

SCHEMI ANALISI FUNZ.

- Operatore lineare: Siano X, Y due sp. vett. normati sul campo $K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Una funz. $T: X \rightarrow Y$ si dice operatore lineare se:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall x, y \in X, \lambda, \mu \in K$$

- Teo. 3 condiz. fond. op. lin.: Siano X, Y 2 sp. vett. normati e $T: X \rightarrow Y$ un op. lin. Sono equiv. le 3 condiz.:

- T vista come funz. tra spazi normati*
- 1 T è CONTINUA in \emptyset
 - 2 T è CONTINUA in ogni punto
 - 3 $\exists k$ t.c. $\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X \quad \forall x \in X$ o anche $\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y < +\infty$

- Op. lin. continuo: Un op. lin. $T: X \rightarrow Y$ tra 2 spazi vett. normati X, Y si dice continuo se vale una delle 3 condiz. equivalenti espresse dal teo. prec. In tal caso si definisce norma dell'operatore il numero:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y$$

- Spazio $\mathcal{L}(X, Y)$: $\mathcal{L}(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y, T \text{ lin. cont.}\}$ spazio op. (lin. e cont.)
(X, Y sp. vett. norm.) e vale che: Se Y è di BANACH $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ è di BANACH

- Funzioni vs Operatori vs Funzionali:

- FUNZIONE = legge che a ogni numero (di un certo insieme) associa uno e un solo numero (di un certo insieme)
- OPERATORE = legge che a ogni funzione (di un certo spazio) associa una e un sola funzione (di un certo spazio)
- FUNZIONALE = legge che a ogni funzione (di un certo spazio) associa uno e un solo numero (di un certo insieme)

- Funzionale lin. cont.: Sia X uno sp. vett. su $K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$, norm. Sia $T: X \rightarrow K$ lin. cont. Allora si dice che T è un funz. lin. cont. su X con norma $\|T\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} |T(x)| \rightarrow |T(x)| \leq \|T\| \|x\|_X$

• Duale $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$: $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \text{duale di } X \rightarrow \text{spazio di Banach } X \text{ di: } Y = \mathbb{R} \text{ è completo}$
 $X' \rightarrow \text{Duale di uno sp. vett. norm.} = \text{sp. di tutti i funz. lin. cont. su } X$

• Teo. Rapp. Riesz: Se p, q sono esp. coniug. e $p \in [1, +\infty)$ allora lo spazio duale di $L^p(\Omega)$ si identifica con $L^q(\Omega)$.

$$T \in (L^p(\Omega))' \iff \exists f \in L^q \text{ t.c. } Tg = \int_{\Omega} fg \quad \|T\| = \|f\|_{L^q}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}(L^p(\Omega), \mathbb{R}) \simeq L^q(\Omega) \rightarrow (L^p(\Omega))' \cong L^q(\Omega)$$

• Sp. vett. con prodotto scalare: Sia V uno sp. vett. (su \mathbb{R} o \mathbb{C}). Diciamo che V è uno sp. vett. con prodotto scalare se, oltre alle 2 op. di sp. vett., è def. una terza oper. "PRODOTTI SCALARE": $(\vec{u}, \vec{v}): V \times V \rightarrow K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

\rightarrow e soddisfa queste prop.:

1. linearità sulla prim. comp.: $(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda (\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu (\vec{u}_2, \vec{v}) \quad \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v} \in V \quad \lambda, \mu \in K$

2. a) se $K = \mathbb{R}$ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ p. commutativa
 $(\vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}_1) + \mu (\vec{u}, \vec{v}_2)$ bilinearità

b) se $K = \mathbb{C}$ $(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{u})}$
 $(\vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}_1) + \bar{\mu} (\vec{u}, \vec{v}_2)$ sesquilinearità

3. Positività: $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in V$ e $(x, x) = 0 \iff x = 0$

• Teo. Proprietà sp. pre-Hilbertiani: Sia V uno sp. pre-Hilbert. su K . Allora:

1. Vale la dis. di Cauchy-Schwarz: $|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

2. Se si definisce $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$ ← NORMA DEL PROD. SCALARE

! $\hookrightarrow (x, y) \leq \|x\| \|y\|$

3. Vale l'UGUAGLIANZA DEL PARALLELOGRAMMA:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

• Spazio pre-Hilbertiano: Spazio vett. normato la cui norma proviene da un prod. scalare

• Teo. Continuità dell. norm del prod. scalare rispetto alla conv. in norma: Sia V uno sp. pre-Hilbert.

Allora il prod. scalare è continuo. Cioè: se ho 2 succ. $\{x_n\}, \{y_n\} \subset V$ t.c.

$$\begin{array}{ccc} x_n \xrightarrow{V} x, & y_n \xrightarrow{V} y & x, y \in V \Rightarrow \\ \|x_n - x\|_V \rightarrow 0 & \|y_n - y\|_V \rightarrow 0 & \text{Vettori} \end{array}$$

- $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$
- $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$

• Ortogonalità: Si dice che $x, y \in V$ sono ortogonali tra loro, e si scrive $x \perp y$, se $(x, y) = 0$

• Teo. Pitagora (1° Versione): Sia V pre-Hilbert e siano $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vettori a 2 a 2 ortog.

Allora:
$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

• Spazio di Hilbert: Sp. Hilbert = Sp. pre-Hilbertiano **COMPLETO**

→ Sp. di Banach la cui norma proviene da un prod. scal.

• $C^0[a, b]$: Sp. pre-Hilbert. **NON** COMPLETO

• $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$: $\rightarrow \mathcal{L}^2 = \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \} \rightarrow$ sp. Hilbert
 $\{a_n\} \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$

• $L^p(\Omega)$: $\forall p \neq 2$ è di Banach, ma **NON** di Hilbert

• Serie sp. Hilbert: Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è **CONVERGENTE** in H a un certo $x \in H$ se, detto $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ si abbia che $S_n \rightarrow x$, $n \rightarrow +\infty$

$$\|S_n - x\|_H \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^n x_k - x \right\|_H \rightarrow 0$$

• Teo. Pitagora (2° versione): Se $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ è una succ. di elementi di uno sp. di Hilbert H a 2 a 2 ortogonali e t.c. la serie numerica $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ converge, allora la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge in H e vale la:

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$$

vettore

• Sistema ortonormale: Un insieme finito $\{e_j\}_{j=1}^n$ o numerabile $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ di elementi di H si dice **SISTEMA ORTONORMALE** se:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

• x Pitagora 1° Vers. $\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$

• x Pitagora 2° Vers. $\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j - x \right\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \rightarrow \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2$