Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Secondo appello. 16 luglio 2020

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

B. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty)$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Cosa si può dire sugli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0, 1)$?

C. Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della convoluzione e la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione.

D. Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Considerando nota la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

e sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier:

a. Calcolare
$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) \text{ per } a>0 \text{ qualsiasi;}$$
quindi calcolare
$$\mathcal{F}\left(e^{-2|x|} * e^{-3|x|}\right)$$
(in entrambi i casi si chiede di riportare i passaggi, non limitarsi a scrivere il risultato).

b. Calcolare
$$e^{-2|x|} * e^{-3|x|},$$
sfruttando il risultato del punto precedente. (Suggerimento: non occorre usare il metodo dei residui; ricondursi alle trasformate appena calcolate).

2. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 6y = f(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$
cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L-trasformabile.

3. (5 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \chi_{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}(x).$$

a. Dimostrare che T_f è una distribuzione su $\mathbb{R}$. E' una distribuzione temperata? E' una distribuzione a supporto compatto?

b. Calcolare $(T_f)'$, semplificando l'espressione trovata. Infine scrivere il valore di $\langle (T_f)', \phi \rangle$ esplicitamente, cioè in termini di ϕ e non di ϕ'.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Secondo appello. 16 luglio 2020

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

B. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty)$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Cosa si può dire sugli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0, 1)$?

C. Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della convoluzione e la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione.

D. Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrare** (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier di: delta di Dirac, esponenziale complesso, funzioni seno e coseno, funzione x^k. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Considerando nota la trasformata di Fourier $\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ e sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier:

a. Calcolare $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)$ per $a>0$ qualsiasi; quindi calcolare $\mathcal{F}\left(e^{-2|x|} * e^{-3|x|}\right)$ (riportare i passaggi).

b. Calcolare $e^{-2|x|} * e^{-3|x|}$, sfruttando il risultato del punto precedente. (Suggerimento: non occorre usare il metodo dei residui; ricondursi alle trasformate appena calcolate).

1. Sia $g(x) = e^{-|x|}$, $\mathcal{F}\left(e^{-|x|}\right)(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ allora

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(g^a(x)\right)(\xi) = \widehat{g}_a(\xi) = \frac{1}{a}\frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{\xi}{a}\right)^2} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}.$$

Perciò

$$\mathcal{F}\left(e^{-2|x|} * e^{-3|x|}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-2|x|}\right)(\xi)\cdot\mathcal{F}\left(e^{-3|x|}\right)(\xi) = \frac{1}{1+\pi^2\xi^2}\cdot\frac{6}{9+4\pi^2\xi^2}.$$

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(e^{-2|x|} * e^{-3|x|}\right)(\xi) &= 6\left(\frac{1}{1+\pi^2\xi^2}\cdot\frac{1}{9+4\pi^2\xi^2}\right)\\ &= 6\left(\frac{a}{1+\pi^2\xi^2}+\frac{b}{9+4\pi^2\xi^2}\right)\end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} 9a+b=1 \\ \pi^2(4a+b)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-4a \\ 5a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(e^{-2|x|} * e^{-3|x|}\right)(\xi) &= \frac{6}{5}\left(\frac{1}{1+\pi^2\xi^2}-\frac{4}{9+4\pi^2\xi^2}\right)(\xi)\\ &= \mathcal{F}\left(\frac{6}{5}\left(e^{-2|x|}-\frac{4}{6}e^{-3|x|}\right)\right)\end{aligned}$$

$$e^{-2|x|} * e^{-3|x|} = \frac{6}{5}e^{-2|x|} - \frac{4}{5}e^{-3|x|}.$$

2. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 6y = f(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L-trasformabile.

Indicando con$Y(s), F(s)$ rispettivamente le trasformate di $y(t), f(t)$ si ha:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = F(s)$$

$$\begin{aligned} Y(s)\left(s^2 - 4s + 6\right) &= F(s) + sy(0) + y'(0) - 4y(0) \\ Y(s)\left(s^2 - 4s + 6\right) &= F(s) + 2s - 3 - 8 \\ Y(s) &= F(s) \cdot \frac{1}{(s^2 - 4s + 6)} + \frac{2s - 11}{s^2 - 4s + 6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 - 4s + 6} &= \frac{1}{(s-2)^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s-2)^2 + 2} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \\ \frac{2s - 11}{s^2 - 4s + 6} &= 2\frac{(s-2)}{(s-2)^2 + 2} - \frac{7}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s-2)^2 + 2} = \mathcal{L}\left(2e^{2t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{7}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}\left(f(t) * \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right) + 2e^{2t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{7}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right)\right)(s) \\ y(t) &= f(t) * \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right) + 2e^{2t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{7}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t e^{2(t-\tau)} \sin\left(\sqrt{2}(t-\tau)\right) f(\tau)\, d\tau + 2e^{2t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{7}{\sqrt{2}} e^{2t} \sin\left(\sqrt{2}t\right). \end{aligned}$$

3. (5 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \chi_{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)}(x).$$

a. Dimostrare che T_f è una distribuzione su $\mathbb{R}$. E' una distribuzione temperata? E' una distribuzione a supporto compatto?

b. Calcolare $(T_f)'$, semplificando l'espressione trovata. Infine scrivere il valore di $\langle (T_f)', \phi \rangle$ esplicitamente, cioè in termini di ϕ e non di ϕ'.

a. Primo modo di provare che T_f è una distribuzione: provare che $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. (Anzi, in realtà $f \in L^1(\mathbb{R})$). Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1/n}^{1/n} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^{1/n} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^3} < \infty.$$

Secondo modo di provare che T_f è una distribuzione: per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$|\langle T_f, \phi \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1/n}^{1/n} x^2 |\phi(x)|\, dx \leq \|\phi\|_{C^0} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^{1/n} x^2 dx = \|\phi\|_{C^0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^3}$$

e per il criterio delle seminorme visto a lezione, $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Poiché $\operatorname{supp} f \subset [-1,1]$, T_f è una distribuzione a supporto compatto, a maggior ragione è una distribuzione temperata.

b. Calcoliamo $(T_f)'$ derivando termine a termine.

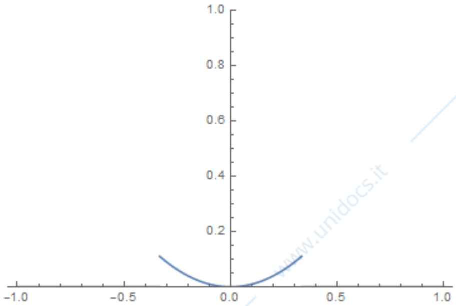

Grafico di $x^2\chi_{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}(x)$

Si ha:

$$\left(T_{x^2\chi_{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}(x)}\right)' = 2x\chi_{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}(x) - \frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\delta_{-\frac{1}{n}}$$

Quindi

$$(T_f)' = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{2x\chi_{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}(x) - \frac{1}{n}\delta_{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\delta_{-\frac{1}{n}}\right\}.$$

$$\langle (T_f)', \phi\rangle = 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1/n}^{1/n} x\phi(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\phi\left(-\frac{1}{n}\right) - \phi\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$