www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Introduzione agli spazi di funzioni per il Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Marco Bramanti
Politecnico di Milano

9 maggio 2012

Indice

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Introduzione al corso di Metodi matematici per l'ingegneria

Si tratta di un corso di Analisi Matematica che, prendendo le mosse dai soli corsi di matematica di base (Analisi 1 e 2, Algebra Lineare), vuole introdurre ad alcuni temi, idee e metodi dell'analisi matematica moderna e mostrarne alcune applicazioni significative a diversi settori di grande interesse per le applicazioni alla fisica e all'ingegneria: sistemi di equazioni differenziali ordinarie, analisi di Fourier, equazioni alle derivate parziali.

Nel corso di Analisi 1 lo studente incontra i concetti di base del calcolo differenziale e integrale in una variabile, il cui nascere si è accompagnato storicamente al nascere della scienza moderna (Newton) agli inizi del 18° secolo. In Analisi 2 si incontrano le equazioni differenziali ordinarie, strumento fondamentale della modellizzazione matematica dei fenomeni fisici, e si gettano le basi del calcolo differenziale e integrale in più variabili, necessari per la formulazione delle equazioni alle derivate parziali, che modellizzano la fisica dei mezzi continui, intensamente studiata nel 19° secolo. Di queste equazioni però non si arriva a parlare se non di sfuggita nel corso di Analisi 2.

C'è ancora una lunga e interessante storia da raccontare, quindi, riguardo ai rapporti tra l'analisi matematica e la fisica. Da una parte, ancora nel 19° secolo, c'è un fiorire di tecniche e strumenti per la risoluzione esplicita di problemi per equazioni alle derivate parziali, quando questo è possibile: serie, trasformate integrali, funzioni speciali vengono utilizzate per risolvere i problemi differenziali che modellizzano fenomeni di diffusione del calore, vibrazione di corde e membrane, ricerca del potenziale elettrostatico o gravitazionale in presenza di un'assegnata distribuzione di cariche o masse, e così via.

Poi, tra la fine del 19° secolo e i primi decenni del 20°, sulla spinta di problemi sempre più complessi posti dalle applicazioni, problemi per cui non è facile ottenere soluzioni esplicite, ed anche per la tendenza, che intorno al 1900 va attraversando tutto il mondo matematico, a sviluppare teorie e concetti sempre più generali e astratti, si viene affermando il nuovo punto di vista dell'*analisi funzionale*: la soluzione del problema che si va cercando è una funzione che viene vista come un punto di uno spazio astratto, un "punto" la cui esistenza si cerca di dimostrare con ragionamenti sempre più sofisticati. Si assiste così allo sviluppo di teorie astratte (spazi di Hilbert, spazi di Banach...) e a una vera rivoluzione nel modo di concepire le idee fondamentali dell'analisi (con Lebesgue, intorno al 1910, una nuova teoria dell'integrazione, con gli spazi di Sobolev, intorno al 1930, una nuova idea di derivata, con la teoria delle distribuzioni, 1950, un nuovo concetto di funzione...); idee e teorie che si rivelano potenti ed efficaci nel gettare luce anche sui problemi concreti che la scienza pone, in forma sempre più complessa. Queste idee sono fondamentali per capire i metodi matematici oggi comunemente utilizzati nelle applicazioni fisiche e ingegneristiche.

In questo corso si farà una panoramica su alcune delle idee qui sopra accennate, seguendo un percorso che, senza entrare nelle teorie più impegnative (che richiederebbero più tempo a disposizione) e senza nessuna pretesa di sistematic-

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ità, mostri un ventaglio interessante e vario di idee, metodi e problemi, arrivando a qualche applicazione significativa in campi diversi: i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, l'analisi di Fourier, i problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali da un punto di vista classico e moderno. E' un corso rivolto a studenti a cui piace la matematica nel suo intreccio di astratto e concreto.

Il percorso seguito è suggerito dal tentativo di soddisfare due esigenze tra loro antagoniste. Ricordiamo ancora infatti che tra il punto di arrivo dei corsi di matematica di base alle applicazioni odierne dei metodi matematici intercorrono più di 100 anni di storia, e la matematica generalmente non fa sconti nella consequenzialità logica. Si è cercato quindi di arrivare, mediante un percorso appositamente "ritagliato" in modo da evitare investimenti teorici troppo onerosi per un corso di 5 crediti, ad almeno alcune idee e tecniche relativamente recenti, senza però snaturare completamente la consequenzialità logica, e quindi partendo da temi che sviluppano nella direzione dell'analisi funzionale moderna i concetti del calcolo differenziale classico con cui lo studente è già familiare.

Dal punto di vista matematico, questo si è tradotto nel privilegiare sistematicamente nel corso il tema della *completezza* a discapito di quello della *compattezza*, le tecniche di *ortogonalità e spazi di Hilbert* rispetto a quelle di *spazi di Banach*, e non affrontare la teoria degli operatori.

Una panoramica sul corso

La prima parte del corso tratta gli spazi classici di funzioni continue o derivabili; se ne mostra la completezza a partire dalle nozioni di base dell'analisi e dallo studio delle proprietà della convergenza uniforme di successioni di funzioni, e si mostra come queste proprietà, grazie al teorema di punto fisso in spazi metrici, consenta di ottenere risultati classici di esistenza e unicità per problemi differenziali ed equazioni integrali.

Successivamente (Parte 2) si presentano le idee fondamentali della teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue, motivati dalla necessità di ottenere spazi completi di funzioni integrabili. Questa teoria è un vero punto di svolta nella matematica di inizio 1900, ed è un passaggio imprescindibile per avvicinarsi a tutte le idee importanti nelle applicazioni dell'analisi matematica da 100 anni a questa parte. Gli spazi di funzioni a quadrato integrabile rispetto a una misura, in particolare, saranno l'esempio e il modello principale di spazio di Hilbert, il successivo concetto chiave che si introduce nel corso.

La teoria degli spazi di Hilbert (Parte 3) unisce l'idea analitico funzionale di completezza all'idea geometrica di ortogonalità. In questo quadro astratto viene sviluppata sufficiente "geometria infinito dimensionale" da permettere di sviluppare le idee fondamentali dell'analisi di Fourier in spazi di Hilbert; il tema dei funzionali lineari continui e delle forme bilineari, con gli importanti teoremi di esistenza di Riesz e di Lax-Milgram, fornirà invece la strumentazione per le applicazioni dell'ultima parte del corso, ai teoremi di esistenza per problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali. In questa terza parte si vuole mostrare qualche applicazione dell'analisi di Fourier in spazi di Hilbert all'analisi di Fourier "concreta", con i suoi problemi di approssimazione di segnali periodici mono o multidimensionali. In secondo luogo, si illustrano applicazioni a problemi

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

differenziali classici: problemi ai limiti per le equazioni a derivate parziali della fisica matematica, in geometrie semplici, che si risolvono per separazione di variabili sfruttando idee di ortogonalità e completezza in spazi di Hilbert.

La quarta e ultima parte del corso vuole introdurre alla cosiddetta formulazione debole dei problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali di tipo stazionario. Il quadro funzionale è quello degli spazi di Sobolev Hilbertiani. Confluisce qui da una parte la teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue, dall'altra la teoria astratta degli spazi di Hilbert, per ottenere una definizione di soluzione di un problema ai limiti che permetta di dimostrare teoremi di esistenza e unicità anche in geometrie molto generali, in cui la risoluzione esplicita in termini esatti appare preclusa.

1 Spazi vettoriali, spazi metrici

Cominciamo con l'introdurre o richiamare alcune *strutture astratte* che si utilizzano per studiare gli *spazi di funzioni* che sono coinvolti nei problemi analitici che incontreremo.

1.1 Spazi vettoriali

Iniziamo a ricordare la definizione di spazio vettoriale che lo studente ha incontrato nello studio dell'algebra lineare.

Definizione 1.1 (Spazio vettoriale) *Uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C})$ *è un insieme* X *su cui sono definite:*

1. un'operazione $+$ *("somma di vettori"), che associa ad ogni coppia di vettori* (x, y) *un vettore* $x + y$*; l'operazione di somma soddisfa le proprietà (per ogni* $x, y, z \in X$*):*

-commutativa: $x + y = y + x$;

-associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$;

-esistenza dell'elemento neutro 0*, tale che* $x + 0 = 0 + x = x$;

-esistenza dell'opposto $-x$ *di ogni elemento* x*, tale che* $x + (-x) = 0$.

2. Un'operazione $\cdot$ *di prodotto tra un vettore e uno scalare, che associa a una coppia* (λ, x) *con* $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$ *un vettore* $\lambda \cdot x \in X$*; l'operazione*[1] *soddisfa le proprietà (per ogni* $x, y \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$*):*

-distribuitva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di vettori: $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

-distribuitva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di scalari: $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$;

-pseudoassociativa: $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$;

-l'elemento neutro del prodotto tra scalari è elemento neutro del prodotto per uno scalare: $1 \cdot x = x$.

[1] Come nell'algebra usuale, il simbolo $\cdot$ di prodotto tra vettore e scalare è comunemente sottointeso.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Ricordiamo che uno spazio X ha dimensione finita quando esiste un numero finito di elementi $e_1, e_2, ..., e_n \in X$ tali che ogni altro elemento di X è combinazione lineare di questi. Altrimenti si dice che X ha dimensione infinita. Nel corso di algebra lineare e geometria lo studente ha incontrato soprattutto spazi vettoriali di dimensione finita, come sono gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, gli spazi di matrici, gli spazi di polinomi di grado minore o uguale di un n fissato. In analisi ci interessano spazi vettoriali di funzioni, e questi sono solitamente di dimensione infinita.

Definizione 1.2 (Spazio di funzioni) *Sia Ω un insieme qualsiasi e sia*

$$\mathcal{F}_\Omega = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}.$$

(Si potrebbero considerare anche funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, ma per semplicità limitiamoci ora a questo caso). $\mathcal{F}_\Omega$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, con le operazioni naturali di somma di funzioni:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

e prodotto di una funzione per uno scalare:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

La verifica delle proprietà delle operazioni richieste dalla definizione di spazio vettoriale è immediata, seguendo queste dalle analoghe proprietà delle operazioni su numeri reali.

Notiamo che se ad esempio $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_\Omega$ ha dimensione infinita: non esiste un numero finito di funzioni di cui tutte le altre siano combinazioni lineari (ad esempio, le funzioni x^n per $n = 1, 2, 3, ...$ sono un esempio di infinite funzioni di cui nessuna è combinazione lineare di un numero finito delle altre, e naturalmente esistono funzioni di tipo ancora diverso).

Di solito si studiano spazi di funzioni con qualche proprietà aggiuntiva (ad esempio funzioni continue, o integrabili, o derivabili...).

Esempio 1.3 $C^0(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} : f$ *è continua*$\}$ *è uno spazio vettoriale. Il modo più semplice di dimostrarlo non è verificare daccapo le proprietà delle operazioni, ma verificare che questo sottoinsieme di $\mathcal{F}_{(a,b)}$ è un sottospazio vettoriale. Questo consiste nel verificare che la combinazione lineare di due elementi di $C^0(a,b)$ è ancora un elemento di $C^0(a,b)$, il che segue per le proprietà note delle funzioni continue.*

Puntualizziamo quindi il

Teorema 1.4 (Criterio di riconoscimento dei sottospazi) *Dato uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K}$ e un sottoinsieme $X_0 \subset X$, X_0 risulta un sottospazio vettoriale (cioè uno spazio vettoriale rispetto alle medesime operazioni) se*

$$\lambda x + \mu y \in X_0 \text{ per ogni } x, y \in X_0, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esempio 1.5 *Applicando il criterio precedente è immediato verificare che sono spazi vettoriali i seguenti:*

$C^0[a,b]$, *insieme delle funzioni continue su* $[a,b]$
$C^1[a,b]$, *insieme delle funzioni derivabili con derivata continua su* $[a,b]$
$L[a,b]$, *insieme delle funzioni limitate su* $[a,b]$

e analoghi spazi di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ *oppure su un opportuno insieme* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Invece, non è uno spazio vettoriale l'insieme

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}), \text{ insieme delle funzioni periodiche su } \mathbb{R},$$

in quanto la somma di due funzioni periodiche non sempre è periodica, come mostra l'esempio

$$f(x) = \sin x + \sin(\pi x).$$

Quando in analisi si parla di "spazio di funzioni" solitamente si intende indicare uno *spazio vettoriale*, i cui elementi sono funzioni (con qualche proprietà particolare). Nei casi (non così frequenti) in cui ci interessa considerare un insieme di funzioni che non costituisce uno spazio vettoriale, solitamente si utilizzano termini come *insieme delle funzioni...* o *classe delle funzioni...*, rinunciando cioè a usare la parola *spazio*.

Come negli spazi $\mathbb{R}^n$ esiste il modulo (o norma) di un vettore, così in molti spazi vettoriali esiste una norma che consente di misurare la "grandezza" di un vettore e quindi la distanza tra due vettori:

Definizione 1.6 (Spazio vettoriale normato) *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si dice* norma *su X una funzione*

$$\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$$

che ad ogni vettore associa un numero reale non negativo, con le seguenti proprietà (per ogni $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$):
-proprietà di annullamento: $\|x\| = 0 \iff x = 0$
-omogeneità: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
-disuguaglianza triangolare: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
In questo caso $(X, \|\cdot\|)$ *si dice* spazio vettoriale normato.

Esempio 1.7 *1. In* $\mathbb{R}^n$ *la norma usuale è*

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

che verifica le proprietà precedenti. Non è l'unica norma naturale in $\mathbb{R}^n$. Sono norme anche:

$$|x|_0 = \max_{i=1,2,\ldots,n} |x_i| \quad \textit{oppure}$$

$$|x|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Si può dimostrare che queste tre norme sono tutte tra loro equivalenti*, il che significa che per certe costanti $c_1, c_2 > 0$ risulta*

$$c_1 |x|_0 \leq |x| \leq c_2 |x|_0$$

e analoghe disuguaglianze permettono di confrontare $|x|$ con $|x|_1$ e $|x|_0$ con $|x|_1$.

2. In $C^0[a,b]$ possiamo definire:

$$\|f\|_{C^0[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

che risulta finita per ogni $f \in C^0[a,b]$ in base al teorema di Weierstrass. E' immediato verificare che valgono le proprietà di norma. Analoga norma si può definire più in generale in $C^0(K)$ dove K è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$.

3. In $C^0[a,b]$ possiamo definire anche[2]:

$$\|f\|_{L^1[a,b]} = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Anche questa risulta una norma su $C^0[a,b]$, pur essendo sostanzialmente diversa dalla norma $\|f\|_{C^0[a,b]}$. Le norme $\|\cdot\|_{C^0}$ e $\|\cdot\|_{L^1}$ non sono equivalenti. Vediamo quindi che su uno spazio di funzioni, diversamente che in $\mathbb{R}^n$, possono esistere norme sostanzialmente diverse tra loro.

4. Se provassimo a definire la norma $\|f\|_{C^0}$ o $\|f\|_{L^1}$ in $C^0(a,b)$ (che pure è uno spazio vettoriale), queste norme non risulterebbero finite per ogni $f \in C^0(a,b)$, in quanto $C^0(a,b)$ contiene anche funzioni illimitate. Quindi su questo spazio queste non sarebbero norme. Vediamo quindi che non in ogni spazio vettoriale esistono norme "naturali".

1.2 Spazi metrici

Una diversa struttura astratta utile in analisi è quello di spazio metrico, che ora introduciamo.

Definizione 1.8 (Spazio metrico) *Si dice spazio metrico un insieme X dotato di una funzione* distanza

$$d : X \times X \to [0, \infty]$$

[2] L'origine del nome L^1 dato a questa norma si chiarirà in un prossimo capitolo, parlando dell'integrale di Lebesgue. Per ora è solo un simbolo come un altro scelto per denotare questa norma integrale.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

che soddisfa le seguenti proprietà (per ogni $x, y \in X$):
-proprietà di annullamento: $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
-simmetria: $d(x,y) = d(y,x)$
-disuguaglianza triangolare: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Notiamo subito che ogni spazio vettoriale normato è uno spazio metrico: ponendo

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

si ha che d soddisfa le proprietà della distanza. Tuttavia la struttura di spazio metrico non presuppone di per sé quella di spazio vettoriale. Ad esempio è immediata la seguente:

Proposizione 1.9 *Se (X,d) è uno spazio metrico e $X_0 \subset X$ un suo sottoinsieme qualsiasi, anche (X_0, d) è uno spazio metrico.*

In particolare: qualunque sottoinsieme di uno spazio vettoriale normato è uno spazio metrico, pur non essendo più, in generale, uno spazio vettoriale.

Esempio 1.10 *1. Sia X un qualunque sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e $d(x,y) = |x - y|$. Questo è uno spazio metrico (e in generale, non è uno spazio vettoriale).*

2. $X = C^0[a,b]$ con $d(f,g) = \|f - g\|_{C^0}$ è uno spazio metrico, essendo uno spazio vettoriale normato.

3. $X = \left\{f \in C^0[a,b] : \|f\|_{C^0} \leq 1\right\}$ con $d(f,g) = \|f - g\|_{C^0}$ è uno spazio metrico, essendo sottoinsieme di uno spazio vettoriale normato. Non è uno spazio vettoriale (combinazione lineare di funzioni che soddisfano $\|f\|_{C^0} \leq 1$ in generale non soddisfa la stessa limitazione).

4. $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ periodica e limitata}\}$ con $d(f,g) = \|f - g\|_{C^0}$ è uno spazio metrico. Infatti, anche se la differenza tra due funzioni periodiche può non essere periodica, quindi X non è uno spazio vettoriale, è comunque vero che la differenza tra due funzioni periodiche e limitate è limitata, quindi $\|f - g\|_{C^0}$ risulta finita.

Gli spazi metrici che ci interesseranno nel seguito saranno quasi sempre sottoinsiemi di uno spazio vettoriale normato.

In tutti gli spazi metrici, quindi in particolare negli spazi vettoriali normati, si possono introdurre *nozioni topologiche* in modo analogo a quanto si fa in $\mathbb{R}^n$. Data la somiglianza di questi concetti con quelli che dovrebbero essere già noti in $\mathbb{R}^n$ non ci soffermeremo molto nell'esemplificare.

Definizione 1.11 (Intorni sferici) *Sia (X,d) uno spazio metrico. Si dice* sfera aperta *o* intorno sferico *di* centro $x_0 \in X$ *e* raggio $r > 0$ *l'insieme*

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione 1.12 (Punti di un insieme) *Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subset X$. Un punto $x \in X$ si dice:*

interno ad E se esiste un intorno sferico $B_r(x) \subset E$;

esterno ad E se esiste un intorno sferico $B_r(x) \subset E^c$ (il simbolo E^c indice il complementare di E, cioè $E^c = X \setminus E$);

di frontiera per E se non è né interno né esterno. Esplicitamente: x è di frontiera per E se ogni intorno sferico $B_r(x)$ contiene un punto $y \in E$ e un punto $z \notin E$.

Definizione 1.13 (Tipi di insiemi) *Sia (X, d) uno spazio metrico e $E \subset X$. Si dice che:*

E è aperto se ogni punto di E è interno ad E;

E è chiuso se il complementare di E è aperto.

Naturalmente un insieme può non essere né aperto né chiuso.

Teorema 1.14 (Operazioni su aperti e chiusi) *Sia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia qualsiasi (cioè: anche infinita) di aperti. Allora $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ è aperto;*

sia $\{A_i\}_{i=1}^n$ una famiglia finita di aperti. Allora $\bigcap\limits_{i=1}^n A_i$ è aperto;

sia $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia qualsiasi (cioè: anche infinita) di chiusi. Allora $\bigcap\limits_{\alpha \in I} C_\alpha$ è chiuso;

sia $\{C_i\}_{i=1}^n$ una famiglia finita di chiusi. Allora $\bigcup\limits_{i=1}^n A_i$ è chiuso.

Dimostrazione (traccia). Le prime due proprietà si dimostrano direttamente in base alla definizione di aperto e di intorno sferico:

Sia $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, dunque $x \in A_{\overline{\alpha}}$ per un certo $A_{\overline{\alpha}}$ che è aperto, dunque esiste $B_r(x) \subset A_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, dunque x è interno ad $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ e questo è aperto.

Sia $x \in \bigcap\limits_{i=1}^n A_i$, dunque $x \in A_i$ per ogni A_i che è aperto, dunque esiste $B_{r_i}(x) \subset A_i$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$. Posto $r = \min(r_i : i = 1, 2, ..., n)$ si ha che $B_r(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^n A_i$ e questo è aperto.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Le ultime due seguono, in base alla definizione di chiuso come complementare di un aperto, per *dualità*, cioè ricordando che

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha^c$$
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} C_i^c.$$

■

Notiamo che invece in generale l'unione di una famiglia infinita di chiusi può non essere chiuso e l'intersezione di una famiglia infinita di aperti può non essere un aperto.

Esempio 1.15 *In $\mathbb{R}$, gli intervalli (a,b) sono aperti, gli intervalli $[a,b]$ sono chiusi. Si osservi che:*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[0,1-\frac{1}{n}\right] = [0,1) \text{ che non è chiuso, e}$$
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,1+\frac{1}{n}\right) = (0,1] \text{ che non è aperto.}$$

Definizione 1.16 *Sia (X,d) uno spazio metrico e $E \subset X$. Si dice:*
interno di E, e si indica con E°, l'insieme dei punti interni di E;
frontiera di E, e si indica con ∂E, l'insieme dei punti di frontiera di E;
chiusura di un insieme, e si indica con $\overline{E}$, l'insieme $E \cup \partial E$.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà (dimostrare per esercizio):

Teorema 1.17 *Per ogni $E \subset X$:*
$E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$;
E° è aperto e $\overline{E}$ è chiuso;
E è aperto se e solo se $E = E^\circ$;
E è chiuso se e solo se $E = \overline{E}$.

Esempio 1.18 *In $\mathbb{R}^2$ determinare interno, frontiera, chiusura, interno della chiusura, dei seguenti insiemi:*
(a) $E = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.
(b) $E = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.
Soluzioni
(a): $E^\circ = E$; $\overline{E} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$; $\partial E = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$; $(\overline{E})^\circ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. *Notiamo in particolare che* $(\overline{E})^\circ \neq E$.
(b): $E^\circ = \emptyset$; $\overline{E} = \mathbb{R}^2$; $\partial E = E$; $(\overline{E})^\circ = \mathbb{R}^2$. *Anche in questo caso* $(\overline{E})^\circ \neq E$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione 1.19 *Sia* (X, d) *uno spazio metrico e* $E \subset X$. *Si dice che* E *è* limitato *se esiste una sfera (di raggio e centro qualsiasi)* $B_r(x_0) \supset E$.

In particolare in uno spazio vettoriale normato si dice che E *è limitato se esiste* $K > 0$ *tale che* $\|x\| < K$ *per ogni* $x \in E$.

In ogni spazio metrico, e quindi in particolare negli spazi vettoriali normati, si può definire il concetto di limite di successione:

Definizione 1.20 (Limite di successione) *Sia* (X, d) *uno spazio metrico e* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. *Si dice che* $x_n \to x$ *se* $d(x_n, x) \to 0$. *Esplicitamente, questo significa che:*

per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* n_0 *tale che per ogni* $n \geq n_0$ *è* $x_n \in B_\varepsilon(x)$.

Si noti come la convergenza in X è stata ricondotta, via il concetto di distanza, alla convergenza in $\mathbb{R}$. Questo è del resto ciò che si fa anche per definire la convergenza in $\mathbb{R}^n$. Vale naturalmente il teorema di unicità del limite, con "la solita" dimostrazione.

Molto importante è la prossima proprietà, che getta un ponte tra il concetto topologico di insieme chiuso e quello di successione convergente:

Teorema 1.21 (Caratterizzazione successionale dei chiusi) *Sia* (X, d) *uno spazio metrico e* $C \subset X$. *L'insieme* C *è chiuso se e solo se vale la seguente proprietà:*

per ogni successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ *tale che* $x_n \to x$ *per qualche* $x \in X$ *si ha che* $x \in C$.

Detto altrimenti: un insieme è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le proprie successioni convergenti in X. *(Si noti che la successione* $\{x_n\}$ *per ipotesi ha limite in* X*; il punto è che questo limite appartenga in effetti al sottoinsieme* C*).*

Dimostrazione. 1. Proviamo prima che se C è chiuso allora vale la proprietà. Sia dunque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ tale che $x_n \to x \in X$, e proviamo che $x \in C$. Per assurdo, sia $x \in C^c$. Poiché C è chiuso, C^c è aperto, perciò x è interno a C^c; sia dunque $B_r(x) \subset C^c$. Per definizione di limite, esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ è $x_n \in B_r(x) \subset C^c$, assurdo perché questo implicherebbe che infiniti elementi x_n stanno in C^c, mentre per ipotesi sono tutti elementi di C.

2. Proviamo ora che se vale la proprietà allora C è chiuso. Lo mostriamo provando che C^c è aperto. Sia dunque $x \in C^c$ e proviamo che x è interno a C^c, cioè esiste $B_r(x) \subset C^c$. Per assurdo non sia così. Allora per ogni n la sfera $B_{1/n}(x)$ non è contenuta in C^c, ossia esiste $x_n \in B_{1/n}(x) \cap C$. Dunque la successione $\{x_n\}$ è contenuta in C, e d'altro canto converge a x perché $d(x, x_n) < 1/n$. Per la proprietà ammessa per ipotesi, questo implica $x \in C$, assurdo perché per ipotesi $x \in C^c$. ■

La definizione di limite consente di definire, al solito modo, il concetto di funzione continua su uno spazio metrico, a valori reali o in un altro spazio metrico:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione 1.22 *Siano* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *due spazi metrici. Una funzione* $f : X \to Y$ *si dice continua in* $\overline{x} \in X$ *se per ogni successione* $\{x_n\} \subset X$ *tale che* $x_n \to x$ *in* X *si ha* $f(x_n) \to f(\overline{x})$ *in* Y*. Equivalentemente, se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $d_X(x, \overline{x}) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(\overline{x})) < \varepsilon$.

La funzione f *si dice continua in* X *se è continua in ogni punto* $x \in X$.

Si possono formulare i concetti topologici di insieme aperto e chiuso in termini di funzioni continue:

Teorema 1.23 (Insiemi aperti e chiusi definiti mediante funzioni continue) *Sia* (X, d) *metrico e* $f : X \to \mathbb{R}$ *continua. Allora gli insiemi:*

$E_1 = \{x \in X : f(x) > 0\}$
$E_2 = \{x \in X : f(x) < 0\}$
$E_3 = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$
sono aperti; gli insiemi:
$E_4 = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$
$E_5 = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$
$E_6 = \{x \in X : f(x) = 0\}$
sono chiusi.

Dimostrazione. Proviamo che E_1 è aperto mostrando che ogni suo punto è interno. Sia $x_0 \in E_1$, quindi $f(x_0) > 0$. Per continuità di f esiste allora $B_r(x_0)$ in cui $f(x) > 0$ (lo studente è invitato a mostrarlo in dettaglio). Dunque $B_r(x_0) \subset E_1$, ed E_1 è aperto.

In modo analogo si mostra che E_2 è aperto. Allora $E_3 = E_1 \cup E_2$ è aperto perché unione di aperti.

Gli insiemi E_4, E_5, E_6 sono, rispettivamente, il complementare di E_1, E_2, E_3, dunque sono chiusi perché complementare di aperti. ■

Esempio 1.24 *In uno spazio vettoriale normato* $(X, \|\cdot\|)$ *gli insiemi*

$$\{x \in X : \|x\| = 1\}, \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \text{ sono chiusi;}$$
$$\{x \in X : \|x\| > 1\} \text{ è aperto.}$$

Terminiamo con la seguente

Definizione 1.25 *Sia* (X, d) *uno spazio metrico. Un sottoinsieme* $E \subset X$ *si dice* denso *in* X *se* $\overline{E} = X$*. Equivalentemente:* E *è denso in* X *se per ogni* $x \in X$ *esiste una successione* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ *tale che* $x_n \to x$.

Quindi un sottoinsieme denso, pur possedendo meno elementi di X, consente di approssimare bene quanto vogliamo qualsiasi elemento di X. Ad esempio, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

2 Richiami sulla cardinalità di insiemi

Richiamiamo molto brevemente alcuni fatti che ci serviranno in seguito, riguardanti la cardinalità (numerosità) degli insiemi infiniti.

Definizione 2.1 *Due insiemi X, Y si dicono avere uguale cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca tra X e Y.*

Si dice che $\text{card}X < \text{card}Y$ se X ha la stessa cardinalità di un sottoinsieme proprio di Y, e inoltre X non ha la stessa cardinalità di Y.

L'ultima precisazione nella definizione precedente è resa necessaria dalla prossima:

Definizione 2.2 *Un insieme X si dice infinito quando esiste un suo sottoinsieme proprio $X_0 \subsetneq X$ che ha la stessa cardinalità di X.*

In altre parole: ogni insieme infinito ha la stessa cardinalità di *qualche* suo sottoinsieme proprio, ma non necessariamente di *ogni* suo sottoinsieme proprio.

Esempio 2.3 *L'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ è in corrispondenza biunivoca col suo sottoinsieme proprio $\{1, 2, 3, ...\}$, dove la corrispondenza biunivoca è quella che associa ad ogni numero naturale il suo successivo. Perciò $\mathbb{N}$ è infinito.*

Definizione 2.4 *Un insieme E si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Quindi E si può rappresentare come successione: $E = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Si possono dimostrare i seguenti risultati:

Teorema 2.5 *Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sono numerabili.*

Teorema 2.6 *Se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di insiemi tali che ogni E_n è numerabile, anche $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ è numerabile.*

Questo ad esempio significa che una successione a due indici naturali $\{x_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ individua un insieme che si può rappresentare anche come successione a un solo indice $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Teorema 2.7 *L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile, ed ha la stessa cardinalità dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$:*

$$\text{card}\mathbb{R} = \text{card}\mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Inoltre, qualunque intervallo non vuoto in $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Il teorema precedente ci offre il primo esempio di confronto tra cardinalità diverse di insiemi infiniti: $\mathbb{R}$ ha cardinalità maggiore del suo sottoinsieme $\mathbb{N}$ (ed anche del suo sottoinsieme $\mathbb{Q}$); si noti che, invece, $\mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità del suo sottoinsieme $(0, 1)$. Si confronti con quanto osservato dopo la definizione di insieme infinito.

Il teorema afferma anche che $\text{card}\mathbb{N} < \text{card}\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Questo fatto si può generalizzare:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema 2.8 *Per ogni insieme X si ha card$X <$card$\mathcal{P}(X)$.*

Questo implica che la scala delle cardinalità non ha un limite superiore: di ogni insieme esiste sempre un insieme più numeroso.

Tornando agli spazi metrici, possiamo dare ora la seguente

Definizione 2.9 (Spazio separabile) *Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dice che X è separabile se esiste un suo sottoinsieme denso numerabile.*

Per quanto affermato dopo la definizione di insieme denso, questo significa che esiste un sottoinsieme di X, chiamiamolo X_0, che è numerabile (mentre X in generale non è numerabile) tale ogni elemento di X può essere approssimato bene quanto vogliamo con un elemento di X_0. Quindi in uno spazio separabile esistono "relativamente pochi" elementi (un sottoinsieme numerabile) che permettono di approssimare tutti gli altri. Ad esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ sono insiemi separabili, perché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$. Vedremo nel seguito esempi di spazi di funzioni separabili.

3 Convergenza e completezza

I teoremi di esistenza dell'analisi, per esempio per problemi relativi ad equazioni differenziali o per problemi di minimo, vengono spesso provati costruendo opportune successioni di elementi che dovrebbero approssimare la soluzione desiderata, e poi sfruttando teoremi che garantiscano la convergenza della successione (o di una sua sottosuccessione). Questi teoremi di convergenza ruotano attorno a due concetti chiave dell'analisi: *completezza* e *compattezza*. In questo corso approfondiremo ed utilizzeremo solo la prima di queste due nozioni, che è la più semplice e già consente molte applicazioni interessanti.

Tutti i teoremi di convergenza di successioni in spazi di funzioni o spazi più astratti, a loro volta, si fondano in ultima analisi su teoremi di convergenza "basici" che valgono in $\mathbb{R}$. E' naturale quindi partire proprio da qui.

3.1 Teoremi di convergenza in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$

Cominciamo col richiamare la proprietà di $\mathbb{R}$ che sta alla radice di tutti i teoremi di esistenza che valgono in $\mathbb{R}^n$ e negli spazi di funzioni reali definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$: la proprietà dell'estremo superiore, detta anche proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.

Definizione 3.1 (Maggiorante, massimo, estremo superiore) *Sia $E \subset \mathbb{R}$. Si dice che E è superiormente limitato se esiste un numero $K \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq K$ per ogni $x \in E$. Tale numero K si dice maggiorante di E. Se ne esiste uno (cioè se E è superiormente limitato) allora ne esistono infiniti (tutti i numeri $> K$ sono a loro volta maggioranti). Se un maggiorante di E appartiene ad E, si dice che è il massimo di E. Analogamente si definiscono i concetti di insieme inferiormente limitato, minorante, elemento minimo.*

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se E è superiormente limitato e l'insieme dei maggioranti ammette elemento minimo, questo si chiama estremo superiore di E, e si indica con $\sup E$*. Analogamente si definisce* $\inf E$ *come il massimo dei minoranti di E (se esiste).*

Osserviamo che un insieme ha massimo se e solo se ha estremo superiore e questo appartiene all'insieme stesso. Se esiste $\sup E$ ma questo non appartiene ad E, l'insieme non ha massimo.

La proprietà dell'estremo superiore afferma quanto segue:

Proposizione 3.2 *Se $E \subset \mathbb{R}$ è un insieme non vuoto e superiormente limitato, allora esiste* $\sup E \in \mathbb{R}$*. (Analogamente, esiste l'estremo inferiore di un insieme non vuoto e inferiormente limitato).*

A seconda della forma logica in cui si presenta la teoria dei numeri reali, ossia in forma assiomatica oppure in forma costruttiva (a partire dalla teoria dei numeri razionali), la proposizione precedente assume lo status di assioma oppure di teorema.

Ricordiamo che la definizione assiomatica di $\mathbb{R}$ consiste nel dichiarare che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato che soddisfa la proprietà dell'estremo superiore. Che questi fatti siano assunti come assiomi o siano dimostrati a partire da fatti più elementari, in ogni caso ciò che conta per il seguito del discorso è tutto qui.

Una conseguenza abbastanza semplice della proprietà dell'estremo superiore è il seguente:

Teorema 3.3 (di monotonia) *Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di numeri reali, monotona crescente e superiormente limitata. Allaora essa ammette limite finito, e il limite è l'estremo superiore dell'insieme dei valori* $\{x_n : n = 1, 2, 3...\}$.

Fin qui abbiamo richiamato fatti che dovrebbero essere ben noti dall'Analisi 1. Vediamo ora altro sviluppo del discorso che lo studente potrebbe non conoscere.

Teorema 3.4 (di Bolzano-Weierstrass) *Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione limitata di numeri reali. Allora esiste una sua sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente.*

Quelli appena enunciati sono i due fondamentali teoremi di convergenza in $\mathbb{R}$. Su di essi si basano, ad esempio, i teoremi importanti sulle funzioni continue su un intervallo.

Ricordiamo che una sottosuccessione di $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione estratta da questa, cioè del tipo $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ con $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ In altre parole, la successione degli indici della sottosuccessione è monotona, anche se la sottosuccessione stessa può non esserla. Esempi di sottosuccessioni sono la sottosuccessione dei termini di indice pari, o di indice dispari, o di indice $3n$, e così via.

Dimostrazione del Teorema di Bolzano-Weierstrass. Poiché $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è limitata, sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato contenente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sia

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$c = (a+b)/2$ il punto medio dell'intervallo. Almeno uno dei due sottointervalli $[a,c], [c,b]$ deve contenere termini x_n per un numero infinito di interi n. Chiamiamo $[a_1, b_1]$ questo sottointervallo (o uno dei due, se entrambi vanno bene), e scegliamo un termine $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$. Ora consideriamo il punto medio $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ di $[a_1, b_1]$. Almeno uno dei due sottointervalli $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ deve contenere termini x_n per infiniti interi $n > k_1$. Chiamiamo $[a_2, b_2]$ questo sottointervallo (o uno dei due, se entrambi vanno bene), e scegliamo un termine $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$, con $k_2 > k_1$. Proseguendo iterativamente a questo modo, costruiamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$, ognuno contenuto nel precedente e di lunghezza la metà del precedente, e una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tale che $x_{k_n} \in [a_n, b_n]$. Valgono dunque le seguenti proprietà:

1. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione crescente e contenuta in $[a,b]$;
2. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione decrescente e contenuta in $[a,b]$;
3. $b_n - a_n = (b-a)/2^n \ \forall n$.
4. $a_n < x_{k_n} < b_n \ \forall n$.

Allora: per (1) e il teorema di monotonia, esiste α tale che $a_n \to a$; inoltre per il teorema di permanenza del segno, $\alpha \in [a,b]$. Analogamente per (2) esiste $\beta \in [a,b]$ tale che $b_n \to \beta$. Per (3) $\alpha = \beta$ perché $a_n - b_n \to 0$. Per (4) e il teorema del confronto, anche $x_{k_n} \to \alpha\,(= \beta)$. Abbiamo quindi provato che la sottosuccessione $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge. ■

Il teorema precedente si estende a $\mathbb{R}^n$:

Teorema 3.5 (di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$) *Sia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione limitata in $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una sua sottosuccessione $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ convergente.*

Dimostrazione. Il teorema si può dedurre da quello precedente (in $\mathbb{R}$) col seguente argomento, che illustriamo per semplicità nel caso $n = 2$.

Sia $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ una successione limitata in $\mathbb{R}^2$. Allora $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una successione limitata in $\mathbb{R}$, e per il teorema precedente ammetterà una sottosuccessione convergente a un certo x, chiamiamola $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Consideriamo allora la sottosuccessione $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$, limitata in $\mathbb{R}^2$ e tale che $x_{n_k} \to x$. Per il teorema precedente la successione $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, limitata in $\mathbb{R}$, ha una sottosuccessione convergente a un certo y, chiamiamola $\left\{y_{n_{j_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Allora $y_{n_{j_k}} \to y$ e $x_{n_{j_k}} \to x$, essendo $\left\{x_{n_{j_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ una sottosuccessione di $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ che già convergeva a x. Ne segue che $\left(x_{n_{j_k}}, y_{n_{j_k}}\right) \to (x,y)$, e il teorema è dimostrato. ■

Mostriamo subito un esempio di applicazione del teorema di Bolzano-Weierstrass alla dimostrazione di un teorema che lo studente conosce già:

Teorema 3.6 (di Weierstrass) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato, e sia $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo in K.*

Dimostrazione. Sia $\Lambda = \sup \{f(x) : x \in K\}$, intendendo ora che tale sup può essere finito oppure infinito (nel caso f non fosse limitata in K, eventualità che escluderemo nel corso della dimostrazione). Distinguiamo due casi.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1. $\Lambda < \infty$. Sia allora $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tale che $f(x_n) \geq \Lambda - \frac{1}{n}$ (per definizione di estremo superiore, questi valori $f(x_n)$ esistono certamente). La successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è contenuta in K che è limitato, quindi è limitata. Perciò per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione convergente, $x_{k_n} \to c$. Inoltre poiché K è chiuso, $c \in K$. Poiché f è continua in K, $f(x_n) \to f(c)$. D'altro canto $f(x_n) \geq \Lambda - \frac{1}{n}$ implica $f(c) \geq \Lambda$ per il teorema di permanenza del segno, ed essendo $f(c) \leq \Lambda$ per definizione di estremo superiore, si ha che $f(c) = \Lambda$, perciò c è un punto di massimo di f e Λ il massimo.

2. $\Lambda = \infty$. Sia allora $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ tale che $f(x_n) \geq n$. Di nuovo, la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è limitata, perciò ammette una sottosuccessione convergente, $x_{k_n} \to c \in K$. Poiché f è continua in K, $f(x_n) \to f(c)$. D'altro canto $f(x_n) \geq n$ implica $f(x_n) \to \infty$, assurdo perché $f(c)$ è finito. Quindi il caso 2 non può presentarsi.

Analogamente si mostra che f ammette minimo. ■

Il teorema di Bolzano-Weierstrass è in un certo senso caratteristico di $\mathbb{R}^n$. Negli spazi vettoriali normati di dimensione infinita un analogo teorema non vale, come mostrano i prossimi esempi.

Esempio 3.7 *Sia X lo spazio vettoriale normato delle successioni reali limitate:*

$$X = \ell^{\infty} = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \|x\|_{\ell^{\infty}} = \sup_n |x_n| < \infty \right\}.$$

In X consideriamo la successione ξ_n definita da:

$$\xi_n = \Big(0, 0, 0, ..., 0, \underset{n}{1}, 0, 0, ...\Big).$$

Chiaramente si ha $\|\xi_n\|_{\ell^{\infty}} = 1$ per ogni n, dunque questa è una successione limitata in ℓ^{∞}, che però non ha alcuna sottosuccessione convergente. (La dimostrazione di quest'ultima affermazione sarà più facilmente svolta in seguito). Quindi in ℓ^{∞} il teorema di Bolzano-Weierstrass non vale.

Esempio 3.8 *Sia $X = C^0[0,1]$ con la norma del sup, e sia $f_n(x) = \sin(n\pi x)$. E' chiaro che $\|f_n\|_{\infty} = 1$ per ogni n, d'altro canto f_n non ammette alcuna sottosuccessione convergente. (Anche in questo caso, non è così facile a questo punto del corso dimostrare rigorosamente questa affermazione, ma potrà essere fatto più avanti).*

Molta analisi funzionale è stata sviluppata per ottenere negli spazi di dimensione infinita qualche surrogato del teorema di Bolzano-Weierstrass. Questa linea di ricerca porta allo studio del concetto di *compattezza*, che però, come già segnalato, non perseguiremo nel corso. A noi il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$ serve principalmente per provare un risultato di *completezza*, di cui ora ci occuperemo.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

3.2 Completezza in spazi metrici

Torniamo ora nel contesto astratto degli spazi metrici, per dare la seguente definizione fondamentale.

Definizione 3.9 (Successione di Cauchy) *Sia (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Si dice che questa successione è di Cauchy se:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \text{ si ha } d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Detto in modo meno preciso ma più intuitivo: una successione è di Cauchy se *i suoi termini sono sempre più vicini tra loro*, o anche: se $d(x_n, x_m) \to 0$ per $n, m \to \infty$. Per raffronto, si noti che una successione è convergente (a x) se i suoi termini sono *sempre più vicini a x*. E' facile allora capire che:

Proposizione 3.10 *Se una successione converge in (X, d), allora è di Cauchy in (X, d).*

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ipotesi $x_n \to x$ per un certo x, dunque esisterà n_0 tale che $\forall n \geq n_0$ si ha $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Di conseguenza per $\forall n, m \geq n_0$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon,$$

e la successione è di Cauchy. ■

Il fatto che una successione sia di Cauchy è quindi una *condizione necessaria, in ogni spazio metrico, affinché la successione sia convergente*. Il fatto che una successione sia di Cauchy o meno si può verificare senza sapere preliminarmente quale sia il "candidato limite" x, mentre per provare che $\{x_n\}$ è convergente in base alla definizione di limite occorre già avere un'idea su quale sia il limite stesso. Ad ogni modo la condizione necessaria non è in generale sufficiente, come mostra il prossimo

Esempio 3.11 *Sia $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ E' noto che $x_n \to e$ per $n \to \infty$, e che e è un numero irrazionale, mentre tutti i numeri x_n sono razionali. Dunque la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nello spazio metrico $\mathbb{Q}$ non è convergente. Tuttavia la successione in $\mathbb{R}$ è convergente, quindi è di Cauchy; ma allora è di Cauchy anche in $\mathbb{Q}$, perché la distanza usata in $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ è la stessa (quella euclidea). Abbiamo quindi un esempio, nello spazio metrico $\mathbb{Q}$, di successione di Cauchy ma non convergente.*

Il prossimo esempio mostra invece l'utilità della condizione di Cauchy per provare che una successione *non* converge.

Esempio 3.12 *Dimostriamo rigorosamente l'affermazione fatta nell'Esempio 3.7: nello spazio*

$$\ell^{\infty} = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \|x\|_{\ell^{\infty}} = \sup_n |x_n| < \infty \right\}.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

la successione ξ_n definita da:

$$\xi_n = \Big(0, 0, 0, ..., 0, \underset{n}{1}, 0, 0, ...\Big)$$

non ammette alcuna sottosuccessione convergente. Infatti, sia $\{\xi_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ una sua qualsiasi sottosuccessione, e mostriamo che questa non è di Cauchy. Infatti (supponendo per fissare le idee che sia $k_n < k_m$):

$$\xi_{k_n} - \xi_{k_m} = \Big(0, 0, 0, \underset{k_n}{1}, 0, ..., 0, \underset{k_m}{-1}, 0, ...\Big)$$

$$\|\xi_{k_n} - \xi_{k_m}\|_{\ell^\infty} = 1 \quad \textit{per ogni } n, m,$$

quindi la condizione di Cauchy non vale.

Proviamo anche la seguente semplice

Proposizione 3.13 *Se una successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è di Cauchy in (X, d), allora è limitata.*

Dimostrazione. Applichiamo la definizione di successione di Cauchy. Fissato $\varepsilon = 1$ esiste n_0 tale che per ogni $n, m \geq n_0$ è $d(x_n, x_m) < 1$. In particolare quindi

$$d(x_n, x_{n_0}) < 1 \quad \forall n \geq n_0.$$

I termini della successione che *non* soddisfano la relazione precedente sono solo un numero finito: $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$. Detto

$$M = \max(1, d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), ..., d(x_n, x_{n_0}))$$

si ha

$$d(x_n, x_{n_0}) < M \quad \forall n,$$

ossia

$$x_n \in B_M(x_{n_0}),$$

e la successione è limitata. ■

Diamo ora la seguente

Definizione 3.14 (Spazio metrico completo) *Uno spazio metrico (X, d) si dice* completo *se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X.*

Quindi negli spazi metrici completi la condizione di Cauchy risulta *equivalente* alla convergenza. In uno spazio completo se verifichiamo che una successione è di Cauchy (il che, ricordiamolo ancora, non richiede la previa conoscenza del candidato limite) ne segue che *esiste* un elemento $x \in X$ a cui la successione converge. Dunque la completezza dello spazio sarà un'ipotesi importante nei *teoremi di esistenza.*

L'Esempio 3.11 mostra che lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ non è completo. Vale invece il seguente fondamentale

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema 3.15 $\mathbb{R}^n$ *è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Allora la successione è limitata (Proposizione 3.13), quindi per il Teorema di Bolzano-Weierstrass ha una sottosuccessione $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un certo x. Mostriamo che, in qualsiasi spazio metrico, se una successione di Cauchy ha uno sottosuccessione convergente, allora la successione intera converge (allo stesso limite). Poiché la sottosuccessione converge, fissato $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che se $i_j \geq n_0$ allora $d\left(x_{i_j} x\right) < \varepsilon/2$; poiché la successione è di Cauchy, esiste n_1 tale che $k, i_j \geq n_1$ implica $d\left(x_k, x_{i_j}\right) < \varepsilon/2$. Quindi per $k, i_j \geq \max\left(n_0, n_1\right)$ è

$$d\left(x_k, x\right) \leq d\left(x_k, x_{i_j}\right) + d\left(x_{i_j} x\right) < \varepsilon,$$

in particolare per $k > \max\left(n_0, n_1\right)$ è $d\left(x_k, x\right) < \varepsilon$, e la successione converge. ■

Si osservi che nella dimostrazione precedente l'unico passaggio che *non* vale in uno spazio metrico qualsiasi è l'applicazione del teorema di Bolzano-Weierstrass, che vale in $\mathbb{R}^n$.

Tornando agli spazi metrici qualsiasi proviamo ora che:

Teorema 3.16 *Se (X, d) è uno spazio metrico completo e $C \subset X$ è un insieme chiuso. Allora (C, d) è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in C. Allora è di Cauchy anche in X. Poiché X è completo, la successione converge a un elemento $x \in X$. D'altro canto C è chiuso perciò $x \in C$ (Teorema 1.21). Dunque la successione converge in C. Perciò C è completo. ■

Definizione 3.17 (Spazio di Banach) *Uno spazio vettoriale normato, completo rispetto alla distanza della norma, si dice spazio di Banach.*

Ad esempio $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach. La cosa importante per dimostrare teoremi di esistenza per problemi di analisi è trovare *spazi di funzioni* (quindi infinito dimensionali) che siano di Banach. Nel seguito di questo capitolo ci occuperemo di spazi di funzioni continue e derivabili e mostreremo la loro completezza. Questi sono gli spazi di Lagrange, in cui ad esempio si ambienta lo studio classico dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie; in questo contesto dimostreremo il teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy. In seguito ci occuperemo di spazi di funzioni integrabili, gli spazi di Lebesgue, e mostreremo come per ottenere spazi di Banach di questo tipo sia stato necessario sviluppare un nuovo tipo di integrale. Questo ci porterà alla teoria della misura e dell'integrazione nata all'inizio del 1900, su cui si basa ad esempio lo studio moderno delle equazioni alle derivate parziali, dell'analisi armonica, del calcolo delle variazioni.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

4 Successioni di funzioni, spazi di funzioni continue o derivabili

Vogliamo ora studiare gli spazi di funzioni $C^0[a,b], C^k[a,b]$, o i loro analoghi per funzioni di più variabili, e provare che sono spazi di Banach. Per far questo è necessario uno studio preliminare di certi concetti legati alla convergenza di successioni di funzioni, di cui ora ci occuperemo.

4.1 Successioni di funzioni e convergenza uniforme

Definizione 4.1 (Convergenza puntuale) *Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ per $n = 1, 2, 3, ...$ con $I \subset \mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$. Si dice che la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge in $x_0 \in I$ se la successione reale $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ è convergente; si dice che la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente in I se converge in x_0 per ogni $x_0 \in I$. In questo caso risulta definita una nuova funzione $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, detta limite puntuale della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in I.*

La nozione di convergenza puntuale è semplice ma anche molto debole. Ci si rende conto facilmente, infatti, che il limite puntuale di una successione di funzioni talvolta non "eredita" le buone proprietà possedute dalle f_n. I prossimi esempi vogliono illustrare i tipi di fenomeni che si possono presentare.

Esempio 4.2 *Sia $f_n(x) = x^n$ in $[0, \infty)$.*

$$f_n(x) \to \begin{cases} 0 \text{ se } x \in [0,1) \\ 1 \text{ se } x = 1 \\ +\infty \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

La successione converge puntualmente solo nell'intervallo $[0,1]$, in cui risulta definita la funzione limite puntuale

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in [0,1) \\ 1 \text{ se } x = 1. \end{cases}$$

Osserviamo che in questo caso il limite puntuale è una funzione discontinua, sebbene le f_n siano tutte funzioni continue.

Esempio 4.3 *Sia $f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}sgn(x)$ in $[-1,1]$.*

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 \text{ se } x \in (0,1] \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ -1 \text{ se } x \in [-1,0). \end{cases}$$

Anche in questo caso il limite puntuale è una funzione discontinua, sebbene le f_n siano tutte funzioni continue.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esempio 4.4 *Sia* $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definita per* $n = 1, 2, 3, ...$*da:*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ per } x \in [\frac{1}{n}, \infty) \\ nx \text{ per } x \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}.$$

Si ha:

$$f_n(x) \to \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ per } x \in (0, \infty) \\ 0 \text{ per } x = 0. \end{cases}$$

In questo caso il limite puntuale di una successione di funzioni continue e limitate è una funzione discontinua e illimitata. (Si noti che il limite è finito in ogni punto).

Esempio 4.5 *Sappiamo che l'insieme* $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ *è numerabile, perciò possiamo elencare i suoi elementi in una successione*[3] $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Sia ora:*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = x_1, x_2, x_3, ..., x_n \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha:

$$f_n(x) \to \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Si noti che ogni funzione $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *è continua tranne in n punti; in particolare è Riemann integrabile. Invece la funzione limite* $f\, [0, 1] \to \mathbb{R}$ *è discontinua in tutti i punti e non è Riemann integrabile.*

Esempio 4.6 *Sia* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita per* $n = 1, 2, 3, ...$ *da*

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}.$$

Si ha:

$$f_n(x) \to |x|.$$

Notiamo che ogni f_n *è derivabile:* $f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) |x|^{\frac{1}{n}} sgn(x)$, *in particolare esiste* $f_n'(0) = 0$ *e si ha* $f_n \in C^1(\mathbb{R})$, *mentre il limite puntuale* f *non è derivabile in* $x = 0$. *Si ha* $f \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$.

La morale di questi esempi è: in generale la convergenza puntuale di una successione di funzioni non permette di affermare che la funzione limite f abbia le "buone proprietà" delle singole f_n. Per poter provare dei risultati che permettono di trasferire proprietà delle f_n alla f è necessario introdurre e studiare una nozione più forte delle convergenza puntuale: la convergenza uniforme, che ora introduciamo.

[3] Non si tratterà di una successione monotona. Ad esempio, i suoi primi termini potrebbero essere:

$$0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, ...$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione 4.7 (Convergenza uniforme) *Sia $f_n : I \to \mathbb{R}$ per $n = 1, 2, 3, ...$ con $I \subset \mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$. Si dice che la successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente in I alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se*

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

ossia se

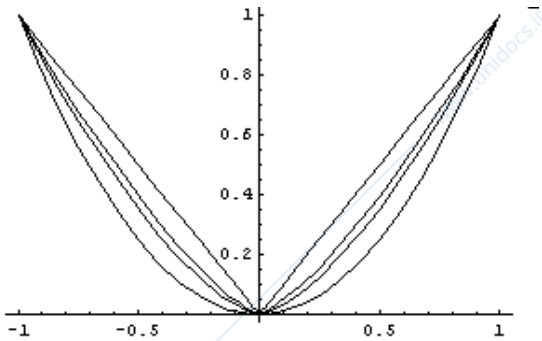
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ tale che } n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in I.$$

A titolo di confronto, notiamo che invece affermare che $f_n \to f$ puntualmente in I significa che

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \text{ tale che } n \geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dal punto di vista logico, la differenza sta tutta nella posizione del quantificatore "$\forall x \in I$"; nel caso della convergenza puntuale, affermare che per ogni x e per ogni ε esiste n_0 tale che..., implicitamente significa che il numero n_0 può dipendere anche da x (oltre che da ε); nel caso della convergenza uniforme invece l'ordine dei quantificatori ci dice che n_0 non dipende da x. Questo si traduce nel fatto che la distanza tra il grafico di f_n e quello di f diventa uniformemente piccolo; precisamente, tutto il grafico di $f_n(x)$ in I è compreso nella striscia $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ non appena $n \geq n_0$.

Esempio 4.8 *La successione $f_n(x) = |x|^{1+1/n}$ converge uniformemente in $[-1, 1]$ a $f(x) = |x|$. (Questa affermazione sarà provata in un esempio successivo). Illustriamo il significato geometrico di questa affermazione. Tracciamo per prima cosa il grafico di f insieme al grafico delle prime f_n:*

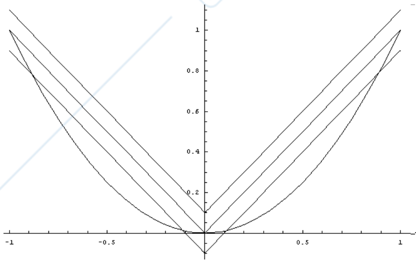


Ora tracciamo il grafico di $f(x)$ insieme a quello di $f(x) + 0.1$ e $f(x) - 0.1$, ottenendo così una striscia in cui devono essere contenuti i grafici interi delle

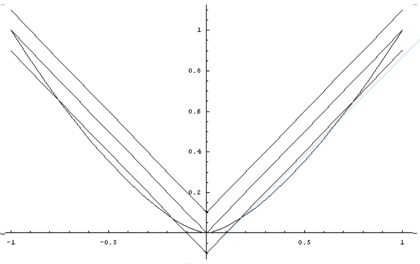
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

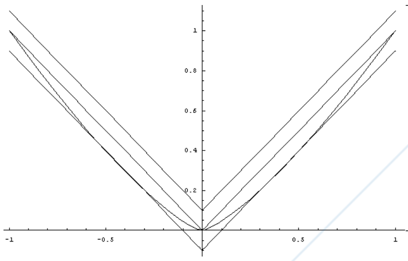
funzioni f_n, almeno per n abbastanza grande:



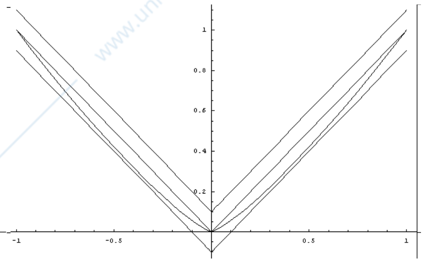
f_1 *non sta nella striscia*



f_2 *non sta nella striscia*



f_3 *sta nella striscia*

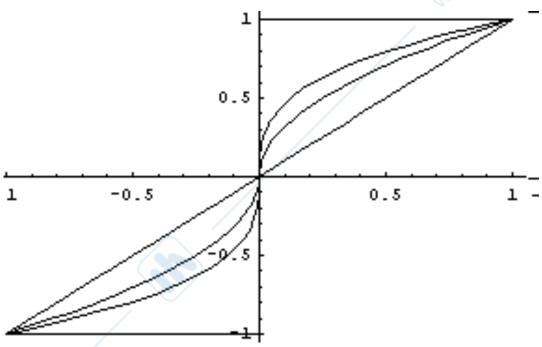


f_4 *sta nella striscia, e così via*

Esempio 4.9 *La successione* $f_n(x) = \sqrt[n]{|x|}sgn(x)$ *converge a*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \in (0,1] \\ 0 \; se \; x = 0 \\ -1 \; se \; x \in [-1,0). \end{cases}$$

(come già visto nell'Esempio 4.3). Mostriamo che la convergenza non è uniforme. Come sopra, tracciamo per prima cosa il grafico di f insieme al grafico delle prime f_n:

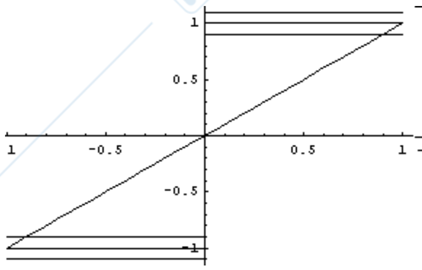


Ora tracciamo il grafico di $f(x)$ insieme a quello di $f(x) + 0.1$ e $f(x) - 0.1$, ottenendo così una striscia in cui devono essere contenuti i grafici interi delle

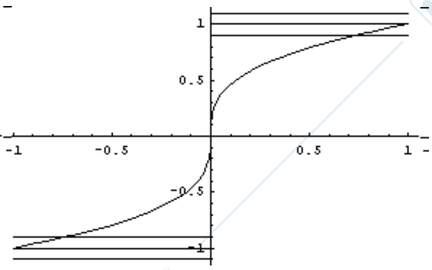
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

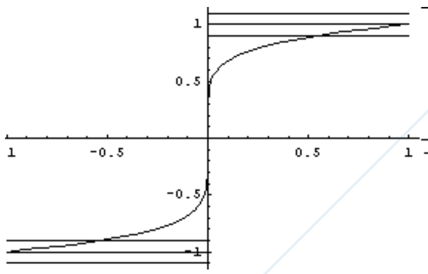
funzioni f_n, almeno per n abbastanza grande:



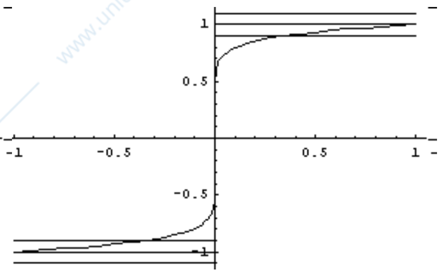
f_1 *non sta nella striscia*



f_3 *non sta nella striscia*



f_6 *non sta nella striscia*



f_{10} *non sta nella striscia*

e si capisce che anche aumentando l'indice n non è possibile che il grafico intero sia contenuto nella striscia. Infatti il grafico di ogni f_n è continuo, perciò non può entrare nei due pezzi di striscia, che sono tra loro discosti.

Si noti anche che:

$$f_n \to f \text{ uniformemente in } I \iff \|f_n - f\|_{C^0(I)} \to 0.$$

In altre parole, la norma $C^0(I)$ è *la norma della convergenza uniforme.* Si osservi tuttavia che la nozione di convergenza uniforme si può applicare anche a funzioni discontinue. In altre parole qui stiamo usando la norma di $C^0(I)$ per calcolare la distanza tra due funzioni qualsiasi definite su I (e naturalmente tale distanza non sempre è finita).

Vediamo ora alcuni risultati che mostrano come per una successione di funzioni uniformemente convergente alcune buone proprietà delle f_n si trasferiscano al limite f.

Teorema 4.10 (Convergenza uniforme e continuità) *Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}^n$, funzioni continue per $n = 1, 2, 3...$, e supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora f è continua in I.*

Dimostrazione. Proviamo che f è continua in un generico punto $\overline{x} \in I$. Scriviamo anzitutto

$$|f(x) - f(\overline{x})| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\overline{x})| + |f_n(\overline{x}) - f(\overline{x})|,$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

con un n che ora sceglieremo. Per $\varepsilon > 0$ fissato, per definizione di convergenza uniforme esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. In particolare allora si ha:

$$|f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\overline{x})| + \varepsilon.$$

Poiché f_{n_0} è continua, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|x - \overline{x}| < \delta \Longrightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(\overline{x})| < \varepsilon$. Allora per $|x - \overline{x}| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(\overline{x})| \leq 3\varepsilon,$$

e f è continua in $\overline{x}$. ■

Teorema 4.11 (Convergenza uniforme e limitatezza) *Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}^n$, funzioni limitate per $n = 1, 2, 3...$, e supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora f è limitata in I.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon = 1$, per l'ipotesi di convergenza uniforme esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ è $|f_n(x) - f(x)| < 1$ per ogni $x \in I$, perciò

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + |f_{n_0}(x)|.$$

D'altro canto per ipotesi f_{n_0} è limitata, perciò esiste $K > 0$ tale che $|f_{n_0}(x)| < K$ per ogni $x \in I$, e

$$|f(x)| < 1 + K \quad \text{per ogni } x \in I,$$

perciò f è limitata. ■

Ci limitiamo a enunciare anche il prossimo:

Teorema 4.12 (Convergenza uniforme e integrabilità) *Siano $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, funzioni limitate e Riemann integrabili per $n = 1, 2, 3...$, e supponiamo che $f_n \to f$ uniformemente in I. Allora f è (limitata e) Riemann integrabile in $[a, b]$.*

E' interessante rileggere alla luce di questi teoremi gli esempi presentati in precedenza: negli esempi 4.2 e 4.3 una successione di funzioni continue converge a una funzione discontinua; nell'esempio 4.4 una successione di funzioni limitate converge a una funzione illimitata; nell'esempio 4.5 una successione di funzioni Riemann integrabili converge a una funzione non integrabile. Evidentemente in tutti questi esempi la convergenza non è uniforme. Si invita il lettore a rendersene conto ragionando sul grafico delle funzioni e sul significato geometrico di convergenza uniforme.

Illustriamo ora un criterio che sarà utile a provare la completezza degli spazi di funzioni continue.

Teorema 4.13 (Condizione di Cauchy per la convergenza uniforme) *Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}^n$, per $n = 1, 2, 3...$ e supponiamo che valga la seguente condizione di Cauchy:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tale che } \forall n, m \geq n_0, \forall x \in I \text{ risulta } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Allora la successione f_n converge uniformemente in I ad una certa funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Viceversa, se f_n converge uniformemente in I ad una certa funzione $f : I \to \mathbb{R}$; allora vale la (4.1).

L'ipotesi del teorema si chiama appunto condizione di Cauchy per la convergenza uniforme, e si può scrivere anche così:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tale che } \forall n, m \geq n_0, \forall x \in I \text{ risulta } \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Assumiamo che valga la (4.1). Allora per ogni $x \in I$ fissato, la successione reale $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ risulta di Cauchy. Quindi, per la completezza di $\mathbb{R}$, $f_n(x)$ converge a un limite, che chiameremo $f(x)$. Risulta così definita una funzione che è limite puntuale delle f_n. Dobbiamo provare che è anche limite uniforme. Fissato $\varepsilon > 0$ applichiamo l'ipotesi (4.1) e nella disuguaglianza $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ passiamo al limite per $m \to \infty$; poiché $f_m(x) \to f(x)$, per il teorema di permanenza del segno si ha:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Quindi fissato $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ risulta $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in I$, perciò $f_n \to f$ uniformemente, che è la tesi.

Viceversa, se la successione converge uniformemente, cioè converge nella norma $\|\cdot\|_\infty$, allora è di Cauchy in norma $\|\cdot\|_\infty$ (stessa dimostrazione vista per provare che in uno spazio metrico una successione convergente è di Cauchy), quindi vale la (4.1). ∎

Possiamo ora provare il primo risultato fondamentale di completezza di uno spazio di funzioni:

Teorema 4.14 *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e limitato. Allora lo spazio vettoriale normato $C^0(K)$ (delle funzioni $f : K \to \mathbb{R}$ continue, con la norma $\|\cdot\|_{C^0(K)}$) è completo, cioè è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Ricordiamo anzitutto che l'ipotesi K chiuso e limitato serve a garantire che le funzioni in $C^0(K)$ siano limitate (per il teorema di Weierstrass) e quindi la loro norma $\|\cdot\|_{C^0(K)}$ sia finita.

Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^0(K)$ una successione di Cauchy in $C^0(K)$, e proviamo che converge in $C^0(K)$. Dire che è di Cauchy nello spazio vettoriale normato $C^0(K)$ significa dire che vale la (4.2), quindi la (4.1); perciò per il Teorema 4.13 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente, cioè in norma $\|\cdot\|_{C^0(K)}$, a una certa f. D'altro canto, essendo limite uniforme di funzioni continue, per il Teorema 4.10 anche $f \in C^0(K)$. Quindi $f_n \to f$ in $C^0(K)$, e $C^0(K)$ è completo. ∎

4.2 Spazi di funzioni derivabili

Vorremmo ora dimostrare che analoghi spazi di funzioni derivabili sono completi. Ragioniamo sullo spazio $C^1[a,b]$, che si può vedere come sottospazio vettoriale di $C^0[a,b]$. Sappiamo che un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo è completo, quindi se mettiamo in $C^1[a,b]$ la norma $\|\cdot\|_{C^0[a,b]}$ possiamo

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

vedere $\left(C^1[a,b], \|\cdot\|_{C^0[a,b]}\right)$ come sottoinsieme dello spazio metrico completo $\left(C^0[a,b], \|\cdot\|_{C^0[a,b]}\right)$. Se questo risulta *chiuso*, allora è completo. Non è così però, come mostra il prossimo

Esempio 4.15 *Sia* $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ *in* $[-1,1]$. *Si ha* $f_n \in C^1[-1,1]$ *per* $n = 1, 2, 3, ...,$ *con*

$$f_n'(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)|x|^{\frac{1}{n}}\, sgn(x) \;\; per\ x \neq 0, \quad f_n'(0) = 0.$$

Risulta: $f_n(x) \to f(x) = |x|$ *per* $x \to \infty$. *Si verifica inoltre che questa convergenza è uniforme, infatti:*

$$\max_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = per\ simmetria$$
$$= \max_{x\in[0,1]} \left(x^{1+\frac{1}{n}} - x\right).$$

Ora cerchiamo il massimo di $g(x) = \left(x^{1+\frac{1}{n}} - x\right)$.

$$g'(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)x^{\frac{1}{n}} - x \geq 0\ per$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq x^{1-1/n}$$
$$x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$
$$\max_{x\in[0,1]} g(x) = g\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - 1\right) \to 0.$$

Pertanto $f_n \to f$ *uniformemente in* $C^0[-1,1]$, *ossia* $f_n \to f$ *in norma* $C^0[-1,1]$. *Tuttavia il limite* f *non appartiene a* $C^1[-1,1]$ ($f(x) = |x|$ *non è derivabile in* 0), *quindi* $C^1[-1,1]$ *non è un sottoinsieme chiuso di* $C^0[-1,1]$. *Inoltre: poiché* $f_n \to f$ *in norma* $C^0[-1,1]$, f_n *è di Cauchy in norma* $C^0[-1,1]$ *e dunque è di Cauchy anche in* $\left(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$, *ma non converge in* $C^1[-1,1]$ *perché* f *non sta in questo spazio. Pertanto lo spazio* $\left(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$ *non è completo.*

Si presti attenzione al significato dell'esempio precedente, che mostra due cose distinte:

1. Lo spazio vettoriale normato $\left(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$ non è completo.
2. Lo spazio $\left(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$, visto come sottoinsieme dello spazio metrico $\left(C^0[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$, non è chiuso.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

La seconda cosa è in un certo senso la giustificazione intuitiva della prima. Una successione di Cauchy in $\left(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$ è anche di Cauchy in $\left(C^0[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$, pertanto in questo secondo spazio converge perché *questo* spazio è completo; il limite sta in $C^0[-1,1]$ ma non necessariamente in $C^1[-1,1]$; in quest'ultimo caso abbiamo una successione di Cauchy in $\left(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]}\right)$ ma non convergente in questo spazio.

All'origine di questo problema sta il fatto che stiamo mettendo in $C^1[-1,1]$ la norma sbagliata: quella $\|\cdot\|_{C^0[-1,1]}$, che dà un controllo sulla f ma non su f'. L'idea è che se vogliamo sperare che uno spazio vettoriale normato di funzioni sia completo, la norma deve controllare le proprietà importanti della funzione che determinano l'appartenenza allo spazio stesso: se stiamo studiando uno spazio di funzioni derivabili, affinché sia completo sarà necessario mettere una norma che controlli anche la derivata; se studiamo uno spazio di funzioni integrabili, affinché sia completo sarà necessario mettere una norma che controlli l'integrale, e così via.

Facciamo anche la seguente ulteriore osservazione. Nell'esempio appena considerato, $f_n \to f$ uniformemente, ma

$$f_n'(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn}(x) \to \operatorname{sgn}(x) \ \text{ (per } x \neq 0\text{)},$$

e questa convergenza *non è certamente uniforme*, dal momento che le f_n' sono continue mentre il loro limite è discontinuo. Questo suggerisce che per conservare la derivabilità del limite della successione occorra richiedere la *convergenza uniforme delle derivate*. E' quanto afferma il prossimo teorema:

Teorema 4.16 (Convergenza uniforme e derivabilità) *Sia* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n \in C^1[a,b]$ *e supponiamo che:*

1. La successione f_n' *converge uniformemente in* $[a,b]$ *a una certa funzione* g.

2. La successione f_n *converge in almeno un punto* $x_0 \in [a,b]$.

Allora:

La successione f_n *converge uniformemente in* $[a,b]$ *a una certa* $f \in C^1[a,b]$, *e* $f' = g$.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[a,b]$ mostrando che è soddisfatta la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme (4.1). Per far questo applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f_n - f_m$ sull'intervallo $[x_0, x]$ (dove x_0 è il punto che compare nell'ipotesi 2, e x è qualsiasi punto in $[a,b]$). Esiste dunque un punto $t_{n,m,x}$ (cioè dipendente da n, m, x) in $[x_0, x]$ tale che

$$f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)\left[f_n'(t_{n,m,x}) - f_m'(t_{n,m,x})\right].$$

Fissato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme delle f_n' (e quindi la condizione di Cauchy soddisatta dalle f_n') esiste n_0 tale che per ogni $n, m \geq n_0$ si ha

$$\left|f_n'(t_{n,m,x}) - f_m'(t_{n,m,x})\right| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in [a,b].$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Per l'ipotesi 2 (e quindi la condizione di Cauchy soddisfatta dalla successione numerica $\{f_n(x_0)\}$), inoltre, esiste n_1 tale che per ogni $n, m \geq n_1$ è

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Quindi per ogni $n, m \geq N = \max(n_0, n_1)$ si ha

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon + |x - x_0| \varepsilon \leq \varepsilon (1 + |b - a|) \text{ per ogni } x \in [a, b].$$

Questo dimostra la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme delle f_n, perciò la successione f_n converge uniformemente a una certa f, con $f \in C^0[a, b]$ (perché limite uniforme di funzioni continue).

Mostriamo ora che f è derivabile con derivata g. Fissato $x \in [a, b]$ qualunque e h opportunamente piccolo, consideriamo

$$f(x+h) - f(x) = [f(x+h) - f_n(x+h)] + [f_n(x+h) - f_n(x)] + [f_n(x) - f(x)].$$

Applichiamo il teorema di Lagrange a f_n su $[x, x+h]$; esisterà $t_{n,x,h} \in [x, x+h]$ tale che

$$f_n(x+h) - f_n(x) = h f_n'(t_{n,x,h}).$$

Per ogni x, h fissato, la successione $\{t_{n,x,h}\}_{n=1}^{\infty} \subset [x, x+h]$ è limitata, quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass ammette una sottosuccessione $\{t_{k_n,x,h}\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a un certo $\bar{t} \in [x, x+h]$. Mostriamo che allora

$$f_{k_n}'(t_{k_n,x,h}) \to g(\bar{t}).$$

Infatti

$$f_{k_n}'(t_{k_n,x,h}) - g(\bar{t}) = \left[f_{k_n}'(t_{k_n,x,h}) - g(t_{k_n,x,h})\right] + \left[g(t_{k_n,x,h}) - g(\bar{t})\right].$$

Ora: $\left[f_{k_n}'(t_{k_n,x,h}) - g(t_{k_n,x,h})\right] \to 0$ per la convergenza uniforme di f_n' a g; $\left[g(t_{k_n,x,h}) - g(\bar{t})\right] \to 0$ perché g è continua, in quanto limite uniforme delle f_n' continue. Passando al limite per $n \to \infty$ nella

$$f(x+h) - f(x) = [f(x+h) - f_{k_n}(x+h)] + [h f_n'(t_{n,x,h})] + [f_{k_n}(x) - f(x)]$$

si ha allora

$$f(x+h) - f(x) = h g(\bar{t}) \text{ per un certo } \bar{t} \in [x, x+h].$$

Dunque

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(\bar{t}) \to g(x) \text{ per } h \to 0,$$

perché per $h \to 0$ è $\bar{t} \to x$, e come già ricordato g è continua. Perciò esiste $f' = g$. Già sappiamo che g è continua, perciò f' è continua, ossia $f \in C^1[a, b]$.

■

Possiamo ora dimostrare il seguente risultato fondamentale:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema 4.17 *Lo spazio $C^1[a,b]$, con la norma*

$$\|f\|_{C^1[a,b]} = \|f\|_{C^0[a,b]} + \|f'\|_{C^0[a,b]}$$

è di Banach.

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di Cauchy in $C^1[a,b]$. Per definizione di norma $\|f\|_{C^1[a,b]}$, questo significa che sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ che $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ soddisfano la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme; pertanto esistono $f,g \in C^0[a,b]$ tali che $f_n \to f$ uniformemente e $f_n' \to g$ uniformemente in $[a,b]$. Per il teorema precedente, questo implica che $f \in C^1[a,b]$ e $f' = g$, dunque

$$\|f_n - f\|_{C^0[a,b]} \to 0 \text{ e } \|f_n' - f'\|_{C^0[a,b]} \to 0,$$

ossia $f_n \to f$ in $C^1[a,b]$. ■

Questo risultato si può generalizzare a funzioni di classe C^k anche in più variabili. Definiamo quindi con precisione gli spazi vettoriali normati classici di funzioni derivabili:

Definizione 4.18 (Spazi di Lagrange) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Ricordiamo anzitutto la scrittura a multiindice per le derivate parziali di qualsiasi ordine di una funzione reale di n variabili:*

$$\begin{aligned} &\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \text{ dove } \alpha_i \text{ sono interi } \geq 0 \text{ e poniamo} \\ &|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \text{ allora} \\ \partial^\alpha f(x) &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x). \end{aligned}$$

Per $k = 1, 2, 3, ...$ definiamo:

$$C^k(\overline{\Omega}) = \left\{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : f \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ e } \partial^\alpha f \in C^0(\overline{\Omega}) \ \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k \right\}.$$

Poniamo

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha f\|_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

Osservazione 4.19 (Perché $\overline{\Omega}$?) *Si noti che mentre lo spazio $C^0(K)$ è definito con K sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, perché in base al teorema di Weierstrass questo è sufficiente a garantire la finitezza della norma $\|f\|_{C^0(K)}$, per calcolare le derivate parziali di f abbiamo bisogno di essere in un insieme aperto; partiamo perciò da un insieme aperto e limitato Ω, la cui chiusura $\overline{\Omega}$ è un insieme chiuso e limitato; f si suppone definita e continua in $\overline{\Omega}$; le derivate parziali di f esistono in Ω e si suppone si possano prolungare con continuità fino al bordo di Ω; a questo modo f e le $\partial^\alpha f$ sono continue sul chiuso e limitato $\overline{\Omega}$, quindi $\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ è finita.*

Vale il seguente risultato:

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema 4.20 *Gli spazi $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ sopra definiti sono di Banach.*

Abbiamo dimostrato questo teorema per $k = 1$ e $n = 1$ (Teorema 4.17). La dimostrazione del teorema generale, ad ogni modo, presenta solo qualche complicazione notazionale in più, ma il nocciolo delle idee è già tutto nel teorema base che abbiamo dimostrato, perciò non aggiungeremo altri dettagli sulla dimostrazione.

Segnaliamo anzi che il risultato precedente si estende senza difficoltà agli spazi di funzioni a valori vettoriali

$$C^k\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right) = \left\{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m : f = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ con } f_1, f_2, ..., f_m \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)\right\},$$

munito della norma

$$\|f\|_{C^k\left(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m\right)} = \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

4.3 Spazi di funzioni infinitamente derivabili

Completiamo il discorso sugli spazi C^k con qualche osservazione sugli spazi di funzioni derivabili infinite volte, che pure spesso si usano in analisi.

Definizione 4.21 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, definiamo*

$$C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k\left(\overline{\Omega}\right),$$

cioè lo spazio delle funzioni continue e con derivate di qualsiasi ordine continue su tutto $\overline{\Omega}$.

Questo è uno spazio vettoriale, che non ha però una norma "naturale". E' chiaro infatti che qualunque norma $\|\cdot\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)}$ è ben definita per le funzioni di questo spazio, ma nessuna di esse è sufficiente a "catturare" l'informazione sull'infinita derivabilità. In altre parole, ci aspettiamo (ed in effetti è così) che lo spazio $\left(C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \|\cdot\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)}\right)$ (comunque scelto un intero k) risulti uno spazio vettoriale normato *non completo.*

Definizione 4.22 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto (anche non limitato), definiamo*

$$C_0^\infty(\Omega) = \left\{f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) : \exists K \text{ chiuso e limitato, } K \subset \Omega : f(x) = 0 \ \forall x \notin K\right\}.$$

Le funzioni di questo spazio si dicono di solito "funzioni C^∞ a supporto compatto"; il supporto è l'insieme su cui la funzione è diversa da zero, e si richiede che esista un chiuso e limitato (che in $\mathbb{R}^n$ è sinonimo di "compatto", termine che però non abbiamo mai usato) che fa da supporto ad f; questo supporto può essere diverso da funzione a funzione. Poiché f e le sue derivate sono diverse da zero solo su un insieme chiuso e limitato, su cui sono continue, sono automaticamente limitate anche se Ω fosse illimitato, perciò anche per le

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

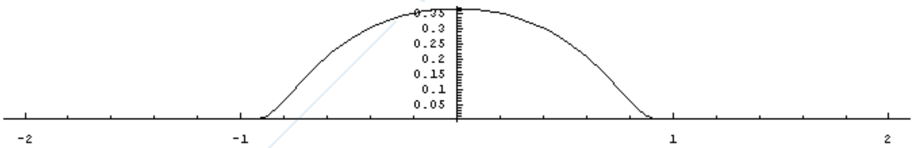
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

funzioni in $C_0^\infty(\Omega)$ tutte le norme $\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ risultano finite. Come per lo spazio $C^\infty(\overline{\Omega})$, però, lo spazio $\left(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}\right)$ è uno spazio vettoriale normato *non completo.*

Si noti che una funzione $C_0^\infty(\Omega)$ in particolare dev'essere $C^\infty(\overline{\Omega})$, quindi sulla frontiera del supporto, cioè là dove comincia ad annullarsi, deve annullarsi f insieme a tutte le sue derivate. Che esistano funzioni di questo tipo non è ovvio. Vale la pena quindi fare un

Esempio 4.23 *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ così definita:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & per\ x \in (-1,1) \\ 0 & altrove. \end{cases}$$



La funzione $e^{\frac{1}{x^2-1}}$ si annulla con velocità esponenziale per $x \to 1^-$ e per $x \to -1^+$, e lo stesso fanno le sue derivate di ogni ordine. Perciò la funzione si raccorda in modo C^∞ con la costante zero nei punti ± 1, ed f risulta $C^\infty(\mathbb{R})$, con supporto in $[-1,1]$. Perciò $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ o $C_0^\infty(a,b)$ per ogni intervallo $(a,b) \supset [-1,1]$.

4.4 Funzioni Lipschitziane

Introduciamo uno spazio di funzioni che pure useremo talvolta, ed è uno spazio intermedio tra C^0 e C^1.

Definizione 4.24 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Poniamo:*

$$Lip(\overline{\Omega}) = \left\{ f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} : |f|_{Lip(\overline{\Omega})} < \infty \right\},\ con$$
$$|f|_{Lip(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|},$$

e

$$\|f\|_{Lip(\overline{\Omega})} = \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + |f|_{Lip(\overline{\Omega})}.$$

Le funzioni in $Lip(\overline{\Omega})$ (dette "Lipschitziane in Ω") sono automaticamente continue; lo spazio $Lip(\overline{\Omega})$ è uno spazio vettoriale, normato con la norma $\|f\|_{Lip(\overline{\Omega})}$. Si può dimostrare[4] che:

[4] Non lo dimostriamo. Lo studente interessato può provare a fare questa dimostrazione: possiede tutti gli strumenti che servono.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema 4.25 *Lo spazio* $Lip\left(\overline{\Omega}\right)$ *con la norma* $\|f\|_{Lip\left(\overline{\Omega}\right)}$ *è di Banach.*

Rispetto alle funzioni continue, le funzioni lipschitziane in aggiunta hanno rapporto incrementale limitato. Per esempio, in una variabile queste sono funzioni che *non possono* avere punti a tangente verticale: la funzione $|x|$ è Lipschtziana in $[-1,1]$, mentre $\sqrt[3]{x}$ non lo è.

Le funzioni lipschitziane non sono necessariamente derivabili, come mostra già l'esempio $|x|$, tuttavia si può dimostrare (Teorema di Rademacher) che sono derivabili "in quasi ogni punto". A questo stadio del corso però non è ancora possibile spiegare il significato preciso di questa affermazione. Ci ritorneremo in seguito.

Si noti invece che *le funzioni* $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *sono certamente lipschitziane*, come conseguenza del teorema di Lagrange. Infatti per ogni $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$, esiste un punto $t \in [x, y]$ (dove il simbolo $[x, y]$ in questo caso non indica un intervallo sulla retta, ma il segmento di estremi x, y in Ω) tale che

$$f(x) - f(y) = (x - y) \cdot \nabla f(t),$$

da cui

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \, |\nabla f(t)| \leq K \, |x - y|,$$

in quanto $|\nabla f|$ è limitato in $\overline{\Omega}$ perché $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Come anticipato, quindi, $Lip\left(\overline{\Omega}\right)$ è uno spazio di funzioni intermedio tra $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ e $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, di funzioni "più che continue e quasi derivabili".

5 Il teorema delle contrazioni in spazi metrici e le sue applicazioni

5.1 Teorema delle contrazioni

Torniamo ora al contesto astratto degli spazi metrici, per presentare un teorema, abbastanza semplice nella dimostrazione ma profondo per le conseguenze. Lo utilizzeremo in seguito per dimostrare risultati di esistenza e unicità per problemi differenziali.

Teorema 5.1 (Teorema delle contrazioni, di Banach-Caccioppoli) [5] *Sia* (X, d) *uno spazio metrico completo, e sia*

$$f : X \to X$$

una contrazione di X *in se stesso, ossia una funzione tale che, per un certo* $\delta \in (0,1)$ *sia*

$$d(f(x), f(y)) \leq \delta d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Allora f *ammette uno e un solo punto fisso, cioè elemento* $\overline{x} \in X$ *tale che*

$$f(\overline{x}) = \overline{x}.$$

[5] Risultato ottenuto da S. Banach nel 1922 e R. Caccioppoli nel 1939.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

La funzione f si può vedere come una trasformazione geometrica dello spazio X in sè. Si dice *contrazione* perché avvicina i punti: la distanza tra i punti trasformati $f(x)$ e $f(y)$ è sempre strettamente minore della distanza di x da y, poiché $\delta < 1$. (Tranne il caso in cui $x = y$, ovviamente). Il punto $\overline{x}$ si chiama *punto fisso*, o *punto unito*, perché non viene spostato da f. Il teorema garantisce l'esistenza e unicità del punto fisso di f. Si tratta del primo di una serie di teoremi di punto fisso dell'analisi funzionale, che in contesti di varia e crescente astrazione garantiscono sotto varie ipotesi l'esistenza (e solo talvolta anche l'unicità) di punti fissi. Questi risultati servono a provare teoremi di esistenza per problemi, generalmente non lineari, per equazioni differenziali o integrali.

Dimostrazione. Proviamo l'esistenza del punto fisso. Sia $x_0 \in X$ un punto qualsiasi, e consideriamo la successione delle iterate di f a partire da x_0, ossia la successione:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &... \\ x_{n+1} &= f(x_n) \\ &... \end{aligned}$$

Proviamo che la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è di Cauchy. Anzitutto si ha, per definizione di x_n e per l'ipotesi su f:

$$d(x_j, x_{j+1}) = d(f(x_{j-1}), f(x_j)) \leq \delta d(x_{j-1}, x_j)$$

e quindi iterativamente

$$d(x_j, x_{j+1}) \leq \delta^j d(x_0, x_1) \text{ per ogni } j.$$

Allora, per ogni n, m (con $n > m$) si ha, per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{j=m+1}^{n} d(x_j, x_{j-1}) \leq \sum_{j=m+1}^{n} \delta^j d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1)\, \delta^{m+1} \sum_{j=0}^{n-m-1} \delta^j \leq d(x_0, x_1) \frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} \end{aligned}$$

essendo $\delta \in (0,1)$. Ne segue che $d(x_n, x_m) \to 0$ per $n, m \to \infty$. Dunque la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ è di Cauchy, perciò per la completezza di X esiste $\overline{x}$ tale che $x_n \to \overline{x}$. Poiché $f : X \to X$ è continua (perché è una contrazione) sarà $f(x_n) \to f(\overline{x})$. Allora passando al limite nell'identità

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

si ha

$$\overline{x} = f(\overline{x}),$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ed è provata l'esistenza del punto fisso.

Proviamo l'unicità. Se esistono $\overline{x}, \overline{y}$ tali che

$$\overline{x} = f(\overline{x}), \overline{y} = f(\overline{y})$$

allora si ha:

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(f(\overline{x}), f(\overline{y})) \leq \delta d(\overline{x}, \overline{y})$$

da cui $(1-\delta) d(\overline{x}, \overline{y}) \leq 0$, perciò $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ e $\overline{x} = \overline{y}$, il che prova l'unicità. ■

Esempio 5.2 *Sia $X = C^0[0,1]$. Sappiamo che è uno spazio metrico completo con $\|\cdot\|_{C^0[0,1]}$. Sia*

$$f : X \to X$$
$$f(x)(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos[x(s)]\, ds.$$

Detto in parole, la funzione continua $x(t)$ viene trasformata da f nella funzione integrale indicata. La funzione integrale è continua, quindi effettivamente $f : X \to X$. Proviamo che è una contrazione. Poiché

$$|\cos\alpha - \cos\beta| \leq |\alpha - \beta|$$

si ha

$$\begin{aligned} |f(x)(t) - f(y)(t)| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^t \cos[x(s)] - \cos[y(s)]\, ds\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t |\cos[x(s)] - \cos[y(s)]|\, ds \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t |x(s) - y(s)|\, ds \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|x - y\|_{C^0[0,1]}\, ds = \frac{t}{2}\|x - y\|_{C^0[0,1]}, \end{aligned}$$

perciò

$$\|f(x) - f(y)\|_{C^0[0,1]} \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_{C^0[0,1]},$$

e f è una contrazione di X in sé. Per il teorema precedente, esiste dunque una e una sola funzione $\overline{x}(t) \in C^0[0,1]$ per cui risulti

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos[\overline{x}(s)]\, ds \text{ per ogni } t \in [0,1].$$

Si noti che determinare esplicitamente questa $\overline{x}$ non è banale.

Osservazione 5.3 *Non ostante l'ambientazione astratta, questo teorema di esistenza ha un aspetto costruttivo: il punto fisso è ottenuto come limite di una successione che, almeno in teoria, si può sempre pensare di costruire, e in questo caso offre anche un algoritmo di calcolo approssimato della soluzione effettiva. In molti casi in realtà la forma esplicita dell'iterata di f è così complicata da rendere questo procedimento inutilizzabile. Tuttavia vedremo che quest'idea della successione approssimante può essere effettivamente utile.*

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

5.2 Applicazioni al problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali ordinarie

Consideriamo un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine in forma normale, ossia:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \quad ... \\ y_n' = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{5.1}$$

dove le incognite sono le n funzioni $y_i(t)$, reali di variabile reale, e sono assegnate n funzioni $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Osserviamo che si può riscrivere in questa forma anche una singola equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale:

$$y^{(n)} = F\left(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right). \tag{5.2}$$

E' sufficiente infatti porre:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ ... \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = F(t, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

col che l'equazione (5.2) ha assunto la forma di sistema di n equazioni del 1° ordine.

Questa procedura funziona anche con sistemi di equazioni di ordine superiore al primo, scritte in forma normale. Consideriamo, ad esempio, il sistema di equazioni che regge la dinamica di un punto materiale mobile nello spazio $\mathbb{R}^3$ in base alla legge di Newton. Da

$$\underline{F} = m\underline{a},$$

se $(x, y, z)(t)$ indica la posizione del punto materiale all'istante t e la forza $\underline{F}$ dipende dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del punto, si ha (ponendo $\underline{f} = \underline{F}/m$)

$$\begin{cases} x'' = f_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ y'' = f_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ z'' = f_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

sistema di 3 equazioni del 2° ordine in forma normale, che può riscriversi ancora nella forma (5.1) così:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f_1(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = f_2(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) \\ y_5' = y_6 \\ y_6' = f_3(t, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6). \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Tutto ciò per ricordare che i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine costituiscono un quadro concettuale entro cui si può studiare una varietà di problemi differenziali. A sua volta, un sistema (5.1) si può scrivere in forma compatta con notazioni vettoriali:

$$\underline{y}' = \underline{f}\left(t, \underline{y}\right)$$

dove ora $\underline{f}$ è una funzione vettoriale di variabile reale. Come è noto, un sistema differenziale ha in generale infinite soluzioni, mentre possiamo sperare che abbia un'unica soluzione un *problema di Cauchy* associato al sistema, ossia

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}\left(t, \underline{y}\right) \\ \underline{y}\left(t_0\right) = \underline{y}_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Affinché il problema abbia senso, la funzione $\underline{f}$ dev'essere almeno definita e continua in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenente $\left(t_0, \underline{y}_0\right)$. Risolvere il problema di Cauchy (5.3) significa determinare un intorno I di t_0 in $\mathbb{R}$ e una funzione $\underline{y} \in C^1\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ per cui risulti $\underline{y}'(t) = \underline{f}\left(t, \underline{y}(t)\right)$ per ogni $t \in I$, e sia soddisfatta la condizione iniziale. In particolare I dovrà essere abbastanza piccolo da far sì che $\left(t, \underline{y}(t)\right) \in \Omega$ per ogni $t \in I$, motivo per cui ci si aspetta una soluzione "in piccolo", cioè locale, del problema di Cauchy.

Il risultato che vale in proposito è il seguente:

Teorema 5.4 (di esistenza e unicità in piccolo) *Sia $\underline{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$, $\underline{f}$ continua in Ω e localmente lipschitziana in Ω rispetto a $\underline{y}$, uniformemente rispetto a t, il che significa che per ogni $\left(t_0, \underline{y}_0\right) \in \Omega$ esistono un intorno U di $\left(t_0, \underline{y}_0\right)$ contenuto in Ω e una costante K tale che*

$$\left|\underline{f}\left(t, \underline{y}_1\right) - \underline{f}\left(t, \underline{y}_2\right)\right| \leq K \left|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\right| \quad \forall \left(t, \underline{y}_1\right), \left(t, \underline{y}_2\right) \in U.$$

Allora per ogni $\left(t_0, \underline{y}_0\right) \in \Omega$ esiste un intorno $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ed esiste una funzione $\underline{y} \in C^1\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ soluzione del problema (5.3). Inoltre la soluzione è unica nel senso che coincide con qualunque altra eventuale soluzione nell'intervallo in cui sono definite entrambe.

Notiamo che le ipotesi su $\underline{f}$ sono abbondantemente soddisfatte se ad esempio $\underline{f} \in C^1\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in vari passi.

1. Per prima cosa riformuliamo il problema di Cauchy sotto forma di *equazione integrale.* Se $\underline{y} \in C^1\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ risolve il problema (5.3), allora integrando

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ambo i membri in (t_0, t) possiamo scrivere[6]:

$$\underline{y}(t) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \underline{f}\left(s, \underline{y}(s)\right) ds \ \text{ per ogni } t \in [t-\delta, t+\delta]. \tag{5.4}$$

Viceversa, se una funzione $\underline{y} \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ risolve (5.4), la funzione integranda $\underline{f}\left(s, \underline{y}(s)\right)$ risulta continua per composizione di funzioni continue, dunque la funzione integrale risulta derivabile, dunque anche il primo membro $\underline{y}(t)$ risulta derivabile e derivando ambo i membri rispetto a t troviamo $\underline{y}'(t) = \underline{f}\left(t, \underline{y}(t)\right)$ per ogni $t \in [t-\delta, t+\delta]$, ossia la $\underline{y}$ risolve l'equazione. Di più, essendo $\underline{y}'$ uguale alla funzione continua $\underline{f}\left(t, \underline{y}(t)\right)$, in realtà $\underline{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Infine, ancora dalla (5.4) per $t = t_0$ leggiamo che $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$, e anche la condizione iniziale è soddisfatta. Possiamo quindi concludere:

$$\underline{y} \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \text{ risolve (5.4)} \Leftrightarrow \underline{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \text{ risolve (5.3).}$$

Nel seguito proveremo quindi esistenza e unicità della soluzione dell'equazione integrale.

2. Ambientiamo ora l'equazione integrale che vogliamo risolvere in un quadro funzionale più preciso. Fissate le condizioni iniziali $\left(t_0, \underline{y}_0\right) \in \Omega$, scegliamo un intorno Γ di $\left(t_0, \underline{y}_0\right)$ contenuto in Ω, del tipo:

$$\Gamma = \left\{\left(t, \underline{y}\right) : |t - t_0| \leq a, \left|\underline{y} - \underline{y}_0\right| \leq b\right\}$$

e poniamo

$$\begin{aligned} M &= \max_{\Gamma} \left|\underline{f}\left(t, \underline{y}\right)\right|; \\ L &= \text{costante di Lipschitz di } \underline{f} \text{ in } \Gamma. \end{aligned}$$

Definiamo ora

$$X = \left\{\underline{y} \in C^0[t_0 - \delta, t_0 + \delta] : \left\|\underline{y} - \underline{y}_0\right\|_{C^0[t_0-\delta, t_0+\delta]} \leq b\right\}$$

con $\delta \leq a$ da scegliersi in seguito. Si osservi che X è un sottoinsieme chiuso (precisamente: una sfera chiusa) dello spazio $C^0[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, quindi X è uno spazio metrico completo, per il Teorema 3.16.

[6] Stiamo usando l'integrale di una funzione vettoriale di variabile reale, definita ovviamente da:

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(F_1(s), F_2(s), ..., F_n(s)\right) ds \\ &= \left(\int_a^b F_1(s)\, ds, \int_a^b F_2(s)\, ds, ..., \int_a^b F_n(s)\, ds\right). \end{aligned}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

3. Mostriamo che è possibile scegliere δ sufficientemente piccolo in modo che la funzione F definita in X da:

$$F\left(\underline{y}\right) = \underline{y}_0 + \int_{t_0}^{\cdot} \underline{f}\left(s, \underline{y}\left(s\right)\right) ds$$

risulti una contrazione di X in sè. Si osservi che risolvere l'equazione integrale significa trovare $\underline{y}$ per cui sia $\underline{y}= F\left(\underline{y}\right)$, cioè trovare un punto fisso di F.

(a) Sia $\underline{y}\in X$, allora

$$\left|F\left(\underline{y}\right)(t) - \underline{y}_0\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \underline{f}\left(s, \underline{y}\left(s\right)\right) ds\right| \leq M\left|t - t_0\right|,$$

quindi

$$\left\|F\left(\underline{y}\right) - \underline{y}_0\right\|_{C^0[t_0-\delta, t_0+\delta]} \leq M\delta,$$

perciò

$$F\left(\underline{y}\right) \in X \text{ se } M\delta \leq b.$$

Sotto quest'ipotesi è ben definita $F : X \to X$.

(b) Siano $\underline{y_1}, \underline{y_2} \in X$, allora

$$\begin{aligned}\left|F\left(\underline{y}_1\right)(t) - F\left(\underline{y}_2\right)(t)\right| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \underline{f}\left(s, \underline{y}_1\left(s\right)\right) - \underline{f}\left(s, \underline{y}_2\left(s\right)\right) ds\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} \left|\underline{f}\left(s, \underline{y}_1\left(s\right)\right) - \underline{f}\left(s, \underline{y}_2\left(s\right)\right)\right| ds\right|\end{aligned}$$

per l'ipotesi di Lipschitzianità

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} L\left|\underline{y}_1(s) - \underline{y}_2(s)\right| ds\right| \leq L\left\|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\right\|_{C^0[t_0-\delta, t_0+\delta]} \left|t - t_0\right|$$

quindi

$$\left\|F\left(\underline{y}_1\right) - F\left(\underline{y}_2\right)\right\|_{C^0[t_0-\delta, t_0+\delta]} \leq L\delta\left\|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\right\|_{C^0[t_0-\delta, t_0+\delta]},$$

perciò F è una contrazione di X in sé purché

$$L\delta < 1.$$

E' sufficiente scegliere allora

$$\delta = \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right)$$

per garantire che sullo spazio X definito da questo δ la F sia una contrazione. Sotto quest'ipotesi esiste uno e un solo $y \in X$ punto fisso di F, ossia una e una sola soluzione dell'equazione integrale.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

4. Unicità. Due soluzioni del problema di Cauchy, cioè $\underline{y}_1$ definita in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ e $\underline{y}_2$ definita in $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$, sarebbero due punti fissi di F sullo spazio X definito da $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; ma per il teorema delle contrazioni il punto fisso è unico. Quindi sull'intervallo comune di definizione le due soluzioni devono coincidere. ■

Osservazione 5.5 *E' istruttivo riflettere sui vari ingredienti coinvolti nella dimostrazione precedente.*

1. Abbiamo applicato il teorema delle contrazioni allo spazio metrico completo X. Si osservi che X non è uno spazio vettoriale normato, ma una sfera chiusa entro uno spazio vettoriale normato completo, perciò è uno spazio metrico completo. Questo mostra che per applicare il teorema delle contrazioni in questa dimostrazione è necessario conoscere il teorema al livello di astrazione degli spazi metrici; un teorema analogo in spazi vettoriali normati non basterebbe.

2. Abbiamo sfruttato la completezza di $C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$, risultato che è stato ottenuto mediante lo studio delle proprietà della convergenza uniforme delle successioni di funzioni e fondandosi sulla completezza di $\mathbb{R}$.

3. Si è utilizzata la teoria classica dell'integrale di Riemann (in particolare il teorema fondamentale del calcolo integrale all'interno della teoria di Riemann) per provare l'equivalenza tra soluzione del problema di Cauchy e soluzione dell'equazione integrale.

Si tratta quindi di un insieme di ingredienti astratti e concreti, alcuni molto classici (19° sec.) altri più moderni (inizio 20° sec.).

Osservazione 5.6 (Linee integrali di un campo vettoriale) *Una classica interpretazione del teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy, che può valer la pena di puntualizzare, riguarda le linee integrali di un campo vettoriale. Supponiamo, per fissare le idee, di avere un campo di forze $\underline{F}(x,y,z)$ definito e continuo in un certo aperto $A \subset \mathbb{R}^3$. Una linea integrale del campo vettoriale passante per il punto $P_0 \in A$ è un arco di curva regolare $\underline{r}$: $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^3$ tale che*

$$\underline{r}(t_0) = P_0$$

e per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ risulta tangente al campo vettoriale, ossia tale che

$$\underline{r}'(t) = \underline{F}(\underline{r}(t)).$$

Il teorema di esistenza e unicità afferma che per ogni (t_0, P_0) esiste una e una sola curva con queste caratteristiche, definita almeno in piccolo. La condizione di regolarità della curva, cioè $|\underline{r}'(t)| \neq 0$ è verificata se il campo stesso $\underline{F}(x,y,z)$ non si annulla nella regione considerata.

Il teorema di esistenza e unicità locale appena dimostrato è solo il punto di avvio della teoria generale dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Si apre ora la questione di provare risultati di esistenza e unicità in grande, risultati di prolungabilità, di dipendenza continua delle soluzioni dagli ingredienti del problema... Non ci occuperemo tuttavia di questi aspetti, in quanto il nostro obiettivo non è sviluppare lo studio delle equazioni differenziali ordinarie ma

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

piuttosto mostrare il ruolo che giocano in questa teoria gli strumenti di analisi funzionale illustrati finora. Piuttosto, ci interessa mostrare come gli stessi metodi matematici possano essere utili a risolvere problemi diversi. E' quello che ora esemplificheremo.

5.3 Equazioni integrali di Fredholm

5.3.1 Equazione integrale di Fredholm di seconda specie in $C^0[a,b]$

Abbiamo visto che per applicare il teorema delle contrazioni alla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità per un problema di Cauchy è stato utile riformulare il problema sotto forma di equazione integrale. Le *equazioni integrali* compaiono in vari contesti della matematica e delle sue applicazioni, ed il teorema delle contrazioni consente di risolvere altri problemi in questo contesto. Vogliamo qui dare qualche cenno a questo argomento, per illustrare meglio la portata dei metodi matematici fin qui sviluppati. Segnaliamo anche che fu proprio lo studio approfondito delle equazioni integrali compiuto nei primi anni del 1900 da parte di Fredholm, Hilbert e altri matematici, a fornire uno dei maggiori impulsi iniziali allo sviluppo della nascente analisi funzionale.

Definizione 5.7 *Si dice equazione di Fredholm (di seconda specie) un'equazione integrale del tipo*

$$f(x) - \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy = g(x) \tag{5.5}$$

dove l'incognita è la funzione f, mentre il nucleo k e il termine noto g sono assegnati.

Segnaliamo per completezza che si dice equazione di Fredholm (di prima specie) un'equazione integrale del tipo

$$-\int_a^b k(x,y) f(y)\, dy = g(x).$$

Pur essendo "più facile da scrivere" l'equazione di prima specie è molto più difficile da risolvere, e non ne parleremo.

Mettiamoci nel seguente quadro funzionale. Assumiamo

$$k \in C^0\left([a,b]^2\right), g \in C^0[a,b],$$

definiamo l'operatore

$$T : C^0[a,b] \to C^0[a,b]$$
$$Tf(x) = g(x) + \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy.$$

Allora risolvere l'equazione (5.5) è equivalente a trovare un punto fisso di T. Cominciamo a mostrare che effettivamente T porta lo spazio $C^0[a,b]$ in se stesso.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

La funzione g è assunta continua, quindi si tratta di mostrare la continuità della funzione:

$$x \mapsto \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b k(x_1,y) f(y)\, dy - \int_a^b k(x_2,y) f(y)\, dy \right| &= \left| \int_a^b [k(x_1,y) - k(x_2,y)] f(y)\, dy \right| \\ &\le \int_a^b |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \, |f(y)|\, dy \\ &\le \|f\|_{C^0[a,b]} \int_a^b |k(x_1,y) - k(x_2,y)|\, dy.\end{aligned}$$

Si tratta ora di sfruttare il fatto che la funzione $k(x,y)$ essendo continua in $[a,b]^2$ è anche *uniformemente continua*[7], in particolare fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x_1 - x_2| < \delta \Longrightarrow |k(x_1,y) - k(x_2,y)| < \varepsilon \text{ per ogni } y \in [a,b].$$

Allora si ha

$$\left| \int_a^b k(x_1,y) f(y)\, dy - \int_a^b k(x_2,y) f(y)\, dy \right| < \varepsilon (b-a) \|f\|_{C^0[a,b]}$$

purché $|x_1 - x_2| < \delta$, il che dimostra che $Tf \in C^0[a,b]$.

Per provare sotto che ipotesi T è una contrazione consideriamo invece:

$$\begin{aligned}|Tf_1(x) - Tf_2(x)| &= \left| \int_a^b k(x,y) f_1(y)\, dy - \int_a^b k(x,y) f_2(y)\, dy \right| \\ &\le \int_a^b |k(x,y)| \, |f_1(y) - f_2(y)|\, dy \le \|f_1 - f_2\|_{C^0[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\, dy\end{aligned}$$

perciò

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_{C^0[a,b]} \le \|f_1 - f_2\|_{C^0[a,b]} \cdot \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\, dy.$$

Pertanto T è una contrazione se

$$\delta \equiv \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|\, dy < 1. \tag{5.6}$$

Facendo uso del teorema delle contrazioni otteniamo dunque il seguente risultato:

Teorema 5.8 *Sia $k \in C^0\left([a,b]^2\right)$ soddisfacente (5.6). Allora per ogni $g \in C^0[a,b]$ esiste una e una sola $f \in C^0[a,b]$ soddisfacente l'equazione integrale (5.5).*

[7] La nozione di uniforme continuità non è stata discussa in precedenza. Si rimanda per un breve approfondimento a [1, Cap.6, §11.2] e [2, Cap.3, §9.1.].

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

5.3.2 Il metodo della serie di Neumann e l'approssimazione di Born

Formulato così, questo è solo un risultato astratto di esistenza. Tuttavia, come abbiamo già accennato, dalla dimostrazione del teorema delle contrazioni si può estrarre un algoritmo di costruzione della soluzione. Illustriamo questo procedimento, che permette di introdurre su questo esempio specifico alcune idee di portata più generale.

Sia:

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy.$$

Abbiamo già visto che $Kf \in C^0[a,b]$ se $f \in C^0[a,b]$, in altre parole

$$K : C^0[a,b] \to C^0[a,b]$$

è un operatore tra quesi due spazi, che risulta anche lineare[8]. Indicando con

$$\begin{aligned} &I : C^0[a,b] \to C^0[a,b] \\ &I : f \mapsto f \end{aligned}$$

l'operatore identità, l'equazione (5.5) si può riscrivere in forma operatoriale:

$$(I - K) f = g$$

con g assegnato e f incognita. Il problema è dunque invertire l'operatore $(I-K)$, cioè ottenere $f = (I-K)^{-1} g$. Il teorema che abbiamo dimostrato si può leggere dicendo che sotto la condizione (5.6), cioè se $(I-K)$ è *una piccola perturbazione dell'identità*, sappiamo invertire $(I-K)$.

Ricordiamo ora come procede la dimostrazione del teorema di punto fisso. Abbiamo scelto un elemento iniziale qualsiasi, $f_0 \in C^0[a,b]$ e abbiamo costruito le iterate dell'operatore $Tf = g + Kf$. Quindi, sfruttando la linearità dell'operatore K,

$$\begin{aligned} &f_1 = Tf_0 = g + Kf_0 \\ &f_2 = Tf_1 = g + K(g + Kf_0) = g + Kg + K^2 f_0 \\ &f_3 = Tf_2 = g + K\left(g + Kg + K^2 f_0\right) = g + Kg + K^2 g + K^3 f_0 \\ &\quad ... \\ &f_n = g + Kg + K^2 g + ... + K^{n-1} g + K^n f_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} K^k g\right) + K^n f_0. \end{aligned}$$

Sappiamo che il punto fisso di T è

$$\overline{f} = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} K^k g\right) + K^n f_0\right].$$

[8] Ossia $K(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 K f_1 + \lambda_2 K f_2$ per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $f_1, f_2 \in C^0[a,b]$. Di operatori lineari diremo qualcosa di più in seguito.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

D'altro canto sappiamo che

$$\begin{aligned} |Kf_0(x)| &\leq \delta \|f_0\|_{C^0[a,b]}, \text{ quindi} \\ \|Kf_0\|_{C^0[a,b]} &\leq \delta \|f_0\|_{C^0[a,b]} \text{ e iterando} \\ \|K^n f_0\|_{C^0[a,b]} &\leq \delta^n \|f_0\|_{C^0[a,b]} \to 0, \end{aligned}$$

pertanto la soluzione dell'equazione integrale è:

$$\overline{f} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} K^k g = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g.$$

dove questa serie, detta *serie di Neumann*, converge nello spazio di Banach $C^0[a,b]$. Si osservi che il risultato ottenuto si può riscrivere nella forma

$$(I-K)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g,$$

con una forte analogia formale con la serie geometrica! Si ricordi comunque che il simbolo $K^n g$ indica la composizione n volte dell'operatore K, applicata a g, ossia l'iterata n-esima di g mediante K, un oggetto solitamente difficile da calcolare in modo esplicito per n grande, ma che almeno in certi casi si può ragionevomente calcolare o approssimare per i primi valori di n. L'utilizzo di una somma parziale di una serie di Neumann per approssimare la soluzione dell'equazione integrale viene detta *approssimazione di Born*. Esplicitamente, per il nostro operatore K si ha:

$$\begin{aligned} &\left(g + Kg + K^2 g + \ldots\right)(x) = \\ &= g(x) + \int_a^b k(x,y)\, g(y)\, dy + \int_a^b k(x,y) \int_a^b k(y,z)\, g(z)\, dz dy + \ldots \end{aligned}$$

Poiché la convergenza della serie di Neumann alla soluzione cercata, in base al teorema delle contrazioni, avviene nello spazio metrico $C^0[a,b]$, la convergenza della somma parziale alla soluzione che cerchiamo sarà *uniforme in* $[a,b]$, una buona notizia.

5.3.3 Applicazione a un modello di diffusione

Consideriamo il fenomeno della diffusione del calore in una sbarra metallica, rappresentata dall'intervallo $[0,1]$. Se la temperatura è fissata agli estremi, una sorgente di calore $f(x)$ è distribuita lungo la lunghezza della sbarra, e la sbarra è termicamente isolata sulla sua superficie laterale, la temperatura $u(x)$ in stato stazionario soddisferà

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ per } x \in (0,1) \\ u(0) = T_0, u(1) = T_1, \end{cases} \tag{5.7}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

problema che si può risolvere esplicitamente con i metodi visti in Analisi 2. Se l'isolamento laterale non è perfetto, la sbarra scambierà calore con l'ambiente anche per tutta la sua lunghezza. In questo caso, assumendo $T = 0$ la temperatura esterna, la u in condizioni stazionarie soddisferà l'equazione modificata

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)\,u(x) = f(x) \text{ per } x \in (0,1) \\ u(0) = T_0, u(1) = T_1, \end{cases} \tag{5.8}$$

dove $q(x)$ è un coefficiente noto che descrive la conduzione di calore verso l'esterno. Non appena $q(x)$ è una funzione non costante, i metodi elementari studiati in analisi 2 non consentono in generale di integrare l'equazione e i risultati teorici sulle equazioni lineari studiati in analisi 2 garantiscono l'esistenza di soluzioni per l'equazione differenziale e per un problema di Cauchy ad esso relativo, ma non per un *problema ai limiti*, come questo è. L'idea è allora vedere il problema (5.8) come una perturbazione del problema (5.7), che sappiamo risolvere esplicitamente, e utilizzare i metodi visti in precedenza per esprimere la soluzione, esatta o approssimata, di (5.8).

Mostriamo in dettaglio come si può procedere, in vari passi.

1. Anzitutto è utile riscrivere il problema in una forma che abbia condizioni agli estremi nulle. Introducendo la funzione lineare

$$w(x) = (1-x)\,T_0 + xT_1$$

si vede che se u risolve (5.8) allora

$$v(x) = u(x) - w(x)$$

risolve

$$\begin{cases} -v''(x) + q(x)\,v(x) = f(x) + q(x)\,w(x) \equiv g(x) \text{ per } x \in (0,1) \\ v(0) = 0, v(1) = 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

quindi il problema è ricondotto ad un problema analogo, con dove l'equazione è simile ma ha un diverso termine noto, e le condizioni agli estremi sono nulle.

2. Adesso cominciamo col risolvere esplicitamente il problema nel caso $q(x) \equiv 0$. Il problema

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x) \text{ per } x \in (0,1) \\ v(0) = 0, v(1) = 0, \end{cases}$$

si può integrare direttamente, così:

$$v'(x) = -\int_0^x f(t)\,dt + a$$

$$v(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) dt + ax + b.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Imponendo le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned}
0 &= v(0) = b \\
0 &= v(1) = -\int_0^1 \left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \right) dt + a, \text{ perciò} \\
a &= \int_0^1 \left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \right) dt
\end{aligned}$$

e la soluzione del problema è:

$$v(x) = -\int_0^x \left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \right) dt + x \int_0^1 \left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \right) dt.$$

Vogliamo scriverla in forma più leggibile, trasformandola in un'espressione del tipo

$$v(x) = \int_0^1 k(x,t)\, f(t)\, dt$$

cioè con la soluzione espressa da un operatore integrale che agisce sul termine noto. Perciò procediamo così, scambiando l'ordine di integrazione negli integrali iterati:

$$\begin{aligned}
v(x) &= \underbrace{x \int_0^1 \left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \right) dt}_{0<t<1,0<\tau<t \Rightarrow 0<\tau<1,\tau<t<1} - \underbrace{\int_0^x \left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \right) dt}_{0<t<x,0<\tau<t \Rightarrow 0<\tau<x,\tau<t<x} = \\
&= \int_0^1 f(\tau) \left(\int_\tau^1 x dt \right) d\tau - \int_0^x f(\tau) \left(\int_\tau^x dt \right) d\tau \\
&= \int_0^1 f(\tau) [x(1-\tau)]\, d\tau - \int_0^x f(\tau)(x-\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

spezzando l'intervallo di integrazione del primo integrale per semplificarlo col secondo

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x f(\tau) [x(1-\tau) - (x-\tau)]\, d\tau + \int_x^1 f(\tau) [x(1-\tau)]\, d\tau \\
&= \int_0^x f(\tau) [\tau(1-x)]\, d\tau + \int_x^1 f(\tau) [x(1-\tau)]\, d\tau \\
&= \int_0^1 f(\tau)\, k(x,\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

dove

$$k(x,\tau) = \begin{cases} \tau(1-x) & \text{se } 0 \le \tau \le x \\ x(1-\tau) & \text{se } x \le \tau \le 1. \end{cases} \tag{5.10}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

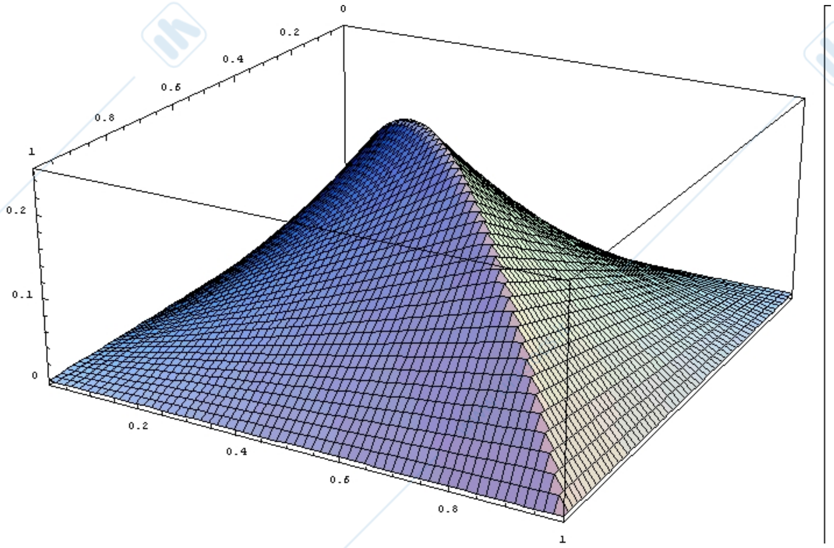


Grafico di $k(x,\tau)$.

Possiamo concludere questa prima discussione affermando che la soluzione del problema con $q(x) \equiv 0$ e termine noto $f(x)$ è assegnata dall'operatore integrale

$$Kf(x) = \int_0^1 f(\tau)\, k(x,\tau)\, d\tau$$

con k come in (5.10).

3. Se ora v è soluzione del problema

$$\begin{cases} -v''(x) + q(x)\,v(x) = g(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ v(0) = 0, v(1) = 0, \end{cases}$$

v sarà anche soluzione di

$$\begin{cases} -v''(x) = g(x) - q(x)\,v(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ v(0) = 0, v(1) = 0, \end{cases}$$

quindi risulterà

$$v = K(g - qv) = Kg - K(qv)$$

dove $\widetilde{g} = Kg$ è una funzione nota, e

$$K(qv)(x) = \int_0^1 f(\tau)\,[k(x,\tau)\,q(\tau)]\, d\tau = \widetilde{K}f(x)$$

dove $\widetilde{K}$ è un nuovo operatore integrale, con nucleo $\widetilde{k}(x,\tau) = k(x,\tau)\,q(\tau)$. Il problema che ci interessa si è dunque trasformato nell'equazione integrale di Fredholm di seconda specie

$$v = \widetilde{g} + \widetilde{K}v,$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

a cui possiamo applicare il Teorema 5.8. Occorre garantire che valga la condizione

$$\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,\tau)\, q(\tau)|\, d\tau < 1.$$

Stimiamo

$$\int_0^1 |k(x,\tau)\, q(\tau)|\, d\tau \leq \|q\|_{C^0[a,b]} \int_0^1 |k(x,\tau)|\, d\tau,$$

quindi calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |k(x,\tau)|\, d\tau &= \int_0^x \tau(1-x)\, d\tau + \int_x^1 x(1-\tau)\, d\tau \\
&= (1-x)\frac{x^2}{2} + x\left[-\frac{(1-\tau)^2}{2}\right]_x^1 = (1-x)\frac{x^2}{2} + x\frac{(1-x)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 - x^3 + x - 2x^2 + x^3\right) = \frac{(1-x)\, x}{2}
\end{aligned}$$

e poiché

$$\max_{x\in[0,1]} \frac{(1-x)\, x}{2} = \frac{1}{8}$$

si ha

$$\delta \equiv \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |k(x,\tau)\, q(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{8}\|q\|_{C^0[a,b]}$$

e questo è < 1 purché risulti

$$\|q\|_{C^0[0,1]} < 8.$$

In base al Teorema 5.8 possiamo allora concludere che:

Teorema 5.9 *Se $q \in C^0[0,1]$ con $\|q\|_{C^0[0,1]} < 8$ allora per ogni $f \in C^0[0,1]$ esiste una e una sola soluzione $v \in C^2[0,1]$ del problema (5.9). (Il lettore è invitato a verificare che anche se la v è inizialmente ottenuta come soluzione $C^0[0,1]$ dell'equazione integrale, l'identità $v = \widetilde{g} + \widetilde{K}v$ implica che il primo membro sia effettivamente una funzione $C^2[0,1]$).*

La soluzione può essere approssimata mediante la somma parziale della serie di Neumann:

$$v \simeq \sum_{k=0}^{n} \widetilde{K}^k(\widetilde{g})$$

dove $\widetilde{K}$ è l'operatore integrale di nucleo $k(x,\tau)\, q(\tau)$ e

$$\widetilde{g}(x) = Kg(x) = \int_0^1 k(x,\tau)\left[f(\tau) + q(\tau)\, w(\tau)\right] d\tau.$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Abbiamo ottenuto la risolubilità unica del problema di partenza sotto l'ipotesi che il coefficiente q non sia troppo grande. Il fatto che una condizione di questo tipo sia necessaria, almeno da un punto di vista matematico, si può evidenziare anche con la seguente osservazione: la funzione

$$v(x) = \sin(\pi x)$$

risolve il problema

$$\begin{cases} -v''(x) - \pi^2 v(x) = 0 \text{ per } x \in (0,1) \\ v(0) = 0, v(1) = 0. \end{cases}$$

Questo significa che se $q(x) \equiv -\pi^2$ (notare che $\pi^2 > 8$, quindi questo coefficiente $q(x)$ non soddisfa la condizione del teorema) il problema iniziale con termine noto nullo ha una soluzione non banale, ossia (per la linearità del problema) viene a cadere l'unicità per il problema con termine noto qualsiasi. (Se v risolve il problema con termine noto f, anche $v(x)+\sin(\pi x)$ risolve lo stesso problema). Approfondendo questo esempio, supponiamo di voler risolvere il problema non omogeneo:

$$\begin{cases} -v''(x) - k^2 v(x) = -1 \text{ per } x \in (0,1) \\ v(0) = 0, v(1) = 0 \end{cases}$$

con $k > 0$ costante. Questo problema (coefficienti costanti) si può risolvere esplicitamente in modo elementare. Per $k \neq n\pi$ la soluzione esiste ed è unica:

$$v(x) = \frac{1}{k^2}\left(1 - \cos(kx) + \sin(kx)\left(\frac{\cos k - 1}{\sin k}\right)\right).$$

Per $k = n\pi$ con n dispari il problema non ha alcuna soluzione; per n pari ha le infinite soluzioni

$$v(x) = \frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi x)) + c\sin(n\pi x) \text{ al variare di } c \in \mathbb{R}.$$

Effettivamente quindi il problema non è in generale ben posto per $\|q\|_{C^0[0,1]} > 8$. Segnaliamo che il contresempio $q(x) = -\pi^2$ ha un significato matematico ma non fisico, in quanto per il suo significato fisico $q(x) \geq 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 1, Zanichelli 2008.

[2] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa: Analisi Matematica 1, Zanichelli 2009.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari