SCHEMI ANALISI FUNZ.

- **Funzioni semplici**: Si dice funz. semplice, su uno spazio di mis. $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, una funz. misurabile che sia comb. lin. di un numero finito di funz. del tipo $\chi_E(x)$ con $E \in \mathcal{M}$.

  $\hookrightarrow s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}(x)$

  funz. semplice

- **Teo. approx. f con s**: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura e sia $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile. $f \geq 0$

  Allora $\exists$ una succ. $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ di funz. semplici $s_k: \Omega \to [0, +\infty)$ t.c. $s_n(x) \nearrow f(x)$ per $n \to +\infty$

  $s_n(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ e $n \to +\infty$
  $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ $\forall x \in \Omega$ $\forall n$

  Inoltre se f è limitata $s_n \to f$ unif. in Ω

- **Def. integrale di $f \geq 0$**: Se $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile si pone:

  $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega s_n(x)\, d\mu(x)$ $\longrightarrow$ il limite $\exists$ sempre finito o infinito

  in gen. $\hookrightarrow \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \sup \left\{ \int_\Omega s(x)\, d\mu(x) \mid s: \Omega \to [0, +\infty) \text{ semplice e } s(x) \leq f(x) \ \forall x \in \Omega \right\}$

- **Funzione Lebesgue integrabile**: Si dice che $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è Lebesgue integr. (o ass. integr. o sommabile) se:

  $\hookrightarrow f$ L-integr. si scrive $f \in L^1(\Omega) = L^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$

  - f è misurabile
  - $\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) < +\infty$ $\xrightarrow{\text{si pone}}$ $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega f^+(x)\, d\mu(x) - \int_\Omega f^-(x)\, d\mu(x)$

- **Rel. f mis. |f|**: f mis $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $|f|$ mis

- **Funzione complessa Lebesgue integrabile**: Se $f \to \mathbb{C}$ diremo che è integr. se:
  - $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ sono mis.
  - $\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) < +\infty$ $\longrightarrow$ $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega \mathrm{Re} f(x)\, d\mu(x) + i \int_\Omega \mathrm{Im} f(x)\, d\mu(x)$

• **Proprietà dell'integ. di Lebesgue:** Siano $f,g \in L^1(\Omega)$ e siano $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $f(x) \leq g(x)$ q.o. in Ω

- linearità: $c_1 f + c_2 g \in L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ è uno sp. vett.
- monotonia:
  - $\int_\Omega f(x) d\mu(x) \leq \int_\Omega g(x) dx$
  - $\left|\int_\Omega f(x) d\mu(x)\right| \leq \int_\Omega |f(x)| d\mu(x)$
  - $\int_E f(x) d\mu(x) \leq \int_F f(x) d\mu(x) \longleftarrow$ se $f(x) \geq 0$ in Ω e mis. $E, F \in \mathcal{M}$ $E \subseteq F$
- annullamento: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ mis. $E \in \mathcal{M}$
  - $\mu(E) = 0 \Longleftrightarrow \int_E f(x) d\mu(x) = 0$
  - $f = 0$ q.o. in $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f(x) d\mu(x) = 0$
  - $\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) = 0 \Rightarrow f = 0$ q.o. in Ω

• $L^1(\Omega)$: • È uno spazio vett.
• NON è uno spazio vett. normato — non soddisfa annullamento

• **Relazione d'equivalenza:** Siano $f,g \in L^1(\Omega) \Rightarrow f$ è equiv. a g $(f \sim g)$ se $f(x) = g(x)$ per q.o. $x \in \Omega$

↳ Proprietà:
- riflessiva: $f \sim f \quad \forall f \in L^1(\Omega)$
- simmetrica: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$
- transitiva: $f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$

• $\mathcal{L}^1(\Omega)$ Sia $\{f\} = \{g \in L^1(\Omega) : g \sim f\} \to$ classe di equiv. con rappr. f

$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{\{f\} : f \in L^1(\Omega)\} \longrightarrow$
- È uno sp. vett.
- È uno sp. vett. NORMATO

$\xrightarrow{\text{norma}} \|\{f\}\|_{\mathcal{L}^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)| d\mu(x)$

rispetta prop. annullamento
$\|\{f\}\|_{\mathcal{L}^1} = 0 = \int_\Omega |f(x)| d\mu(x) \Rightarrow f = 0$ q.o. $\Downarrow$ $\{f\} = 0$ ✓

• **Teo. numerabile additività:** Sia $f: \Omega \to [0, +\infty]$ mis. Sia $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ $E_n \in \mathcal{M}$ (con $\mu(E_i \cap E_j) = 0 \quad \forall i \neq j$) $\Rightarrow \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} f(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f(x) d\mu(x)$

• **Misura peso:** Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di misura, $f: \Omega \to [0, +\infty]$ mis. $\forall E \in \mathcal{M}$ sia
$\mu_f(E) = \int_E f(x) d\mu(x) \longleftarrow \mu_f$ = misura densità $\longrightarrow d\mu_f(x) = f(x) d\mu(x)$

$\Rightarrow \forall g: \Omega \to \mathbb{R} \quad \int_\Omega g(x) d\mu_f(x) = \int_\Omega g(x) f(x) d\mu(x) \to$ (se esiste)

- **Confronto Riemann integr. e Lebesgue integr.:** Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

① f è L-integr. $\iff f$ è misurabile

② f è R-integr. $\iff f$ è continua q.o.

③ f è R-integr. $\implies f$ è L-integr. (i 2 integr. coincidono)

- **Confronto Riemann integr. generalizz. e Lebesgue integr.:**

① Sia $f: [0, +\infty]$. Se l'integrale di Riemann generalizzato $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ converge
$\implies f$ è anche L-integr. in $\mathbb{R}$ (i 2 integr. coincidono)

② Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cambia di segno e l'integr. di Riemann gen. converge,
NON è detto che f sia L-integr.