Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Quarto appello. Gennaio 2021

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di *condizione di Cauchy* in uno spazio vettoriale normato (dare anche la definizione di *norma*) e la definizione di spazio vettoriale normato *completo*, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a,b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a,b])$ con la norma C^0 non è completo.

B. (6 punti). Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso, e un esempio di funzionale lineare non continuo. Infine, si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguarda la $\mathcal{L}$-trasformata della derivata prima e enunciare (senza dimostrazione) quella sulla derivata n-esima di una funzione. Mostrare come da queste formule si deduce il risultato sulla velocità di convergenza a zero all'infinito della trasformata di Laplace, dandone un enunciato preciso. Commentare alla luce di questo criterio le formule per la trasformata di $\sin t, \cos t, t^n$.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Fare esempi di classi di distribuzioni temperate, **dimostrando** qualcuna delle affermazioni fatte. Infine, dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Considerando nota la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$$

e sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier:

a. Calcolare

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) \text{ per } a > 0 \text{ qualsiasi;}$$

quindi calcolare

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)$$

(in entrambi i casi, si chiede di riportare i passaggi, non limitarsi a scrivere il risultato), riscrivendo il risultato nella forma il più possibile semplificata.

b. Calcolare $e^{-3x^2} * e^{-5x^2}$, sfruttando il risultato del punto precedente. (Suggerimento: non occorre calcolare l'integrale di convoluzione; ricondursi alle trasformate appena calcolate). Si richiede di arrivare a un'espressione analitica esplicita del risultato, che non contenga integrali o trasformate.

2. (6 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 1, C = 0.04, R = 6, q_0 = 0$ e condizione iniziale $i(0) = 2$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-3t}\chi_{(0,\pi)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3ix - 2}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Quarto appello. Gennaio 2021
A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di *condizione di Cauchy* in uno spazio vettoriale normato (dare anche la definizione di *norma*) e la definizione di spazio vettoriale normato *completo*, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a,b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a,b])$ con la norma C^0 non è completo.

Risposta: v. libro di testo, §1.1.3, 1.2.1, 1.2.2.

B. (6 punti). Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso, e un esempio di funzionale lineare non continuo. Infine, si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

Risposta: v. libro di testo, §3.2.

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguarda la $\mathcal{L}$-trasformata della derivata prima e enunciare (senza dimostrazione) quella sulla derivata n-esima di una funzione. Mostrare come da queste formule si deduce il risultato sulla velocità di convergenza a zero all'infinito della trasformata di Laplace, dandone un enunciato preciso. Commentare alla luce di questo criterio le formule per la trasformata di $\sin t, \cos t, t^n$.

Risposta: v. libro di testo, §8.1, 8.2.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Fare esempi di classi di distribuzioni temperate, **dimostrando** qualcuna delle affermazioni fatte. Infine, dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (4 punti). Considerando nota la trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$$

e sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier:

a. Calcolare

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) \text{ per } a > 0 \text{ qualsiasi;}$$

quindi calcolare

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)$$

(in entrambi i casi, si chiede di riportare i passaggi, non limitarsi a scrivere il risultato), riscrivendo il risultato nella forma il più possibile semplificata.

b. Calcolare $e^{-3x^2} * e^{-5x^2}$, sfruttando il risultato del punto precedente. (Suggerimento: non occorre calcolare l'integrale di convoluzione; ricondursi alle trasformate appena calcolate). Si richiede di arrivare a un'espressione analitica esplicita del risultato, che non contenga integrali o trasformate.

a. Sia $g(x) = e^{-x^2}, \mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2\xi^2}$ allora

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(g^{\sqrt{a}}(x)\right)(\xi) = \widehat{g}_{\sqrt{a}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}.$$

Perciò

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(e^{-3x^2}\right)(\xi) \cdot \mathcal{F}\left(e^{-5x^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{5}}e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{5}}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{15}}e^{-\pi^2\xi^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}e^{-\pi^2\frac{8}{15}\xi^2}.$$

b.

$$\mathcal{F}\left(e^{-3x^2} * e^{-5x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{\sqrt{15}}e^{-\pi^2\frac{8}{15}\xi^2} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{\frac{15/8}{\pi}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{15/8}}e^{-\pi^2\xi^2/\frac{15}{8}}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{8}}\mathcal{F}\left(e^{-\frac{15}{8}x^2}\right) = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-\frac{15}{8}x^2}\right)$$

perciò

$$e^{-3x^2} * e^{-5x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{-\frac{15}{8}x^2}.$$

2. (6 punti). Si consideri l'equazione integrodifferenziale di un circuito LCR in serie:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

con $L = 1, C = 0.04, R = 6, q_0 = 0$ e condizione iniziale $i(0) = 2$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, scrivere esplicitamente la formula risolutiva che assegna la corrente $i(t)$ nel circuito, per una generica tensione $v(t)$ Laplace trasformabile.

b. Si consideri ora il caso

$$v(t) = e^{-3t}\chi_{(0,\pi)}(t).$$

Prevedere, prima di risolvere l'equazione, in base alla regolarità del dato $v(t)$ e alla struttura dell'equazione, la regolarità che si attende per $i(t)$. Quindi ottenere la soluzione esplicita $i(t)$ corrispondente a questo dato.

L'equazione è

$$i'(t) + 6i(t) + 25\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t)$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri e ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i)(s), V(s) = \mathcal{L}(v)(s)$ si ha:

$$\begin{aligned} sI(s) - i(0) + 6I(s) + \frac{25}{s}I(s) &= V(s) \\ \left(\frac{s^2+6s+25}{s}\right)I(s) &= V(s) + 2 \\ I(s) &= V(s)\frac{s}{s^2+6s+25} + \frac{2s}{s^2+6s+25} \\ &\equiv V(s)H(s) + G(s) \end{aligned}$$

con

$$H(s) = \frac{s}{s^2+6s+25}; G(s) = 2H(s),$$

funzioni che dobbiamo ora antitrasformare.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s}{(s+3)^2+16} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} - \frac{3}{4}\frac{4}{(s+3)^2+4^2} \\ &= \mathcal{L}\left(e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t\right). \end{aligned}$$

$$G(s) = 2H(s) = \mathcal{L}\left(2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t\right)$$

$$I(s) = \mathcal{L}\left(v(t) * \left(e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t\right) + 2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t\right)$$

perciò la soluzione è:

$$\begin{aligned} i(t) &= v(t) * \left(e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin 4t\right) + 2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t \\ &= 2e^{-3t}\cos 4t - \frac{3}{2}e^{-3t}\sin 4t + \int_0^t \left(e^{-3(t-\tau)}\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4}e^{-3(t-\tau)}\sin 4(t-\tau)\right)v(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

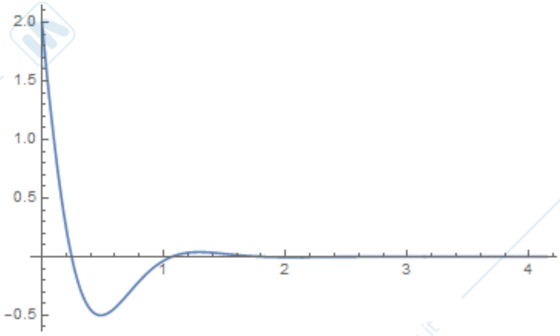
b. Poiché il termine noto è discontinuo in $t = \pi$, la soluzione continua, derivabile a tratti, ma non esisterà $i'(\pi)$. Calcoliamo la convoluzione

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(e^{-3(t-\tau)} \cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} e^{-3(t-\tau)} \sin 4(t-\tau) \right) v(\tau)\, d\tau \\
&= e^{-3t} \int_0^t \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) \chi_{(0,\pi)}(\tau)\, d\tau \\
&= \begin{cases} \text{se } t < \pi & e^{-3t} \int_0^t \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau \\ \text{se } t > \pi & e^{-3t} \int_0^\pi \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau \\
&= \int_0^t \left(\cos 4\tau - \frac{3}{4} \sin 4\tau \right) d\tau \\
&= \left[\frac{1}{4} \sin 4\tau + \frac{3}{16} \cos 4\tau \right]_0^t \\
&= \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{16} (\cos 4t - 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \left(\cos 4(t-\tau) - \frac{3}{4} \sin 4(t-\tau) \right) d\tau \\
&= \left[-\frac{1}{4} \sin 4(t-\tau) - \frac{3}{16} \cos 4(t-\tau) \right]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{4} \sin(4t - 4\pi) - \frac{3}{16} \cos(4t - 4\pi) \\
&+ \frac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{16} \cos 4t \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \begin{cases} \text{se } t < \pi & 2e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{2} e^{-3t} \sin 4t + e^{-3t} \left(\frac{1}{4} \sin 4t + \frac{3}{16} \cos 4t - \frac{3}{16} \right) \\ \text{se } t > \pi & 2e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{2} e^{-3t} \sin 4t \end{cases} \\
&= \begin{cases} \text{se } t < \pi & e^{-3t} \left\{ \frac{35}{16} \cos 4t - \frac{5}{4} \sin 4t - \frac{3}{16} \right\} \\ \text{se } t > \pi & e^{-3t} \left\{ 2 \cos 4t - \frac{3}{2} \sin 4t \right\} \end{cases}
\end{aligned}$$



3. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3ix - 2}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f, giustificando i passaggi. Riscrivere il risultato ottenuto in forma semplificata e separando parte reale e parte immaginaria.

$$\frac{x^3}{x^2 + 3ix - 2} = x - 3i - \frac{7x + 6i}{x^2 + 3ix - 2}$$

$$\mathcal{F}(T_f) = \mathcal{F}(x) - 3i\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}\left(\frac{7x + 6i}{x^2 + 3ix - 2}\right).$$

Ora:

$$\mathcal{F}(1) = \delta$$

$$\mathcal{F}(x) = -\frac{\delta'}{2\pi i}$$

e rimane da calcolare, col metodo dei residui, la trasformata della funzione

$$g(x) = \frac{7x + 6i}{x^2 + 3ix - 2},$$

che è L^2 ma non L^1, e non ha simmetrie.

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{7x + 6i}{x^2 + 3ix - 2} e^{-2\pi i\xi x} dx$$

$z^2 + 3iz - 2 = 0; z = -i, z = -2i$, poli del primo ordine, entrambi nel semipiano $\operatorname{Im} z < 0$. Per $\xi > 0$ è

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= -2\pi i \left\{ \operatorname{Res}\left(\frac{7z + 6i}{z^2 + 3iz - 2} e^{-2\pi i\xi z}, -i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{7z + 6i}{z^2 + 3iz - 2} e^{-2\pi i\xi z}, -2i\right) \right\} \\
&= -2\pi i \left\{ \left(\frac{7z + 6i}{2z + 3i} e^{-2\pi i\xi z}\right)_{/z=-i} + \left(\frac{7z + 6i}{2z + 3i} e^{-2\pi i\xi z}\right)_{/z=-2i} \right\} \\
&= -2\pi i \left\{ -e^{-2\pi\xi} + 8e^{-4\pi\xi} \right\} = 2\pi i \left\{ e^{-2\pi\xi} - 8e^{-4\pi\xi} \right\}
\end{aligned}$$

mentre per $\xi < 0$ è $\widehat{g}(\xi) = 0$ (non ci sono poli nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$). In particolare, osserviamo che $\widehat{g}(\xi)$ è discontinua (g non è L^1).

In definitiva:

$$\begin{aligned}
\widehat{(T_f)} &= -\frac{\delta'}{2\pi i} - 3i\delta - 2\pi i \left\{ e^{-2\pi\xi} - 8e^{-4\pi\xi} \right\} \chi_{(0,+\infty)}(\xi) \\
&= i \left\{ \frac{\delta'}{2\pi} - 3\delta + 2\pi \left\{ -e^{-2\pi\xi} + 8e^{-4\pi\xi} \right\} \chi_{(0,+\infty)}(\xi) \right\}.
\end{aligned}$$

La trasformata è immaginaria pura.