SCHEMI ANALISI FUNZ. Sia $f_n: I \to \mathbb{R}$ una succ. per $n=1,2,3\dots$

- **Convergenza puntuale**: $f_n \to f$ punt. se $\forall \bar{x} \in I$ $\exists$ finito $\lim_{n\to+\infty} f_n(\bar{x}) = f(\bar{x})$

- **Convergenza uniforme** $f_n \to f$ unif. se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n > n_0$ e $\forall x \in I$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

- **Teo Conv. unif. + continuità**: f_n continue in I, se $f_n \to f$ unif. $\Rightarrow f$ continua in I

- **Teo. Conv. unif. + integrab.**: f_n Riemann-integr., se $f_n \to f$ unif. $\Rightarrow f$ è Riemann-integr.

$f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad \int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow{n\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \iff \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx$

- **Teo. Conv. unif. + deriv.** f_n derivabili in I, $\exists f, g: I \to \mathbb{R}$ t.c.:

1. $f_n \to f$ punt. in I
2. $f_n' \to g$ unif. in I

$\Longrightarrow$

1. f è deriv.
2. $f' = g$
3. $f_n \to f$ unif.

$\nearrow \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]'$

- **Spazio vett. funz.** $\mathcal{F}_I = \{f: I \to \mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C})\}$ Sp. vett. su $\mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C})$ se:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$

- **Sottosp. Vett.** Se X è uno sp. vett. su $\mathbb{R}$ e $X_0 \subseteq X \Rightarrow X_0$ è un sottosp. vett. di X se $\forall x,y \in X_0$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in X_0$
comb. lin.

- **Sp. vett. normato**: X è uno sp. vett. su $\mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C})$ che si dice normato se è definita una funz. $\|\cdot\|: X \to [0, +\infty)$ t.c.:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$ $\forall x \in X$ (annullamento)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (o\ \mathbb{C})$, $\forall x \in X$ (omogeneità)
3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (triang.)

- $\mathcal{C}^0[a,b]$: $\mathcal{C}^0[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} ,\ f \text{ continua} \}$ → sp. vett. normato

norma naturale: $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^0[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

norma integrale: $\| \cdot \|_I = \| \cdot \|_{L^1} = \int_a^b |f(x)|\,dx$

NON equiv. $\left(c_1 \| \cdot \|_1 \leq \| \cdot \|_2 \leq c_2 \| \cdot \|_1 \right)$

- $\mathcal{C}^0(a,b)$: sp. vett. (non) normato → $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

- $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$: $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua e limitata} \}$ → sp. vett. normato

norma: $\|f\|_{\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

- $\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R})$: $\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua e } f(x) \to 0 \text{ per } x \to \pm \infty \}$

→ sp. vett. normato

- $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$: $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua e } \exists\, [a,b] \text{ t.c. } f(x) = 0\ \forall x \notin [a,b] \}$

→ sp. vett. normato

$$\underbrace{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}_{\text{non normato}} \supsetneq \underbrace{\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}) \supsetneq \mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) \supsetneq \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})}_{\text{normati}}$$

- Spazio metrico: Si dice spazio metrico un insieme X per cui è def. una funzione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ dove $d(x,y) =$ "distanza di x da y" t.c.:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (annull.)
2. $d(x,y) = d(y,x)$ (simm.)
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

↳ con $d(x,y) = \|x - y\| \Rightarrow$ Ogni sp. vett. normato è uno sp. metrico

- Relazioni spazi: VETTORIALE NORMATO METRICO (sottinteso sp. (vett.) è)

- NORMATO $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ METRICO
- Sottosp. VETT. di sp. NORMATO ⇒ NORMATO
- Sottosp. di sp. METRICO ⇒ METRICO
- Sottosp. di sp. VETT. $\not\Rightarrow$ VETT.

- $B_r(x_0)$: (X,d) sp. metrico $B_r(x_0)=\{x\in X \mid d(x,x_0)<r\}$
- Succ di Cauchy: (X,d) sp. metrico e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X \Rightarrow x_n$ si dice di Cauchy se:

  $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0$ t.c. $n,m>n_0$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon$

  (x_n è di Cauchy se $d(x_n,x_m)\longrightarrow 0$ per $n,m\to+\infty$)

- Cauchy sp. normato: $(X,\|\cdot\|)$ sp. normato, $\{f_n\}\subseteq X$ è di Cauchy se:

  $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n,m>n_0$ $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$

- Teo. Cauchy + Succ. converg.: Se $\{x_n\}$ è converg. $\Rightarrow \{x_n\}$ è di Cauchy
- Teo. Cauchy + limitata: Se $\{x_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \{x_n\}$ è limitata
- Spazio completo: (X,d) sp. metrico $\Rightarrow (X,d)$ è COMPLETO se ogni succ di Cauchy in X è convergente a un $x\in X$.
- Spazio di Banach: sp. NORMATO completo = sp. BANACH
- Conv. unif = Conv. in norma $\mathcal{C}^0$: Conv. unif.: $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n\geq n_0$ $\underbrace{\max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|}_{\|f_n-f\|_{\mathcal{C}^0[I]}}\leq\varepsilon$

  $\Rightarrow$ Conv. unif $\equiv$ Conv. in norma $\mathcal{C}^0$

- Teo. condizione di Cauchy per la conv. unif.: $f_n: I\to\mathbb{R}$

  $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n,m\geq n_0$ $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in I \Rightarrow \exists f: I\to\mathbb{R}$ t.c. $f_n\to f$ unif. in I

- Teo. $\mathcal{C}^0[a,b]$ con $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ COMPLETO: Lo spazio $\mathcal{C}^0[a,b]$ con norma $\mathcal{C}^0$ è COMPLETO

  spazio di Banach

In generale: se $K\subseteq\mathbb{R}^n$ è un insieme chiuso e limitato, $(\mathcal{C}^0(K),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$ è COMPLETO

N.B. $\mathcal{C}^0[a,b]$ con norma $\|\cdot\|_1=\|\cdot\|_{L^1}$ NON è COMPLETO

$$\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}) \supsetneq \mathcal{C}^0_*(\mathbb{R}) \supsetneq \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}) \quad (\text{per la norma } \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$$

$\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R})$: COMPLETO (BANACH); $\mathcal{C}^0_*(\mathbb{R})$: COMPLETO (BANACH); $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R})$: NON COMPLETO

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari