SCHEMA ANALISI FUNZ.

- **Teo. della proiezione:** Sia H uno spazio di Hilbert, V_n un suo sottospazio vettoriale finito dimensionale, dotato della base ortonormale $\{e_J\}_{J=1}^n$

$\Rightarrow$ Allora per ogni $x \in H$ $\exists!$ $\bar{v} \in V_n$:

1. $\|\bar{v} - x\| \leq \|v - x\|$ $\longrightarrow$ $\bar{v}$ elemento di V di minima distanza da x
2. $(x - \bar{v}) \perp V_n$
3. $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$ $\longrightarrow$ $\bar{v}$ = proiezione di x su V_n
4. $\|\bar{v}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$

- **Algoritmo di Gram-Schmidt:** Per ortonormalizzare la base di uno spazio U in un altro spazio E:
  - $e_1 = \underset{\text{versore}}{\text{vers}}(u_1) = \frac{u_1}{\|u_1\|}$
  - $e_2 = \text{vers}(u_2 - (u_2, e_1) e_1)$

  $\vdots$

  - $e_k = \text{vers}\left(u_k - \sum_{J=1}^{k-1} (u_k, e_J) e_J\right)$ $\quad k = 2, \dots, n$

- **Disug. di Bessel:** Se $\{e_J\}_{J=1}^{\infty}$ è un s.o.n. (sist. ortonormale) in uno sp. di Hilbert H, per ogni $x \in H$ vale la disug. (di Bessel):

$$\sum_{J=1}^{\infty} |(x, e_J)|^2 \leq \|x\|^2$$

$\longrightarrow$ la serie converge a un certo $\bar{x}$

e vale:

$$\left\|x - \sum_{J=1}^{n} (x, e_J) e_J\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{J=1}^{n} |(x, e_J)|^2$$

- **Sist. ortonormale completo (s.o.n.c.):** Sia H uno sp. di Hilbert. Si dice $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un sist. ortonormale completo se:

1. è un s.o.n. $\longrightarrow$ $(e_i, e_J) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = J \\ 0 & \text{se } i \neq J \end{cases}$
2. $\forall x \in H$ se $(x, e_J) = 0$ $\forall J \Longrightarrow x = 0$

- **Teo. Serie e trasformata di Fourier in sp. di Hilbert:** Sia H uno sp. di Hilbert e sia $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ un s.o.n.c. $\forall x \in H$. Poniamo $\hat{x}_n = (x, e_n)$ $\longleftarrow$ coeff. di Fourier n-esimo

chiamiamo $\mathcal{F}(x) = \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Allora:

1. $\mathcal{F}: \underline{x} \longmapsto \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un op. lin. da H a ℓ^2 → $\mathcal{F}$ lineare

2. $\mathcal{F}$ è iniettivo e suriettivo

3. $\mathcal{F}$ è un'isometria di sp. di Hilbert, cioè conserva la norma e il prod. scal. cioè:

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in H \quad (\underline{x}, \underline{y})_H = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \hat{y}_n \longleftarrow \text{prod. scal. in } \ell^2$$

$$\|\underline{x}\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 \Longrightarrow \bar{x}_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \underline{e}_n = \underline{x}$ cioè la serie di Fourier di $\underline{x}$ converge proprio a $\underline{x}$

→ $\mathcal{F}$ = trasformata di Fourier sullo sp. di Hilbert H.

- **Polinomi di Legendre**: Ortonormalizzo in $L^2(-1,1)$ i vettori $1, x, x^2, \dots, x^n \longrightarrow \underbrace{P_0, P_1, \dots, P_n}_{\text{pol. Legendre}}$

 es. $1, x, x^2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

- **Polinomi di Hermite**: Ortonorm. in $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ (misura peso gaussiana) i vettori $1, x, x^2, \dots x^n \longrightarrow \underbrace{H_0, H_1, \dots, H_n}_{\text{pol. Hermite}}$

 es. $1, x, x^2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\, x, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

 → Funzioni di Hermite: $H_n(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \longleftrightarrow$ s.o.n.c. in $L^2(\mathbb{R})$

- **Sp. isometricamente isomorfi nello sp. ℓ^2**: Ogni sp. di Hilbert che abbia un s.o.n.c. $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ numerabile è isometric. isomorfo nello sp. ℓ^2

 es. $L^2(\mathbb{R}), L^2(0,T) \longrightarrow$ sono "identificabili" con ℓ^2

- **Trasformata di Fourier**: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-i2\pi\xi y} dy\right)}_{\hat{f}(\xi)} e^{i2\pi\xi x} dx \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$\hat{f}(\xi) \longrightarrow$ TRASF. DI FOURIER DI f

- **Proprietà della trasf. di Fourier**:
  - se f è pari $\longrightarrow \hat{f}$ reale e pari
  - se f è disp. $\longrightarrow \hat{f}$ imm. pura e disp.
  - se $f \in L^1(\mathbb{R})$ (si può estendere a $\mathbb{R}^n$):
    - $\hat{f} \in C^0_*(\mathbb{R}^n)$
    - se anche $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (\widehat{f * g}) = \hat{f} \cdot \hat{g}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g}$
- Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^{n-1}(\mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ deriv. a tratti, $f^{k}(x) \to 0$ in $|x| \to +\infty$ $(k = 1, \dots, n-1)$

$$f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}) \text{ per } k = 1, \dots, n \Longrightarrow \mathcal{F}\left(f^{(n)}(x)\right)(\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$$

OPERATORE TRASF. FOURIER DI f