

PROGRAMMAZIONE LINEARE - L'ALGORITMO DEL SIMPLESSO

fonte principale: Luciano Daboni, Ricerca Operativa, Zanichelli, Bologna 1985

La *programmazione matematica* si può definire come la scienza che ha per oggetto lo studio delle soluzioni ottimali, secondo un determinato criterio, per problemi con dati certi, in condizioni deterministiche.

In pratica, si tratta dello studio matematico dei metodi per la ricerca di valori estremanti (detti *ottimali*) per funzioni a valori reali definite in domini variamente individuati.

Più specificamente, la programmazione matematica si caratterizza per l'impiego di idee e procedimenti prevalentemente algebrico-combinatori, mentre in generale i problemi di determinazione di minimi e massimi applicano il calcolo differenziale e strumenti analitico-topologici.

Si parla di *programmazione lineare* quando sia la funzione da rendere minima o massima, sia le relazioni che definiscono il dominio nel quale si cerca tale minimo o massimo, sono *lineari*, ossia espresse attraverso polinomi di primo grado. In questo caso gli strumenti che si applicano sono tipici dell'algebra lineare e consentono, in pratica in modo certo, di determinare il minimo o il massimo cercato, oppure di provare che questo non esiste. Il metodo che andremo a descrivere, detto *algoritmo del simpleso* è stato ideato nel 1947 dal matematico statunitense George Dantzig.

Il problema oggetto dello studio della programmazione lineare è il seguente:

È data la funzione

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

detta *funzione oggetto* o *funzione obiettivo*.

Si vuole determinare, se esiste, il massimo valore che $p(x)$ assume nell'insieme degli $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con componenti $x_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$, soddisfacenti inoltre m equazioni lineari:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

dette *vincoli di programma*.

Nomenclatura della programmazione lineare

La programmazione lineare adotta una terminologia specifica per gli strumenti e i concetti utilizzati:

- 1) **programma** è ogni soluzione del sistema lineare (1)
- 2) **programma ammissibile** è ogni soluzione di (1) con componenti $x_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$.
- 3) **regione ammissibile** è l'insieme dei programmi ammissibili
- 4) **programma ottimale** è ogni programma ammissibile $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nel quale la funzione oggetto $p(x)$ assume il valore massimo assoluto nella regione ammissibile.

La formulazione del problema che abbiamo sopra descritto è la *forma standard* della programmazione lineare; situazioni leggermente diverse possono essere ricondotte alla forma standard in modo semplice: vediamo i casi più comuni.

- 1) Non è rilevante la *omogeneità* della funzione oggetto: se questa fosse $q(x) = k + \sum_{j=1}^n c_j x_j$, rendere massima $q(x)$ equivarrebbe a rendere massima $p(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$.

- 2) Se di $p(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ interessa determinare il *minimo*, anziché il massimo, basta riferirsi a $-p(x)$, per la quale di nuovo si dovrebbe trovare il massimo.
- 3) *Varianti ai vincoli di positività*. Se anziché $x_j \geq 0$ si richiede $x_j \geq k_j$, $k_j \in \mathbb{R}$ costante assegnata, si dovrà cambiare variabile ponendo $x'_j = x_j - k_j$; il problema riformulato attraverso le nuove variabili x'_j apparirà nella forma standard.
- 4) *Vincoli di programma in forma di disuguaglianza: le variabili "di scarto"*. Può accadere che i vincoli di programma appaiano non come equazioni lineari, ma come *disequazioni*: per uno o più valori di i , in (1) si ha $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i$. In questo caso si aggiunge una *variabile di scarto* x_{n+i} anch'essa soggetta al vincolo di non negatività $x_{n+i} \geq 0$, e la disequazione di (1) si riscrive come $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j + x_{n+i} = b_i$. Questa è una circostanza abbastanza frequente, perché proprio i più semplici problemi concreti che si schematizzano in forma di programmazione lineare nascono in modo naturale con uno o più vincoli in forma di disuguaglianza, come mostra il seguente esempio.

Esempio. Il ladro di prodotti elettronici. Un ladro riesce a introdursi, munito di un capiente autocarro vuoto, nel magazzino di un negozio di elettronica; il nostro è interessato a sottrarre computer, televisori, telecamere. Egli sa che da ogni televisore potrà ricavare 500€, da ogni computer 400€, da ogni telecamera 200€. Quindi, indicati con x_1 , x_2 , x_3 rispettivamente le quantità di televisori, computer, telecamere che il ladro caricherà sul camion, il suo (illecito) guadagno ammonterà a

$$p(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

(gli importi sono qui misurati in centinaia di Euro). Questa è la funzione oggetto che si desidera massimizzare. Supponiamo poi che ciascun televisore pesi 5Kg, ciascun computer 3Kg, ciascuna telecamera 1.5Kg, e che la portata del camion sia di 1500Kg. Bisogna quindi che sia

$$5x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 \leq 1500.$$

Poi, ogni televisore nella sua confezione ha un ingombro di 800 dm^3 , ogni computer 300 dm^3 , ogni telecamera 150 dm^3 ; la capacità di carico del camion è di 40000 dm^3 . Allora deve essere

$$800x_1 + 300x_2 + 150x_3 \leq 40000.$$

Infine, il ladro sa che ogni 45 minuti passa un guardiano armato, per controllare che tutto sia in ordine; perciò il furto è programmato per iniziare subito dopo un passaggio del guardiano; il tempo di carico degli oggetti è di 0.3 minuti per un televisore, 0.2 minuti per un computer, 0.15 minuti per una telecamera; l'operazione di carico dovrà quindi terminare entro 45', prima che la guardia ripassi: bisogna cioè che sia

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.15x_3 \leq 45$$

Abbiamo così la funzione oggetto $p(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 4x_2 + 2x_3$, in cui ciascuna x_j deve essere ≥ 0 , e i vincoli di programma consistenti nelle tre disequazioni scritte sopra, le quali rappresentano le limitazioni in peso, volume e tempo di carico per la merce oggetto del furto. Per ricondurci alla *forma standard* dovremo in questo caso introdurre tre *variabili di scarto* x_4 , x_5 , x_6 con vincolo di non negatività, e scrivere il sistema dei vincoli di programma nella forma

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 + x_4 = 1500 \\ 800x_1 + 300x_2 + 150x_3 + x_5 = 40000 \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.15x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

Prima di descrivere l'*algoritmo del simplesso* conviene introdurre alcune convenzioni sulle notazioni. Se A è la matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli di programma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

indichiamo con A_j ($1 \leq j \leq n$) la j -esima colonna di A e con B la colonna dei termini noti:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

cosicché il sistema (1) si può scrivere

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n x_j A_j = B$$

Poi, indichiamo con A^* il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^m generato da $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Assumiamo che valgano le seguenti condizioni, $I_1 - I_6$; di esse, I_2 e I_6 sono delle effettive *ipotesi* riguardanti gli oggetti di cui si parla; le altre sono assunzioni in cui vengono definiti i significati di certe costanti.

$$I_1) \quad \dim(A^*) = k$$

$$I_2) \quad B \in A^* \quad (\text{ciò significa che il sistema dei vincoli di programma non è privo di soluzioni})$$

$$I_3) \quad \mathcal{B} = \{A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_k}\} \text{ è una base di } A^*.$$

(essendo A^* generato da $\{A_1, \dots, A_n\}$ e $\dim(A^*) = k$, dagli n generatori se ne possono certamente estrarre k costituenti una base di A^*).

$$I_4) \quad \text{Per } 1 \leq j \leq n, \quad A_j = \sum_{r=1}^k \alpha_{r,j} A_{v_r}$$

Vengono definite le componenti di ciascun A_j rispetto alla base \mathcal{B} definita in I_3); è utile osservare che

$$\text{se } j = v_\ell \text{ allora } \alpha_{r,j} = \alpha_{r,v_\ell} = \begin{cases} 1 & \text{se } r = \ell \\ 0 & \text{se } r \neq \ell \end{cases}.$$

$$I_5) \quad B = \sum_{r=1}^k \beta_r A_{v_r}$$

Vengono definite le componenti B rispetto alla base \mathcal{B} definita in I_3); ciò è lecito grazie a I_2).

$$I_6) \quad \beta_r \geq 0 \quad \text{per } 1 \leq r \leq k.$$

Le ipotesi I_2) e I_6) mettono immediatamente a nostra disposizione un *programma ammissibile* associato in modo naturale alla base \mathcal{B} si tratta del vettore $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ avente come componenti

$$\bar{x}_j = \begin{cases} \beta_r & \text{se } j = v_r, 1 \leq r \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definiamo infine i numeri z_j , $1 \leq j \leq n$ e z come segue: indicati, come abbiamo già detto, con c_j i coefficienti del polinomio funzione-oggetto, $p(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$, siano

$$z_j = \sum_{r=1}^k c_{v_r} \alpha_{r,j}; \quad z = \sum_{r=1}^k c_{v_r} \beta_r$$

La tabella del simplesso

L'algoritmo del simplesso ha inizio con la compilazione di una tabella, detta *tabella del simplesso* associata alla base $\mathcal{B} = \{A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_k}\}$: questa è qui sotto illustrata.

		A_1	A_2	\dots	A_s	\dots	A_n	B
x_{v_1}	c_{v_1}	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$	\dots	$\alpha_{1,s}$	\dots	$\alpha_{1,n}$	β_1
x_{v_2}	c_{v_2}	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$	\dots	$\alpha_{2,s}$	\dots	$\alpha_{2,n}$	β_2
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_{v_r}	c_{v_r}	$\alpha_{r,1}$	$\alpha_{r,2}$	\dots	$\alpha_{r,s}$	\dots	$\alpha_{r,n}$	β_r
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_{v_k}	c_{v_k}	$\alpha_{k,1}$	$\alpha_{k,2}$	\dots	$\alpha_{k,s}$	\dots	$\alpha_{k,n}$	β_k
		$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	\dots	$z_s - c_s$	\dots	$z_n - c_n$	z

È utile osservare alcuni fatti:

- 1) Ciascun z_j è il prodotto scalare della colonna A_j per la colonna dei coefficienti c_{v_ℓ} , e z è il prodotto scalare delle colonne di componenti β_ℓ e c_{v_ℓ} .
- 2) Tra i vettori A_1, \dots, A_n ci sono A_{v_1}, \dots, A_{v_k} . La colonna della tabella del simplesso corrispondente alla posizione di ciascun A_{v_r} contiene il numero 1 nella r -esima posizione, 0 altrove.
- 3) In virtù di quanto osservato sopra, se $j = v_r$ allora $z_j = z_{v_r} = c_r \cdot 1 = c_r$, quindi $z_{v_r} - c_r = 0$, vale a dire che l'ultima riga ha sempre degli zeri in corrispondenza delle posizioni A_{v_1}, \dots, A_{v_k} .
- 4) La costante z è il valore assunto dalla funzione oggetto in corrispondenza del programma ammissibile \bar{x} associato alla base \mathcal{B} .

La compilazione della tabella del simplesso è immediata nel caso in cui *tutti* i vincoli di programma nascano sotto forma di disuguaglianza, cosicché si introducono tante variabili di scarto quanti sono i vincoli. In questo caso infatti i vettori A_{n+1}, \dots, A_{n+m} sono i vettori della base canonica di \mathbb{R}^m :

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se si prende come base \mathcal{B} la base $\{A_{n+1}, \dots, A_{n+m}\}$, che è la base canonica di $A^* = \mathbb{R}^m$, allora le componenti $\alpha_{r,j}$ dei vettori A_j , $1 \leq j \leq n$ sono le loro coordinate. La scelta di questa base non è obbligatoria, ma in questo caso appare come la più naturale. Per esempio, nel caso illustrato in precedenza (il ladro), la scelta di

$\mathcal{B} = \{A_4, A_5, A_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ conduce alla seguente tabella del simplesso:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B
$x_{v_1} = x_4 \quad c_{v_1} = c_4 = 0$	5	3	1.5	1	0	0	1500
$x_{v_2} = x_5 \quad c_{v_2} = c_5 = 0$	800	300	0.50	0	1	0	40000
$x_{v_3} = x_6 \quad c_{v_3} = c_6 = 0$	0.3	0.2	0.15	0	0	1	45
	-5	-4	-2	0	0	0	0

Quando invece la base \mathcal{B} non è la base canonica, le componenti $\alpha_{r,j}$ si debbono calcolare, perché non appaiono già in modo palese.

L'algoritmo del simplesso prosegue con il *riconoscimento di una situazione* fra tre possibili, che sono esaustive e mutuamente esclusive; ciascuna porta a una diversa conclusione. Le prime due sono effettivamente conclusive, nel senso che il calcolo è terminato; la terza invece prelude a un calcolo detto *trasformazione pivotale*, perché non è ancora stabilito quale sia una soluzione ottimale, né se esiste. Qui sotto descriviamo le tre situazioni e anticipiamo quali sono le conseguenze che si traggono; dopo provvederemo a dimostrare quanto affermato.

Situazione a): $z_j - c_j \geq 0$ per $1 \leq j \leq n$

In questo caso il problema è risolto. Una soluzione ottimale, tale cioè da rendere massimo il valore di $p(x)$ nella regione ammissibile, è \bar{x} definita come detto sopra.

Situazione b): Esiste s tra 1 e n tale che: $z_s - c_s < 0$, e $\alpha_{r,s} \leq 0$ per $1 \leq r \leq k$ (cioè, le componenti della colonna che sta sopra a $z_s - c_s$ sono tutte ≤ 0).

In questo caso *non esistono programmi ottimali* perché la funzione oggetto è superiormente illimitata nella regione ammissibile, la quale è a sua volta illimitata, perché altrimenti sarebbe violato il Teorema di Weierstrass.

Situazione c): Esiste s tra 1 e n tale che: $z_s - c_s < 0$, e per ogni j tra 1 e n tale che $z_j - c_j < 0$, esiste $r \in \{1, \dots, k\}$ tale che $\alpha_{r,j} > 0$ (cioè, tra le componenti della colonna che sta sopra a $z_j - c_j < 0$, almeno una è strettamente > 0 ; si tratta della situazione complementare ad **a)** e **b)**).

Questo caso è l'unico ad essere "operativo": non ci sono elementi sufficienti per affermare se esiste e quale sia una soluzione ottimale, né per affermare che non esiste. Si avvia un procedimento, detto *trasformazione pivotale*, consistente nel cambiare la scelta della base \mathcal{B} , eliminando da essa un vettore A_{v_r} e sostituendolo con un A_s che prima non ne faceva parte. La sostituzione viene fatta in modo che:

- 1) \mathcal{B}' così ottenuta sia ancora una base per A^*
- 2) Sia preservata la proprietà I_6) (non negatività delle componenti β'_r del vettore B rispetto alla nuova base).
- 3) $z' \geq z$, dove z' rappresenta l'analogo di z , relativamente alla base \mathcal{B}' .

Nella situazione **c)**, la trasformazione pivotale condurrà alla nuova tabella del simplesso relativa alla base \mathcal{B}' ; con riferimento alla nuova tabella si dovrà controllare se la situazione attuale è **a)**, **b)** oppure **c)**; nei primi due casi l'algoritmo ha termine, nel terzo si ripete il procedimento cambiando nuovamente la base. Non vi è garanzia, in teoria, che l'algoritmo abbia termine: sono stati dati controesempi in cui si dà luogo a un ciclo in cui si permane nella situazione **c)**, e le basi si ritrovano periodicamente; si tratta però di situazioni eccezionali; in pratica, dopo un numero finito di iterazioni si perviene a una delle situazioni **a)** oppure **b)**, che sono conclusive.

I seguenti sette Teoremi giustificano quanto affermato riguardo ad **a)** e **b)** e spiegano le modalità con cui si applica la *trasformazione pivotale* nel caso **c)**.

Teorema 1. Assumiamo le condizioni $I_1) - I_5)$. Allora, per un generico $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sono equivalenti le affermazioni:

$$(*) \quad \sum_{j=1}^n x_j A_j = B \quad (\text{cioè } \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i \text{ per } i=1, 2, \dots, m)$$

$$(**) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{r,j} x_j = \beta_r \text{ per } r=1, 2, \dots, k$$

Dimostrazione. Il punto centrale sta nelle identità

$$I_4) : A_j = \sum_{r=1}^k \alpha_{r,j} A_{v_r}, \quad j=1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad I_5) \quad B = \sum_{r=1}^k \beta_r A_{v_r}$$

Abbiamo allora

$$\sum_{j=1}^n x_j A_j = B \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n x_j \sum_{r=1}^k \alpha_{r,j} A_{v_r} = B;$$

proseguiamo invertendo l'ordine delle sommatorie:

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^k \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{r,j} x_j \right) A_{v_r} = B.$$

Ma è anche $B = \sum_{r=1}^k \beta_r A_{v_r}$, e ogni vettore di \mathbb{R}^m si può scrivere in un solo modo come combinazione lineare

dei vettori di una base; quindi bisogna che sia $\sum_{j=1}^n \alpha_{r,j} x_j = \beta_r$ per $r=1, 2, \dots, k$, come si voleva dimostrare.

Teorema 2. Assumiamo le condizioni $I_1) - I_6)$. Sia $J = \{1, 2, \dots, n\} - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Se $x = (x_1, \dots, x_n)$ è un *programma* (cioè una soluzione del sistema (1)) allora il valore della funzione oggetto p in x si può scrivere:

$$(2) \quad p(x) = z - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$$

Dimostrazione. La relazione $I_4)$, cioè $A_j = \sum_{r=1}^k \alpha_{r,j} A_{v_r}$ dice in particolare, prendendo $j = v_r$ per un r tra 1 e k

$$A_{v_r} = \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell, v_r} A_{v_\ell}$$

Ma siccome ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una base, la relazione scritta sopra implica che sia

$$\alpha_{\ell, v_r} = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell \neq r \\ 1 & \text{se } \ell = r \end{cases}$$

Ora riprendiamo la relazione (**) del Teorema 1, che vale per ogni x che sia un *programma*:

$$(**) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{r,j} x_j = \beta_r \text{ per } r=1, 2, \dots, k$$

Per quanto osservato sopra, nella r -esima equazione di (**) appare x_{v_r} con coefficiente 1, e nessun altro x_{v_ℓ} ; perciò l'equazione si può risolvere rispetto a x_{v_r} e dà

$$(***) \quad x_{v_r} = \beta_r - \sum_{j \in J} \alpha_{r,j} x_j$$

Tale relazione vale, in virtù del Teorema 1, per ogni programma x (in particolare, \bar{x} si ottiene quando $x_j = 0$ per ogni $j \in J$). Ora andiamo a scrivere $p(x)$ per un x programma, quindi soddisfacente (***)

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{r=1}^k c_{v_r} x_{v_r} + \sum_{j \in J} c_j x_j = \sum_{r=1}^k c_{v_r} \left(\beta_r - \sum_{j \in J} \alpha_{r,j} x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j = \\ &= \underbrace{\sum_{r=1}^k c_{v_r} \beta_r}_{=z} - \sum_{j \in J} \left(\underbrace{\sum_{r=1}^k c_{v_r} \alpha_{r,j}}_{=z_j} - c_j \right) x_j = z - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \end{aligned}$$

come si voleva dimostrare.

Teorema 3: conclusione dell'algoritmo nella situazione a).

Assumiamo le condizioni $I_1) - I_6)$. Se $z_j - c_j \geq 0$ per $j = 1, 2, \dots, n$, allora il programma ammissibile \bar{x} associato alla base \mathcal{B} è ottimale, cioè $z = p(\bar{x})$ è il massimo valore che $p(x)$ assume nella regione ammissibile.

Dimostrazione. Per il Teorema 2, per ogni programma x vale

$$(2) \quad p(x) = z - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$$

Abbiamo già osservato che \bar{x} ha $x_j = 0 \forall j \in J$, quindi $z = p(\bar{x})$. Se x è un altro programma ammissibile, le sue componenti sono tutte ≥ 0 ; in particolare lo sono gli x_j con $j \in J$. Inoltre ora stiamo supponendo

$z_j - c_j \geq 0$ per $j = 1, 2, \dots, n$; perciò $\sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \geq 0$, in quanto ogni addendo è ≥ 0 . Allora

$$p(\bar{x}) = z \geq z - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j = p(x)$$

come si voleva dimostrare.

Osservazione. Non è detto che \bar{x} sia l'unico programma ammissibile che rende massimo $p(x)$ nella regione ammissibile; semplici esempi mostrano che ci possono essere più programmi ottimali; osserviamo inoltre che se non c'è unicità, i programmi ottimali sono infiniti, perché è facile provare che se x' , x'' sono programmi ottimali, allora tutti i punti del segmento di estremi x' , x'' sono programmi ammissibili, e anche ottimali.

Teorema 4: conclusione dell'algoritmo nella situazione b).

Assumiamo le condizioni $I_1) - I_6)$. Supponiamo inoltre che esista $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $z_s - c_s < 0$ e $\alpha_{r,s} \leq 0$ per $r = 1, \dots, k$. Allora la regione ammissibile è illimitata, e $p(x)$ è superiormente illimitata nella regione ammissibile.

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ tale che $z_s - c_s < 0$ e $\alpha_{r,s} \leq 0$ per $r = 1, \dots, k$ appartiene necessariamente a $J = \{1, 2, \dots, n\} - \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Infatti, se fosse $s = v_\ell$ per un ℓ tra 1 e k allora $\alpha_{\ell,s} = \alpha_{\ell,v_\ell} = 1$, quindi non sarebbe $\alpha_{r,s} \leq 0$ per $r = 1, \dots, k$.

Sia ora R la semiretta descritta in forma parametrica nel modo seguente ($t \geq 0$ è il parametro): i punti di R sono $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ tali che:

$$x_j = \begin{cases} t & \text{se } j = s \\ \beta_r - \alpha_{r,s} t & \text{se } j = v_r, r = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La definizione è ben posta perché $s \in J$, come abbiamo osservato sopra. Ora mostriamo che:

1) R è contenuta nella regione ammissibile.

2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(x(t)) = +\infty$.

1) Mostriamo che gli $x(t), t \geq 0$ sono *programmi ammissibili*, cioè soddisfano il sistema dei vincoli e ogni componente è ≥ 0 . Innanzitutto risulta

$$\sum_{j=1}^n x_j(t) A_j = t A_s + \sum_{r=1}^k (\beta_r - t \alpha_{r,s}) A_{v_r} = \sum_{r=1}^k \beta_r A_{v_r} + t \left(A_s - \sum_{r=1}^k \alpha_{r,s} A_{v_r} \right) = B + t (A_s - A_s) = B$$

quindi è soddisfatto il sistema dei vincoli di programma.

Verifichiamo adesso che le componenti di $x(t)$ sono non negative; il controllo occorre soltanto per quelle della forma $\beta_r - \alpha_{r,s} t$; qui abbiamo $\beta_r \geq 0$ per ipotesi; $\alpha_{r,s} \leq 0$ per ipotesi e $t \geq 0$ perché così abbiamo stabilito definendo R ; quindi $\beta_r - \alpha_{r,s} t$ è somma di addendi non negativi, e perciò è ≥ 0 .

2) Mostriamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(x(t)) = +\infty$. Usiamo la scrittura di $p(x)$ di (2) del Teorema 2:

$$p(x) = z - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j$$

Nel caso attuale, $x = x(t)$, tra le componenti x_j con $j \in J$, soltanto la componente x_s è diversa da 0 (essendo uguale a t); quindi abbiamo

$$p(x(t)) = z - (z_s - c_s) t$$

e allora, ricordando che attualmente $z_s - c_s < 0$, risulta $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(x(t)) = +\infty$, come volevamo dimostrare.

LA TRASFORMAZIONE PIVOTALE

Adesso passiamo a considerare la situazione c), nella quale si applica la “trasformazione pivotale”. Abbiamo già accennato che essa consiste essenzialmente nel cambiare la base di riferimento \mathcal{B} di A^* , sostituendo uno dei vettori A_{v_r} con un A_s non già presente. Il primo requisito da soddisfare è che \mathcal{B}' ottenuto dopo la sostituzione sia ancora una base di A^* . Siccome il numero di elementi non cambia, è sufficiente controllare la lineare indipendenza degli elementi di \mathcal{B}' .

Teorema 5. Assumiamo le condizioni $I_1), I_3), I_4)$. La sostituzione in \mathcal{B} di A_{v_r} con A_s ($s \in J$) produce una nuova base di A^* se e solo se $\alpha_{r,s} \neq 0$.

Dimostrazione. Come abbiamo già osservato, è sufficiente controllare che la *lineare indipendenza* dei vettori

(#) $A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_{r-1}}, A_s, A_{v_{r+1}}, \dots, A_{v_k}$

equivale alla relazione $\alpha_{r,s} \neq 0$. Scriviamo dunque una combinazione lineare di questi vettori, e vediamo sotto quali condizioni essa può dare come risultato il vettore nullo. I coefficienti siano

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_k$; ξ_r è il coefficiente che moltiplica A_s , perché nella lista (#) è A_s a occupare la s -esima posizione. Abbiamo dunque l'espressione

$$(3) \quad \xi_r A_s + \sum_{\substack{\ell \in \{1, 2, \dots, k\} \\ \ell \neq r}} \xi_\ell A_{v_\ell}.$$

Adesso scriviamo A_s come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} , nel modo convenuto in I_4):

$$A_s = \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell,s} A_{v_\ell}$$

cosicché (3) diventa

$$\xi_r \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell,s} A_{v_\ell} + \sum_{\substack{\ell \in \{1, 2, \dots, k\} \\ \ell \neq r}} \xi_\ell A_{v_\ell} = \sum_{\substack{\ell \in \{1, 2, \dots, k\} \\ \ell \neq r}} (\xi_r \alpha_{\ell,s} + \xi_\ell) A_{v_\ell} + \xi_r \alpha_{r,s} A_{v_r}.$$

Quest'ultima appare come una combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} , che è per ipotesi un insieme linearmente indipendente; quindi essa dà il vettore nullo se e solo se tutti i coefficienti sono uguali a zero. Perciò la (3) dà il vettore nullo se e solo se

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_r \alpha_{r,s} = 0 \\ \xi_r \alpha_{\ell,s} + \xi_\ell = 0 \text{ per } \ell \in \{1, 2, \dots, k\}, \ell \neq r \end{cases}$$

Ora, se $\alpha_{r,s} \neq 0$, la prima di (4) implica $\xi_r = 0$, e allora le relazioni della seconda riga di (4) danno $\xi_\ell = 0$ per $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}, \ell \neq r$, e quindi i vettori $A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_{r-1}}, A_s, A_{v_{r+1}}, \dots, A_{v_k}$ sono linearmente indipendenti; invece, se $\alpha_{r,s} = 0$, la prima di (4) è soddisfatta con qualunque valore di ξ_r , per esempio $\xi_r = 1$; le altre sono allora soddisfatte da $\xi_\ell = -\alpha_{\ell,s}$. La (3) dà allora il vettore nullo anche con valori non tutti nulli dei coefficienti, quindi $A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_{r-1}}, A_s, A_{v_{r+1}}, \dots, A_{v_k}$ sono linearmente dipendenti; ciò conclude la dimostrazione.

Ora assumiamo valide le condizioni $I_1) - I_6)$, e supponiamo inoltre $\alpha_{r,s} \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_{r-1}}, A_{v_r}, A_{v_{r+1}}, \dots, A_{v_k}\} \\ \mathcal{B}' &= \{A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_{r-1}}, A_s, A_{v_{r+1}}, \dots, A_{v_k}\} \end{aligned}$$

sono due basi di A^* . Vogliamo compilare la nuova tabella del simpleso relativa non più alla base \mathcal{B} , bensì alla base \mathcal{B}' . Ci servono i coefficienti $\alpha'_{\ell,j}$ e β'_ℓ mediante i quali esprimere i vettori A_j e B come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B}' . Scriviamo, una accanto all'altra, le relazioni I_4) per un generico A_j .

$$(5) \quad A_j = \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell,j} A_{v_\ell}; \quad A_j = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k \alpha'_{\ell,j} A_{v_\ell} + \alpha'_{r,j} A_s.$$

Nella seconda di (5) sostituiamo A_s con la sua espressione $A_s = \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell,s} A_{v_\ell}$. Otteniamo allora

$$A_j = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k \alpha'_{\ell,j} A_{v_\ell} + \sum_{\ell=1}^k \alpha'_{r,j} \alpha_{\ell,s} A_{v_\ell}$$

cioè

$$A_j = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k (\alpha'_{\ell,j} + \alpha'_{r,j} \alpha_{\ell,s}) A_{v_\ell} + \alpha'_{r,j} \alpha_{r,s} A_{v_r}$$

Questa relazione esprime A_j come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} , proprio come la prima di (5); poiché ogni vettore di A^* si scrive in un solo modo come combinazione lineare dei vettori di una base, deve essere

$$\begin{cases} \alpha'_{r,j} \alpha_{r,s} = \alpha_{r,j} \\ \alpha'_{\ell,j} + \alpha'_{r,j} \alpha_{\ell,s} = \alpha_{\ell,j} \text{ per } \ell \in \{1, 2, \dots, k\}, \ell \neq r \end{cases}$$

da cui, tenendo presente che $\alpha_{r,s} \neq 0$, ricaviamo

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha'_{r,j} = \frac{\alpha_{r,j}}{\alpha_{r,s}} \\ \alpha'_{\ell,j} = \alpha_{\ell,j} - \frac{\alpha_{r,j}}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s} \text{ per } \ell \in \{1, 2, \dots, k\}, \ell \neq r \end{cases}$$

Con analogo ragionamento si ottengono le componenti β'_ℓ del vettore B rispetto alla nuova base \mathcal{B}' :

$$(7) \quad B = \sum_{\ell=1}^k \beta_\ell A_{v_\ell}; \quad B = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k \beta'_\ell A_{v_\ell} + \beta'_r A_s = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k \beta'_\ell A_{v_\ell} + \sum_{\ell=1}^k \beta'_r \alpha_{\ell,s} A_{v_\ell} = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k (\beta'_\ell + \beta'_r \alpha_{\ell,s}) A_{v_\ell} + \beta'_r \alpha_{r,s} A_{v_r}$$

e allora

$$\begin{cases} \beta'_r \alpha_{r,s} = \beta_r \\ \beta'_\ell + \beta'_r \alpha_{\ell,s} = \beta_\ell \text{ per } \ell \in \{1, 2, \dots, k\}, \ell \neq r \end{cases}$$

da cui

$$(8) \quad \begin{cases} \beta'_r = \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \\ \beta'_\ell = \beta_\ell - \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s} \text{ per } \ell \in \{1, 2, \dots, k\}, \ell \neq r \end{cases}$$

In pratica, la trasformazione pivotale si esegue mediante “trasformazioni elementari” per righe nella matrice della prima tabella del simplesso. La prima di (6) dice, per $j = s$, che $\alpha'_{r,s} = 1$; il primo passo consiste dunque nel dividere la riga r -esima per $\alpha_{r,s}$, per avere 1 nella posizione (r, s) . Siccome A_s è diventato il vettore nella r -esima posizione della nuova base \mathcal{B}' , la s -esima colonna della nuova matrice della tabella del simplesso deve

essere $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ con la componente 1 nella r -esima posizione. La seconda parte di (6) e di (8) descrive le

operazioni tra righe aventi come scopo quello di trasformare la s -esima colonna come detto; i valori che si formeranno nelle altre colonne sono proprio gli $\alpha'_{\ell,y}$ e β'_ℓ . Come prima, le colonne nelle posizioni corrispondenti ai vettori di \mathcal{B}' saranno quelle della matrice identità.

I CRITERI “DI ENTRATA” E “DI USCITA”

Il Teorema 5 spiega sotto quale condizione è possibile sostituire A_{v_r} con A_s ottenendo ancora una base di A^* ; la condizione, abbiamo visto, è $\alpha_{r,s} \neq 0$. Non c'è però alcun motivo per pensare che questo cambiamento di

base avvicini in qualche modo alla soluzione ottimale o alla prova della sua non esistenza; bisogna anche indirizzare il cambiamento di base in modo opportuno, ossia stabilire un *criterio di uscita* (quale vettore A_{v_r} eliminare da \mathcal{B}) e un *criterio di entrata* (quale vettore A_s inserire al posto di A_{v_r}). Ricordiamo che la trasformazione pivotale viene effettuata nella situazione c): esiste un $s \in \{1, \dots, n\}$ tale che $z_s - c_s < 0$, e per ciascun s soddisfacente questa condizione, esiste $r \in \{1, \dots, k\}$ tale che $\alpha_{r,s} > 0$. Osserviamo che s tale che $z_s - c_s < 0$ non può essere uno dei v_r , perché abbiamo notato che $z_{v_r} - c_{v_r} = 0$. Il vettore A_s “entrante” in \mathcal{B}' è uno di quelli corrispondenti a questi s , indifferentemente.

Il criterio di entrata è dunque, semplicemente: entra un vettore A_s tale che $z_s - c_s < 0$.

Questa regola può non essere univoca, nel senso che di vettori A_s con questa proprietà se ne possono avere più di uno; per togliere questa incertezza (per esempio, se si deve compilare un programma che realizzi l’algoritmo) si può decidere di scegliere A_s tale che $z_s - c_s$ sia minimo (cioè massimo in valore assoluto, essendo $z_s - c_s < 0$); in caso di parità si potrà decidere di prendere A_s con il minimo indice s ; ma tutto ciò non è decisivo per la riuscita dell’algoritmo. È invece importante la scelta del vettore che dovrà uscire da \mathcal{B} per lasciare il posto ad A_s . Questo è stabilito dal seguente Teorema 6.

Teorema 6 (criterio di uscita). Assumiamo le condizioni $I_1) - I_6)$, e inoltre esista un $s \in \{1, \dots, n\}$ tale che $z_s - c_s < 0$, e per ciascun s soddisfacente questa condizione, sia $\alpha_{\ell,s} > 0$ per almeno un $\ell \in \{1, \dots, k\}$. Fissato uno di questi s , sia $r \in \{1, \dots, k\}$ tale che

$$\frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} = \min \left\{ \frac{\beta_\ell}{\alpha_{\ell,s}}; \ell \in \{1, \dots, k\}, \alpha_{\ell,s} > 0 \right\}$$

Allora la base \mathcal{B}' di A^* ottenuta sostituendo in \mathcal{B} il vettore A_{v_r} con A_s è associata a un programma ammissibile.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che l’insieme di cui si cerca il minimo non è vuoto, in base alle ipotesi che si sono assunte.

Ciò che dobbiamo dimostrare è che le componenti del programma $\bar{x}' = (\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_n)$ associato alla base $\mathcal{B}' = \{A_{v_1}, A_{v_2}, \dots, A_{v_{r-1}}, A_s, A_{v_{r+1}}, \dots, A_{v_k}\}$ sono ≥ 0 . Ricordiamo che le componenti di \bar{x}' sono i β'_ℓ nelle posizioni $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, s, v_{r+1}, \dots, v_k, 0$ nelle altre posizioni; quindi si tratta di vedere che ogni $\beta'_\ell \geq 0$.

Ciò è ovvio per $\ell = r$ perché da (8) abbiamo $\beta'_r = \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}}$, e $\beta_r \geq 0$ per ipotesi, come pure $\alpha_{r,s} > 0$.

Per $\ell \neq r$ è $\beta'_\ell = \beta_\ell - \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s}$; ora distinguiamo due casi.

- Se $\alpha_{\ell,s} \leq 0$ allora $\beta_\ell \geq 0$ e $-\frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s} \geq 0$; quindi $\beta'_\ell \geq 0$ in quanto somma di due addendi non negativi.
- Se $\alpha_{\ell,s} > 0$ allora $\beta'_\ell = \beta_\ell - \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\beta_\ell}{\alpha_{\ell,s}} - \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \geq 0$, e quest’ultima disuguaglianza è soddisfatta per come è stato scelto r ; quindi $\beta'_\ell \geq 0$ anche in questo caso. Ciò conclude la dimostrazione.

Il seguente Teorema 7 spiega infine come l’algoritmo del semplice “progredisce” verso un programma ottimale, se questo esiste, nel senso che l’obiettivo di massimizzare $z = p(\bar{x})$ viene perseguito perché il nuovo valore z , sia z' , non è inferiore a z .

Teorema 7. Nelle stesse ipotesi del Teorema 6, si ha che $z' \equiv p(\bar{x}') \geq z \equiv p(\bar{x})$, dove \bar{x} e \bar{x}' rappresentano i programmi ammissibili associati rispettivamente alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' di A^* . Inoltre $z' = z \Leftrightarrow \beta_r = 0$, e in questo caso a ciascuna delle due basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' di A^* è associato lo stesso programma ammissibile, cioè $\bar{x} = \bar{x}'$.

Dimostrazione. Tenendo presente le rispettive definizioni abbiamo:

$$\begin{aligned} z' - z &= c_s \beta'_r + \underbrace{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k c_{v_\ell} \beta'_\ell}_{z'} - \underbrace{\sum_{\ell=1}^k c_{v_\ell} \beta_\ell}_z = c_s \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} + \underbrace{\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k c_{v_\ell} \left(\beta_\ell - \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s} \right)}_{z'} - \underbrace{\sum_{\ell=1}^k c_{v_\ell} \beta_\ell}_z = \\ &= c_s \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k c_{v_\ell} \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{\ell,s} - c_{v_r} \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \alpha_{r,s} = \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \left(c_s - \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq r}}^k c_{v_\ell} \alpha_{\ell,s} - c_{v_r} \alpha_{r,s} \right) = \\ &= \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} \left(c_s - \sum_{\ell=1}^k c_{v_\ell} \alpha_{\ell,s} \right) = \frac{\beta_r}{\alpha_{r,s}} (c_s - z_s) \end{aligned}$$

e siccome per ipotesi è $\beta_r \geq 0$, $\alpha_{r,s} > 0$, $c_s - z_s > 0$, la differenza $z' - z$ risulta ≥ 0 , come volevamo dimostrare. Precisamente, tale differenza è strettamente positiva se $\beta_r > 0$, è uguale a 0 se $\beta_r = 0$.

Mostriamo infine che in quest'ultimo caso, ossia $\beta_r = 0$, si ha $\bar{x} = \bar{x}'$. Le componenti di \bar{x} sono β_ℓ nelle posizioni v_ℓ , $\ell = 1, \dots, k$ e 0 altrove; le componenti di \bar{x}' sono β'_ℓ nelle posizioni v_ℓ , $\ell \neq r$; β'_r nella posizione s , 0 altrove. Se $\beta_r = 0$ le (8) mostrano che sia \bar{x} sia \bar{x}' hanno componenti 0 nelle posizioni v_r e s ; nelle posizioni nelle posizioni v_ℓ , $\ell \neq r$ hanno componenti uguali perché, essendo $\beta_r = 0$, risulta $\beta'_\ell = \beta_\ell$ per $\ell = 1, \dots, k$, $\ell \neq r$; quindi $\bar{x} = \bar{x}'$.

La trasformazione pivotale con l'algebra delle matrici

Le regole (6) e (8) che descrivono il legame tra le matrici M e M' (di dimensione $k \times (n+1)$) della tabella del simplesso relative alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' si possono descrivere sinteticamente osservando che

$$M' = H \cdot M$$

dove H indica la seguente matrice $k \times k$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{1,s}}{\alpha_{r,s}} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{2,s}}{\alpha_{r,s}} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & -\frac{\alpha_{r-1,s}}{\alpha_{r,s}} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_{r,s}} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{r+1,s}}{\alpha_{r,s}} & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{r,s}} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa osservazione può essere utile per istruire un programma che realizzi automaticamente la trasformazione; per la realizzazione “manuale”, richiesta naturalmente in casi con numeri piccoli di variabili e di vincoli, è più maneggevole il procedimento delle operazioni elementari per righe.

Nota: la programmazione lineare intera.

Accade spesso che le applicazioni della programmazione lineare trattino problemi in cui le variabili debbono assumere necessariamente valori interi; proprio l'esempio che abbiamo esposto all'inizio (il ladro di prodotti elettronici) rientra in questa categoria: x_1, x_2, x_3 contano quanti televisori, computer, telecamere saranno caricati sul camion, quindi per loro natura sono numeri interi. L'algoritmo del simplesso, anche quando conduce a una soluzione ottimale, non dà alcuna garanzia che questa abbia componenti intere; la soluzione ottimale “vera” sarà quindi diversa da quella ottenuta dall'algoritmo.

Se l'ordine di grandezza di x_1, x_2, \dots è piuttosto grande (per esempio, migliaia), l'arrotondamento dei risultati all'intero più vicino di solito è soddisfacente; le cose cambiano se i numeri coinvolti sono piccoli. La teoria della programmazione lineare si occupa in dettaglio di questo problema, sotto il nome di *programmazione lineare intera*; qui non affronteremo questo capitolo.

ESEMPI DI APPLICAZIONE DELL'ALGORITMO DEL SIMPLESSO

1) (25 gennaio 2016) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:

Trovare il massimo di $p(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + x_2 + 8x_3$ con i vincoli $x_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq 3$) e

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

(può essere utile notare che, posto $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, risulta $A_1 = 4A_2 - A_3 + A_4$ e $B = 2A_2 + A_3 + A_4$)

Svolgimento. Siccome la prima relazione è in forma di disuguaglianza, introduciamo la variabile “di scarto” $x_4 \geq 0$ e riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \sum_{j=1}^4 x_j A_j = B$$

dove gli A_j sono le colonne della matrice dei coefficienti e B la colonna dei termini noti.

Seguendo l'indicazione fornita scegliamo come base di $A^* = \mathbb{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}_1 = \{A_2, A_3, A_4\}$.

Si costruisce allora la prima tabella del simplesso come segue:

		A_1	A_2	A_3	A_4	B
$x_{v_1} = x_2$	$c_{v_1} = c_2 = 1$	4	1	0	0	2
$x_{v_2} = x_3$	$c_{v_2} = c_3 = 8$	-1	0	1	0	1
$x_{v_3} = x_4$	$c_{v_3} = c_4 = 0$	1	0	0	1	1
		-4	0	0	0	10
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	(z)

Siccome $z_1 - c_1 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,1}$ è positivo, bisogna operare la “trasformazione pivotale” facendo entrare nella base il vettore A_1 al posto di uno di quelli presenti. Il criterio di uscita impone di calcolare

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1,1}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta_3}{\alpha_{3,1}} = 1.$$

Siccome il minore dei due è $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,1}} = \frac{1}{2}$, esce il vettore $A_{v_1} = A_2$. La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_1, A_3, A_4 . Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_1, A_3, A_4\}$:

	A_1	A_2	A_3	A_4	B
$x_{v_1} = x_1$ $c_{v_1} = c_1 = 8$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$x_{v_2} = x_3$ $c_{v_2} = c_3 = 8$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{2}$
$x_{v_3} = x_4$ $c_{v_3} = c_4 = 0$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$
	0	3	0	0	16
	$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l'algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 16$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

2) (15 febbraio 2016) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:

Trovare il massimo di $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4$ con i vincoli $x_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq 4$) e

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 2 \end{cases}$$

(può essere utile notare che, posto $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, risulta $A_1 = A_3 + A_4 - 2A_5$, $A_2 = 2A_3 - A_4 + A_5$ e

$$B = 3A_3 + 2A_4 + A_5).$$

Svolgimento. Siccome la terza relazione è in forma di disuguaglianza, introduciamo la variabile "di scarto" $x_5 \geq 0$ e riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \sum_{j=1}^5 x_j A_j = B$$

dove gli A_j sono le colonne della matrice dei coefficienti e B la colonna dei termini noti.

Seguendo l'indicazione fornita scegliamo come base di $A^* = \mathbb{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_4, A_5\}$.

Si costruisce allora la prima tabella del simplesso come segue:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$ $c_{v_1} = c_3 = 1$	1	2	1	0	0	3
$x_{v_2} = x_4$ $c_{v_2} = c_4 = 8$	1	-1	0	1	0	2
$x_{v_3} = x_5$ $c_{v_3} = c_5 = 0$	-2	1	0	0	1	1
	5	-5	0	0	0	19
	$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_2 - c_2 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,2}$ è positivo, bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_2 al posto di uno di quelli presenti. Il criterio di uscita impone di calcolare

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1,2}} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\beta_3}{\alpha_{3,2}} = 1.$$

Siccome il minore dei due è $\frac{\beta_3}{\alpha_{3,2}} = 1$, esce il vettore $A_{v_3} = A_5$. La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_3, A_4, A_2 . Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_3, A_4, A_2\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 1$	5	0	1	0	-2	1
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 8$	-1	0	0	1	1	3
$x_{v_3} = x_2$	$c_{v_3} = c_2 = -1$	-2	1	0	0	1	1
		-5	0	0	0	5	24
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_1 - c_1 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,1}$ è positivo, bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_1 al posto di uno di quelli presenti. Siccome il solo $\alpha_{\ell,1}$ con valore positivo è $\alpha_{1,1} = 5$, esce il vettore $A_{v_1} = A_3$. La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_1, A_4, A_2 . Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_3 = \{A_1, A_4, A_2\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_1$	$c_{v_1} = c_1 = 4$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 8$	0	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{5}$
$x_{v_3} = x_2$	$c_{v_3} = c_2 = -1$	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
		0	0	1	0	3	25
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l'algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 25$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 0, \frac{16}{5}, 0)$.

La "partenza" dell'algoritmo del simplesso è agevolata se tutti i vincoli di programma sono in forma di disuguaglianza, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq b_i$, $1 \leq i \leq m$. In questo caso vanno aggiunte m variabili di scarto, e i vettori

A_{n+1}, \dots, A_{n+m} corrispondenti a tali variabili saranno quelli della base canonica di \mathbb{R}^m . Se come base iniziale prenderemo $\mathcal{B} = \{A_{n+1}, \dots, A_{n+m}\}$, la matrice della prima tabella del simplesso avrà come elementi $\alpha_{i,j}$ e β_j proprio le coordinate dei vettori $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+m}, B$, in virtù del fatto che \mathcal{B} è la base canonica; vediamo un esempio.

3) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:

Trovare il massimo di $p(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$ con i vincoli $x_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq 2$) e

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \end{cases}$$

Svolgimento. Siccome i vincoli sono in forma di disuguaglianza, introduciamo le variabili di scarto x_3, x_4 e riscriviamo il sistema dei vincoli di programma nella forma

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 400 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 600 \end{cases}$$

Scegliamo come base di $A^* = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{A_3, A_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Questa scelta non è obbligatoria, ma è comoda perché in questo modo la prima tabella del simplesso si compila immediatamente:

		A_1	A_2	A_3	A_4	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 0$	1	1	1	0	400
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 0$	2	1	0	1	600
		-5	-3	0	0	0
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	(z)

Siamo nella “situazione c)”; può entrare nella base uno qualunque tra A_1 e A_2 ; scegliamo A_1 . Per decidere quale vettore deve uscire da \mathcal{B} calcoliamo

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1,1}} = \frac{400}{1} = 400; \quad \frac{\beta_2}{\alpha_{2,1}} = \frac{600}{2} = 300.$$

Il minimo tra questi due valori è $\frac{\beta_2}{\alpha_{2,1}} = 300$, quindi *esce* il vettore $A_{v_2} = A_4$. La trasformazione pivotale avviene in modo che i vettori canonici figurino nelle posizioni corrispondenti ad A_3 e A_1 (in questo ordine). La nuova tabella del simplesso, relativa a $\mathcal{B}' = \{A_3, A_1\}$ è

		A_1	A_2	A_3	A_4	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 0$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	100
$x_{v_2} = x_1$	$c_{v_2} = c_1 = 5$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	300
		0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1500
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	(z)

Siamo ancora nella “situazione c)”; il vettore che entra nella base è A_2 . Per decidere quale vettore deve uscire da \mathcal{B} calcoliamo

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1,2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200; \quad \frac{\beta_2}{\alpha_{2,2}} = \frac{300}{\frac{1}{2}} = 600.$$

Il minimo tra questi due valori è $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,2}} = 200$, quindi *esce* il vettore $A_{v_1} = A_3$. La trasformazione pivotale avviene in modo che i vettori canonici figurino nelle posizioni corrispondenti ad A_2 e A_1 (in questo ordine). La nuova tabella del simplesso, relativa a $\mathcal{B}' = \{A_2, A_1\}$ è

		A_1	A_2	A_3	A_4	B
$x_{v_1} = x_2$	$c_{v_1} = c_2 = 3$	0	1	2	-1	200
$x_{v_2} = x_1$	$c_{v_2} = c_1 = 5$	1	0	-1	1	200
		0	0	1	2	1600
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l'algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 1600$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (200, 200, 0, 0)$.

4) (31 maggio 2016) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:

Trovare il massimo di $p(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$ con i vincoli $x_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq 2$) e

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Svolgimento. Siccome tutte e tre le relazioni sono in forma di disuguaglianza, introduciamo le variabili "di scarto" $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ e riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \sum_{j=1}^5 x_j A_j = B$$

dove gli A_j sono le colonne della matrice dei coefficienti e B la colonna dei termini noti.

Scegliamo come base di $A^* = \mathbb{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_4, A_5\}$.

Si costruisce allora la prima tabella del simplesso come segue:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$ $c_{v_1} = c_3 = 0$	-2	1	1	0	0	1
$x_{v_2} = x_4$ $c_{v_2} = c_4 = 0$	1	-3	0	1	0	3
$x_{v_3} = x_5$ $c_{v_3} = c_5 = 0$	-1	-1	0	0	1	2
	-3	1	0	0	0	0
	$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_1 - c_1 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,1}$ è positivo, bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_1 al posto di uno di quelli presenti.

Soltanto $\alpha_{2,1} = 1$ è positivo, quindi il criterio di uscita è immediato e fa uscire $A_{v_2} = A_4$

La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_3, A_1, A_5 . Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_3, A_1, A_5\}$:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$ $c_{v_1} = c_3 = 0$	0	-5	1	2	0	7
$x_{v_2} = x_1$ $c_{v_2} = c_1 = 3$	1	-3	0	1	0	3
$x_{v_3} = x_5$ $c_{v_3} = c_5 = 0$	0	-2	0	1	1	5
	0	-8	0	3	0	9
	$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Si nota che $z_2 - c_2 = -8 < 0$, e che tutti i coefficienti $\alpha_{\ell,2}$ sono negativi. Siamo dunque nella "situazione b", la quale implica che la funzione oggetto è superiormente illimitata nella regione ammissibile, quindi il problema di determinarne il massimo non ha soluzione.