T=0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ \varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

quindi la delta va a campionare la funzione nel tempo che annulla l'argomento della delta stessa.

RISPOSTA IMPULSIVA DI UN SISTEMA LTI

Un sistema lineare tempo Invariante è completamente definito dalla sua risposta impulsiva Quindi introduciamo la risposta all'impulso. Consideriamo un sistema lineare tempo invariante definito da una trasformazione T applicata ad un ingresso analogico



si definisce risposta all'impulso, la risposta del sistema quando in ingresso al sistema è posta la delta di Dirac:

$$h_a(t) = T\{\delta(t)\}$$

Ora vediamo matematicamente come si lega l'uscita di un sistema lineare tempo invariante ad un generico ingresso sfruttando la risposta all'impulso, per fare questo sfruttiamo un'altra proprietà della delta di Dirac per la quale essa rappresenta l'elemento neutro della convoluzione , ovvero un segnale convoluto con la delta di Dirac restituisce il segnale stesso:

$$x_a(t) = x_a(t) * \delta(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

Allora sfruttando tale proprietà ricaviamo l'uscita del sistema:

$$y_a(t) = T\{x_a(t)\} = \mathrm{T}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau\right\} =$$

sfruttando la linearità del segnale ed essendo la trasformazione T un operatore lineare una qualunque combinazione lineare degli ingressi la ritroviamo in uscita con la stessa combinazione lineare degli ingressi→ la trasformazione dell'integrale di convoluzione= all'integrale della trasformazione

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T\{x_a(\tau)\delta(t-\tau)\}\, d\tau =$$

Poiché la variabile tempo è t, $x_a(\tau)$è indipendente rispetto al tempo per cui per la linearità dell'operatore T posso portarla fuori dal segno di trasformazione

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\, T\{\delta(t-\tau)\}\, d\tau =$$

Per l'ipotesi di tempo invarianza la risposta all'impulso traslata nel tempo è pari alla risposta impulsiva traslata nel tempo della stessa entità

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\, h_a(t-\tau)\, d\tau = y_a(t)$$

È possibile ricavare una formulazione del tutto equivalente.
Introduciamo una variabile $\tau' = t - \tau \rightarrow \tau = t - \tau'$

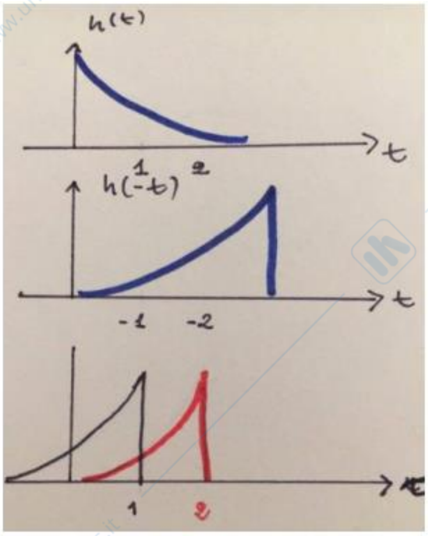
$$d\tau' = -d\tau$$

Allora: $\int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\, h_a(t-\tau)\, d\tau = -\int_{+\infty}^{-\infty} x_a(t-\tau')\, h_a(\tau')\, d\tau' =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t-\tau')\, h_a(\tau')\, d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t-\tau)\, h_a(\tau)\, d\tau = y_a(t)$$

Facciamo un esempio di calcolo di convoluzione per capire bene cosa si fa durante una convoluzione:

Questa è una convoluzione in tempo continuo tra un ingresso
rettangolare che dura un secondo, alto 1 e la risposta all'impulso di un filtro RC. Il filtro RC ha un polo e ha come risposta un esponenziale decrescente e-t/RC
La convoluzione, fissato il tempo, è un integrale di un prodotto del segnale per la risposta all'impulso



h(t- τ) [NB: qui la variabile tempo è il τ]. Quindi l'uscita è data dal prodotto termine a termine tra la risposta impulsiva traslata e ribaltata sull'asse delle ordinate con l'ingresso. (vedi demo walfram).

TRASFORMATA DI LAPLACE

Siamo sempre nell'ambito dei sistemi lineari tempo invarianti: Dato in ingresso un segnale analogico $x_a(t)$ restituisce in uscita un segnale $y_a(t)$ governato dalla legge della convoluzione con la risposta impulsiva $y_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau)\, h_a\,(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\, x_a\,(t-\tau)\, h_a(\tau)\, d\tau$

Per definire la trasformata di Laplace facciamo ricorso al concetto di autofunzione. Un' autofunzione è una funzione che se applicata in ingresso al sistema Il sistema produce una funzione che ha la stessa forma della funzione d'ingresso eventualmente amplificata o attenuata o sfasata ma non distorta. Un esempio è dato dagli autovettori e autovalori. Un autovettore è quel vettore che dato in ingresso ad una trasformazione lineare produce in uscita un segnale pari all' autovettore moltiplicato per l'autovalore. Quindi gli autovettori sono quei particolari ingressi che dati in ingresso ad una trasformazione lineare li ritroviamo in uscita eventualmente amplificati o attenuati ed il valore dell'amplificazione o attenuazione si chiama autovalore. Quindi l'autovettore di fatto è un esempio di quella che chiamiamo autofunzione: dato in ingresso ad un sistema lineare produce in uscita un vettore che è proporzionale all'ingresso ed il fattore di proporzionalità è l'autovalore stesso. Cerchiamo di capire adesso nel caso di sistemi LTI cosa sono le autofunzioni. Per fare questo consideriamo come segnale d'ingresso $x_a(t) = A\, e^{st}$ $\;con\; s\epsilon\mathbb{C}$ un'esponenziale complessa. Dimostriamo che l'esponenziale complessa e un'autofunzione per i sistemi lineari tempo invarianti. Quindi calcoliamo

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{s(t-\tau)}\, h_a(\tau)\, d\tau = A\, e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(\tau)\;\, e^{-\tau s}\, d\tau = A\, e^{st}\, H_a(s)$$

$H_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(\tau)\;\, e^{-\tau s}\, d\tau$ questo integrale dipende solo da s, dunque in generale sarà un numero complesso, ma non dipende da t

→Ovvero l'uscita di un sistema lineare tempo invariante al cui ingresso diamo un' esponenziale complessa sarà ancora un'esponenziale complessa eventualmente amplificata attenuata o sfasata di un termine pari a $H_a(s)$ che sarà un numero complesso, quindi con un suo modulo ed una sua fase; in particolare il modulo agirà nell''amplificare o attenuare mentre la fase agirà nello sfasare l'uscita che però avrà sempre la forma dell'ingresso. Quindi le esponenziali complesse sono autofunzioni per i sistemi LTI. $H_a(s)$ agisce proprio come l'autovalore per gli autovettori e rappresenta la trasformata di Laplace della risposta all'impulso Chi chiamiamo anche funzione di trasferimento del sistema. Quindi la funzione di trasferimento del sistema altro non è che l'autovalore delle autofunzioni del sistema LTI che sono esponenziali complesse.

La variabile s dell'esponenziale complessa è data da:

$s = \sigma + j\Omega$ Per cui l'esponenziale complessa $e^{st} = e^{\sigma t}\, e^{j\Omega t}$ si compone di un termine di smorzamento(il primo) e di un termine oscillante(il secondo), infatti ricordando la Formula di Eulero: $\cos(\Omega t) = \frac{e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t}}{2}$ Quindi $e^{j\Omega t}$ è come fosse una mezza sinusoide. Quindi l'esponenziale complessa non è altro che un oscillazione smorzata nel tempo.

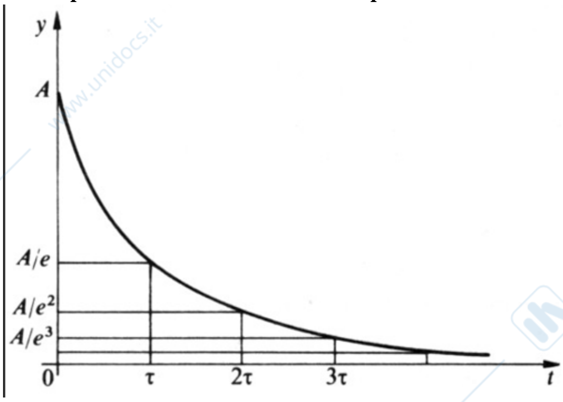
A questo punto andiamo a definire la trasformata di Laplace per un generico segnale Tempo continuo x(t). Innanzitutto partiamo dalle caratteristiche che deve possedere il segnale tempo continuo.

1. x(t)=0 per t<0 Parliamo in questo caso di segnali unilaterali destri;

2. x(t) deve essere continuo o continuo a tratti(ovvero è un segnale continuo eccetto un numero finito di punti);

3. x(t) deve essere di ordine esponenziale. Matematicamente significa che
   $$\text{se } \exists\ \sigma \in \mathbb{R} : \lim_{t\to\infty} |\, x(t)|e^{-\sigma t} = 0$$

Il valore σ_c tale per cui per $\sigma<\sigma_c$ il limite tende all'infinito e per $\sigma>\sigma_c$ il limite tende a zero si definisce ascissa di convergenza.
$e^{-\sigma t}$ è un termine esponenziale, se per semplicità consideriamo il caso in cui σ sia positivo si tratta di un esponenziale decrescente per t che tende a più infinito, pertanto è fatto così:

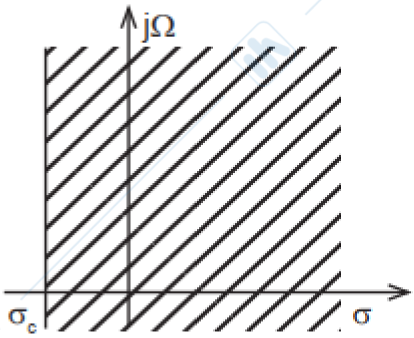


Se il segnale è di ordine esponenziale significa che il limite per t che tende all'infinito del modulo del segnale potrebbe andare anche all'infinito ma non in maniera così forte perché moltiplicato per un esponenziale lo riportiamo a zero dunque esiste un esponenziale che sovrasta quanto il segnale |x(t)| possa andare a valori molto elevati.

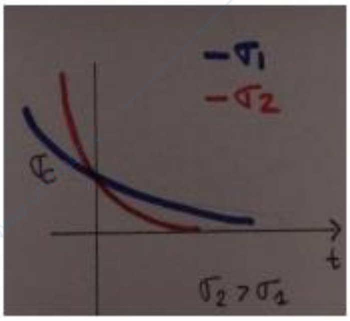
Se queste tre ipotesi sono verificate si definisce trasformata di Laplace

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t)e^{-st}\, dt \qquad\qquad s = \sigma + j\Omega$$

La trasformata di Laplace trasforma un segnale descritto nel *dominio del tempo* (tipicamente un segnale a valori reali) nel cosiddetto *dominio di Laplace* (a valori complessi anche per un segnale reale). La trasformata di Laplace vive nel piano complesso e converge in un piano a destra di una retta che ha ascissa σ_c, ascissa di convergenza, che è l'ascissa di convergenza, ovvero la trasformata di Laplace e definita a destra di una retta verticale con ascissa σ_c.



Come possiamo osservare la regione di convergenza è definita a destra di una retta verticale quindi dipende da σ_c che è un numero reale e che pertanto va ad incidere sulla componente reale dell'esponente quindi sulla parte smorzante. Estendo una retta verticale non dipende da Ω quindi la convergenza non dipende dalla componente oscillante. Tutto ciò ha senso perché la convergenza dell'integrale quindi l'esistenza o meno dell'integrale non dipende dalla componente oscillante dell'esponenziale in quanto la componente oscillante non ci dà problemi di esistenza nell'integrale tra meno infinito più infinito. Quello che invece potrebbe creare problemi di convergenza E la parte reale di questo esponenziale che potrebbe divergere e far diventare questo integrale non esistente. Questo è il motivo per cui la regione di convergenza non dipende da Ω ma è una retta verticale che dipende soltanto da σ. Quindi se troviamo un valore di σ_c per il quale il limite da più infinito passa a zero tutti gli altri valori a destra di tale retta saranno valori per i quali la trasformata di Laplace esisterà. Se troviamo che per un determinato valore di sigma il limite è pari a zero e l'integrale converge, allora per sigma maggiore di tale valore l'esponenziale è ancora più attenuata



Se questo limite è verificato per σ_1 sarà verificato per tutti i σ maggiori di σ_1
Osserviamo che per t che tende a meno infinito non abbiamo alcun problema in quanto per definizione il segnale x(t) per t minore di zero è identicamente nullo, infatti a volte la trasformata di Laplace si definisce con un integrale esteso da zero a più infinito.

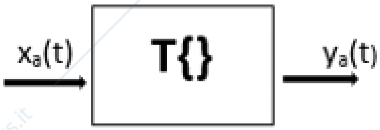
Si può dimostrare che la formula dell'*antitrasformata di Laplace*, che trasforma, sotto determinate ipotesi, una funzione $Xa(s)$ descritta nel dominio di Laplace nella funzione $x_a(t)$ descritta nel dominio del tempo, è la seguente:

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_a(s)e^{st}\ ds \qquad \sigma > \sigma_c$$

dove l'integrale è steso su qualunque retta verticale appartenente al dominio di convergenza.

La formula della trasformata di Laplace e dell' antitrasformata di Laplace rappresentano una coppia di trasformate: quella della trasformata di Laplace può essere interpretata come una formula di analisi mentre la formula di antitrasformazione può essere interpretata come la formula di sintesi del segnale che viene ricostruito attraverso una sovrapposizione di infinite esponenziali complesse smorzate ciascuna pesata per un numero complesso che altro non è che il valore della trasformata di Laplace per quel dato valore di s.

Per un sistema LTI avente funzione di trasferimento $H_a(s)$ la trasformata di Laplace dell'uscita è il prodotto tra le trasformate di Laplace dell'ingresso e la funzione di trasferimento del sistema. $Y_a(s) = X_a(s)\, H_a(s)$



$$Y_a(s) = X_a(s)\, H_a(s)$$

Ciò può essere dimostrato ricordando che un segnale può essere decomposto in esponenziali complesse e che un'esponenziale complessa è un'autofunzione per un sistema LTI. Pertanto se applichiamo in ingresso una esponenziale complessa con cui è decomposto il segnale $\frac{1}{2\pi j} X_a(s)e^{st}$ l'uscita avrà la stessa forma dell'ingresso e sarà l'ingresso moltiplicato per la sua trasformata di Laplace.

Applichiamo adesso questo procedimento a ciascuna esponenziale complessa con cui è decomposto il segnale al variare di *s* ed integriamo tutti i contributi poiché vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Dalla formula dell'antitrasformata osserviamo che in ingresso al sistema non abbiamo altro che il segnale *xa*(*t*). Poiché il sistema è lineare, l'uscita sarà l'integrale delle risposte alle singole esponenziali. Dalla formula dell'antitrasformata osserviamo anche che l'uscita al sistema è un segnale che ha come trasformata di Laplace *Xa*(*s*) *Ha*(*s*).

TRASFORMATA DI FOURIER

La trasformata di fourier può essere vista come un caso particolare della trasformata di Laplace quando s= jΩ , assunto che jΩ appartenga al dominio di convergenza di Laplace (ovvero quando l'ascissa di convergenza $\sigma_c<0$).
Quindi ponendoci sull'asse immaginario s=jΩ ricaviamo le coppie di trasformate:

$$X_a(\mathrm{j}\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t) e^{-\mathrm{j}\Omega t}\, dt$$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\mathrm{j}\Omega) e^{\mathrm{j}\Omega t}\; d(\mathrm{j}\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(\mathrm{j}\Omega) e^{\mathrm{j}\Omega t}\; \mathrm{d}\Omega$$

La formula di antitrsformazione è anche detta formula di sintesi.Una interpretazione immediata della formula di antitrasformata Fourier in analogia a quella della formula di antitrasformazione di Laplace è che il segnale può essere immaginato come la sovrapposizione (integrale) di segnali di forma sinusoidale cioè con armoniche (a differenza di Laplace in cui il segnale era visto come sovrapposizione di oscillazioni smorzate). Per questo motivo l'analisi secondo Fourier è chiamata anche analisi armonica.

Si può dimostrare che per segnali ad energia finita, ovvero quei segnali per i quali

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, x_a(t)|^2 dt < \infty$$

è convergente ad un valore finito, è possibile definire la trasformata di Fourier secondo queste definizioni. Quindi la condizione di segnale ad energia finita è una condizione sufficiente per garantire l'esistenza della coppia trasformata/antitrasformata di Fourier.

Si chiama spettro di ampiezza e spettro di fase il grafico del modulo e della fase, rispettivamente, della trasformata di Fourier di un segnale. Quindi dato un segnale a valori reali la trasformata di Fourier come quella di Laplace assume valori complessi; ricordiamo appunto che la trasformata di Fourier può essere considerata come un caso particolare della trasformata di Laplace.