

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Primo appello. Luglio 2019

A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Dopo aver richiamato la definizione di condizione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato e la definizione di spazio vettoriale normato completo, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a, b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a, b])$ con la norma C^0 non è completo.

B. “Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura”. Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono Ω, \mathcal{M}, μ , definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Fare poi diversi esempi di spazi di misura incontrati nel corso. Infine, enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l’esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue proprietà.

C. La trasformata di Fourier in L^2 : dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

D. Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, enunciare il teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: trasformata della traslata, dilatata, del prodotto per un esponenziale complesso, della derivata; derivata della trasformata; trasformata di una (opportuna) convoluzione. In particolare, **dimostrare** le due relazioni che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata. (E’ sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 5 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-t} \chi_{(0,1)}(t)$.

2. (5 punti). Dopo aver previsto in base alla teoria le proprietà della trasformata

$$\mathcal{F}(x\mathcal{F}(e^{-x^4}))$$

(simmetrie, reale/immaginario, velocità di convergenza a zero all'infinito, regolarità), calcolarla, riscrivendo il risultato nella forma più semplice possibile.

(Suggerimento: *non occorre calcolare* $\mathcal{F}(e^{-x^4})$).

3. (5 punti). Sia $[x]$ = parte intera di x , cioè:

$$[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

Provare che questa funzione definisce una distribuzione temperata T e calcolare \widehat{T} e T' . Riconoscere la distribuzione T' ottenuta. Infine, calcolare la derivata distribuzionale di $x^2 [x]$, riscrivendo il risultato nella forma più semplice.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Primo appello. Luglio 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Dopo aver richiamato la definizione di condizione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato e la definizione di spazio vettoriale normato completo, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a, b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a, b])$ con la norma C^0 non è completo.

Risposta: v. libro di testo, §1.1.3, 1.2.1, 1.2.2.

B. “Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura”. Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono Ω, \mathcal{M}, μ , definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Fare poi diversi esempi di spazi di misura incontrati nel corso. Infine, enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l’esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue proprietà.

Risposta: v. libro di testo, §2.1, 2.2.

C. La trasformata di Fourier in L^2 : dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà (senza dimostrazione), **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Risposta: v. libro di testo, §7.4.1, 7.4.2.

D. Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, enunciare il teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: trasformata della traslata, dilatata, del prodotto per un esponenziale complesso, della derivata; derivata della trasformata; trasformata di una (opportuna) convoluzione. In particolare, **dimostrare** le due relazioni che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata. (E’ sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 5 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-t} \chi_{(0,1)}(t)$.

Indicando con $Y(s)$, $F(s)$ le trasformate di Laplace di $y(t)$, $f(t)$ si ha:

$$Y(s) - 5Y(s) \mathcal{L}(e^{-t} \sin t)(s) = F(s)$$

$$Y(s) \left(1 - 5 \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right) = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 2s + 2} \right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \left(\frac{s^2 + 2s - 3 + 5}{s^2 + 2s - 3} \right) = F(s) + F(s) \cdot \frac{5}{(s-1)(s+3)}$$

Ora,

$$\frac{5}{(s-1)(s+3)} = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{5}{4} (e^t - e^{-3t}) \right)$$

perciò

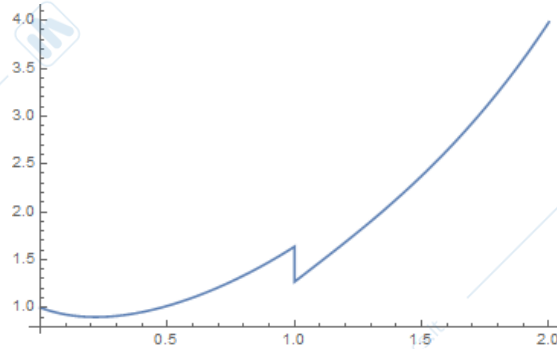
$$Y(s) = \mathcal{L} \left(f(t) + f(t) * \frac{5}{4} (e^t - e^{-3t}) \right)$$

e

$$u(t) = f(t) + \frac{5}{4} \int_0^t (e^{t-\tau} - e^{-3(t-\tau)}) f(\tau) d\tau.$$

Sia ora $f(t) = e^{-t} \chi_{(0,1)}(t)$. Si ha:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & e^{-t} + \frac{5}{4} \left(e^t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau - e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \right) \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{5}{4} \left(e^t \int_0^1 e^{-2\tau} d\tau - e^{-3t} \int_0^1 e^{2\tau} d\tau \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & e^{-t} + \frac{5}{4} \left(e^t \cdot \frac{1-e^{-2t}}{2} - e^{-3t} \cdot \frac{e^{2t}-1}{2} \right) \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{5}{4} \left(e^t \cdot \frac{1-e^{-2}}{2} - e^{-3t} \cdot \frac{e^2-1}{2} \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{5}{8} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{5}{8} e^{-3t} \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{5}{8} (e^t (1 - e^{-2}) + e^{-3t} (1 - e^2)) \end{cases} \end{aligned}$$



2. (5 punti). Dopo aver previsto in base alla teoria le proprietà della trasformata

$$\mathcal{F}\left(x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)\right)$$

(simmetrie, reale/immaginario, velocità di convergenza a zero all'infinito, regolarità), calcolarla, riscrivendo il risultato nella forma più semplice possibile. (Suggerimento: *non occorre calcolare* $\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)$).

$e^{-x^4} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi $x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{F}\left(x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Perciò la funzione ottenuta è infinitamente derivabile e tende a zero più rapidamente di ogni potenza. Inoltre:

e^{-x^4} è reale e pari, quindi $\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)$ è reale e pari, quindi $x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)$ è reale e dispari, quindi $\mathcal{F}\left(x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)\right)$ è immaginaria pura e dispari.

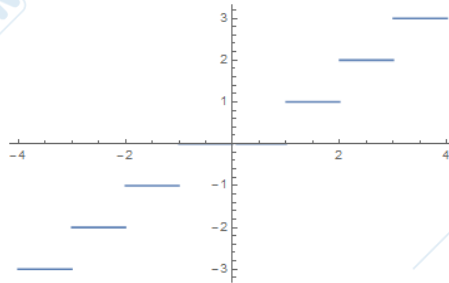
Per il calcolo, sia $g(x) = e^{-x^4}$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)\right) &= \mathcal{F}\left(x\widehat{g}(x)\right) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}\left(\widehat{g}(\xi)\right) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} g(-\xi) \\ &= \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi^4} = -4\xi^3 \frac{1}{-2\pi i} e^{-\xi^4} = -\frac{2}{\pi} i \xi^3 e^{-\xi^4}.\end{aligned}$$

3. (5 punti). Sia $[x]$ = parte intera di x , cioè:

$$[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

Provare che questa funzione definisce una distribuzione temperata T e calcolare \widehat{T} e T' . Riconoscere la distribuzione T' ottenuta. Infine, calcolare la derivata distribuzionale di $x^2[x]$, riscrivendo il risultato nella forma più semplice.



$$[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

$$|[x]| \leq |x|,$$

perciò $[x]$ è una funzione lentamente crescente, e definisce una distribuzione temperata T .

Poiché T è costante a tratti, con discontinuità a gradino in tutti i punti di \mathbb{Z} , con salto 1, si ha:

$$T' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \Delta_1.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \mathcal{F}(\chi_{[n, n+1)}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left[\frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right]_n^{n+1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left[\frac{e^{-2\pi i(n+1)\xi} - e^{-2\pi i n \xi}}{-2\pi i \xi} \right] \\ &= \frac{1}{-2\pi i \xi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-2\pi i n \xi} (e^{-2\pi i \xi} - 1) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-2\pi i n \xi}. \end{aligned}$$

Poiché $x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ vale la formula di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} (x^2 T_{[x]})' &= 2x T_{[x]} + x^2 (T_{[x]})' \\ &= 2x [x] + x^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = 2x [x] + \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 \delta_n. \end{aligned}$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero prima prova in itinere. Luglio 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Dopo aver richiamato la definizione di condizione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato e la definizione di spazio vettoriale normato completo, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a, b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a, b])$ con la norma C^0 non è completo.

B. “Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura”. Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono Ω, \mathcal{M}, μ , definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Fare poi diversi esempi di spazi di misura incontrati nel corso. Infine, enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l’esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue proprietà.

C. Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso e si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

D. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Dare quindi la definizione di sistema ortonormale (s.o.n.) numerabile e di serie di Fourier, in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n. numerabile. **Dimostrare** come dal teorema della proiezione seguono la disuguaglianza di Bessel e la convergenza delle serie di Fourier (a un elemento dello spazio). Infine, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert e enunciare con precisione il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n.c.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

- Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $g \in C^0_*(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^0_0(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$, allora $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$, allora $\widehat{f} * \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(0, 1)$, allora $fg \in L^1(0, 1)$

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = \chi_{(0, +\infty)}(x) e^{-x}; \quad g(x) = e^{-2|x|}$$

a. Prima di calcolare la convoluzione, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita, per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * g$ è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua.

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ (riportando ordinatamente il procedimento e i passi importanti del calcolo) e *semplificare l'espressione ottenuta*.

3. (5 punti). Dopo aver previsto in base alla teoria le proprietà della trasformata

$$\mathcal{F}\left(x\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)\right)$$

(simmetrie, reale/immaginario, velocità di convergenza a zero all'infinito, regolarità), calcolarla, riscrivendo il risultato nella forma più semplice possibile.

(Suggerimento: *non occorre calcolare* $\mathcal{F}\left(e^{-x^4}\right)$).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero prima prova in itinere. Luglio 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Dopo aver richiamato la definizione di condizione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato e la definizione di spazio vettoriale normato completo, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a, b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a, b])$ con la norma C^0 non è completo.

Risposta: v. libro di testo, § 1.1.3, 1.2.1, 1.2.2.

B. “Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura”. Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono Ω, \mathcal{M}, μ , definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Fare poi diversi esempi di spazi di misura incontrati nel corso. Infine, enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l'esistenza della misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n e le sue proprietà.

Risposta: v. libro di testo, §2.2, 2.3.

C. Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso e si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

Risposta: v. libro di testo, §3.2.

D. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Dare quindi la definizione di sistema ortonormale (s.o.n.) numerabile e di serie di Fourier, in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n. numerabile. **Dimostrare** come dal teorema della proiezione seguono la disuguaglianza di Bessel e la convergenza delle serie di Fourier (a un elemento dello spazio). Infine, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert e enunciare con precisione il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n.c.

Risposta: v. libro di testo, §4.3.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

- Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $g \in C^0_*(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^0_0(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$, allora $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g(x) = \frac{1}{1+|x|}$, allora $\widehat{f} * \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$
- Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(0, 1)$, allora $fg \in L^1(0, 1)$

a. Falso. Se $f(x) = e^x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e $g(x) = \frac{1}{1+x^2} \in C^0_*(\mathbb{R})$, $f \cdot g(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ è continua ma non tende a zero a $+\infty$.

b. Vero. $f \in L^1(\mathbb{R})$; $g \in C^0_0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ perciò per il teorema di Young $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.

c. Vero. Poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Poiché $g(x) = \frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$.

d. Falso. Una funzione sta in $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se la sua trasformata di Fourier sta in $L^2(\mathbb{R})$. Ma

$$\mathcal{F}(\widehat{f} * \widehat{g})(x) = \mathcal{F}(\widehat{f})(x) \mathcal{F}(\widehat{g})(x) = (fg)(-x).$$

Ora se come funzione $L^1(\mathbb{R})$ scegliamo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{(0,1)}(x)$ si ha

$$(fg)(-x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \chi_{(-1,0)}(x) \frac{1}{1+|x|}$$

che non appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ perché

$$|(fg)(-x)|^2 = \frac{1}{|x|} \chi_{(-1,0)}(x) \frac{1}{(1+|x|)^2}$$

non è integrabile vicino a 0.

e. Vero. Per l'inclusione degli spazi L^p su insiemi di misura finita,

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \implies f \in L^2(0, 1) \implies f \in L^1(0, 1)$$

perciò per la disuguaglianza di Hölder $fg \in L^1(0, 1)$.

2. (5 punti). Siano

$$f(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x) e^{-x}; \quad g(x) = e^{-2|x|}$$

a. Prima di calcolare la convoluzione, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita, per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f * g \in L^p(\mathbb{R})$, se $f * g$ è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua.

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ (riportando ordinatamente il procedimento e i passi importanti del calcolo) e *semplificare l'espressione ottenuta*.

a. Poiché (in particolare) $f \in L^1(\mathbb{R})$ (in realtà sta in ogni spazio $L^p(\mathbb{R})$) e $g \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$, per il teorema di Young, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

Poiché f non è simmetrica, non ci aspettiamo particolari simmetrie da $f * g$. Poiché

$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2|x-y|} e^{-y} dy,$$

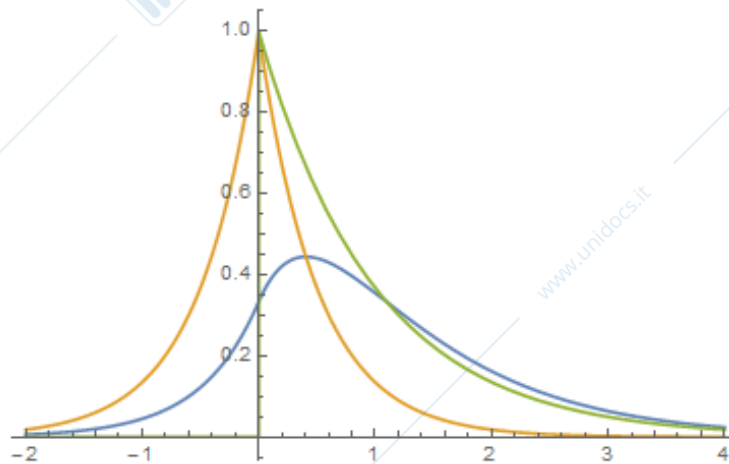
l'integranda è continua rispetto a x e

$$e^{-2|x-y|} e^{-y} \chi_{(0,+\infty)}(y) \leq e^{-y} \chi_{(0,+\infty)}(y) \in L^1(\mathbb{R}),$$

(maggiorante integrabile indipendente da x), per il teorema di continuità degli integrali dipendenti da un parametro la convoluzione è continua.

b.

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-2|x-y|} e^{-y} dy = \begin{cases} \text{se } x > 0 & \int_0^x e^{-2(x-y)} e^{-y} dy + \int_x^{+\infty} e^{-2(y-x)} e^{-y} dy \\ \text{se } x < 0 & \int_0^{+\infty} e^{-2(y-x)} e^{-y} dy \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } x > 0 & e^{-2x} \int_0^x e^y dy + e^{2x} \int_x^{+\infty} e^{-3y} dy \\ \text{se } x < 0 & e^{2x} \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } x > 0 & e^{-2x} (e^x - 1) + e^{2x} \cdot \frac{e^{-3x}}{3} \\ \text{se } x < 0 & \frac{e^{2x}}{3} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } x > 0 & \frac{4}{3} e^{-x} - e^{-2x} \\ \text{se } x < 0 & \frac{e^{2x}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$



3. (5 punti). Dopo aver previsto in base alla teoria le proprietà della trasformata

$$\mathcal{F}(x\mathcal{F}(e^{-x^4}))$$

(simmetrie, reale/immaginario, velocità di convergenza a zero all'infinito, regolarità), calcolarla, riscrivendo il risultato nella forma più semplice possibile.

(Suggerimento: non occorre calcolare $\mathcal{F}(e^{-x^4})$).

$e^{-x^4} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{F}(e^{-x^4}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi $x\mathcal{F}(e^{-x^4}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{F}(x\mathcal{F}(e^{-x^4})) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Perciò la funzione ottenuta è infinitamente derivabile e tende a zero più rapidamente di ogni potenza. Inoltre:

e^{-x^4} è reale e pari, quindi $\mathcal{F}(e^{-x^4})$ è reale e pari, quindi $x\mathcal{F}(e^{-x^4})$ è reale e dispari, quindi $\mathcal{F}(x\mathcal{F}(e^{-x^4}))$ è immaginaria pura e dispari.

Per il calcolo, sia $g(x) = e^{-x^4}$. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x\mathcal{F}(e^{-x^4})) &= \mathcal{F}(x\hat{g}(x)) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(\hat{g}(\xi)) = \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} g(-\xi) \\ &= \frac{1}{-2\pi i} \frac{d}{d\xi} e^{-\xi^4} = -4\xi^3 \frac{1}{-2\pi i} e^{-\xi^4} = -\frac{2}{\pi} i \xi^3 e^{-\xi^4}.\end{aligned}$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero seconda prova in itinere. Luglio 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. La trasformata di Fourier in L^2 : dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà, **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

B. Dare la definizione di funzione L -trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Fare un esempio di funzione non Laplace trasformabile, e esempi espliciti di tre funzioni aventi ascissa di convergenza, rispettivamente, positiva, nulla, negativa. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, e **dimostrare** l'injectività della trasformata di Laplace.

C. Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, enunciare il teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: trasformata della traslata, dilatata, del prodotto per un esponenziale complesso, della derivata; derivata della trasformata; trasformata di una (opportuna) convoluzione. In particolare, **dimostrare** le due relazioni che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

D. Il treno di impulsi Δ_a : darne la definizione e *dimostrare* che è una distribuzione temperata. Quindi, enunciare e **dimostrare** l'identità che permette di rappresentare Δ_1 come un'opportuna serie trigonometrica (divergente), e a partire da quest'identità calcolare la trasformata di Fourier di Δ_1 .

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 5 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-t} \chi_{(0,1)}(t)$.

2. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{ix+1}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f , giustificando i passaggi, e semplificare l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). Sia $[x]$ = parte intera di x , cioè:

$$[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

Provare che questa funzione definisce una distribuzione temperata T e calcolare \widehat{T} e T' . Riconoscere la distribuzione T' ottenuta. Infine, calcolare la derivata distribuzionale di $x[x]$, riscrivendo il risultato nella forma più semplice.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero seconda prova in itinere. Luglio 2019
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. La trasformata di Fourier in L^2 : dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà, **dimostrare** come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Risposta: v. libro di testo, § 7.4.1, 7.4.2.

B. Dare la definizione di funzione L -trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Fare un esempio di funzione non Laplace trasformabile, e esempi espliciti di tre funzioni aventi ascissa di convergenza, rispettivamente, positiva, nulla, negativa. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, e **dimostrare** l'injectività della trasformata di Laplace.

Risposta: v. libro di testo, §8.1.

C. Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, enunciare il teorema sulle proprietà della trasformata di Fourier sullo spazio $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: trasformata della traslata, dilatata, del prodotto per un esponenziale complesso, della derivata; derivata della trasformata; trasformata di una (opportuna) convoluzione. In particolare, **dimostrare** le due relazioni che riguardano la trasformata della derivata e la derivata della trasformata. (E' sufficiente trattare il caso unidimensionale, cioè funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §9.5.1.

D. Il treno di impulsi Δ_a : darne la definizione e *dimostrare* che è una distribuzione temperata. Quindi, enunciare e **dimostrare** l'identità che permette di rappresentare Δ_1 come un'opportuna serie trigonometrica (divergente), e a partire da quest'identità calcolare la trasformata di Fourier di Δ_1 .

Risposta: v. libro di testo, §9.5.3.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 5 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y , per un generico termine noto f supposto \mathcal{L} -trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-t} \chi_{(0,1)}(t)$.

Indicando con $Y(s)$, $F(s)$ le trasformate di Laplace di $y(t)$, $f(t)$ si ha:

$$Y(s) - 5Y(s) \mathcal{L}(e^{-t} \sin t)(s) = F(s)$$

$$Y(s) \left(1 - 5 \cdot \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right) = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 2s - 3}{s^2 + 2s + 2} \right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \left(\frac{s^2 + 2s - 3 + 5}{s^2 + 2s - 3} \right) = F(s) + F(s) \cdot \frac{5}{(s-1)(s+3)}$$

Ora,

$$\frac{5}{(s-1)(s+3)} = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3} \right) = \mathcal{L} \left(\frac{5}{4} (e^t - e^{-3t}) \right)$$

perciò

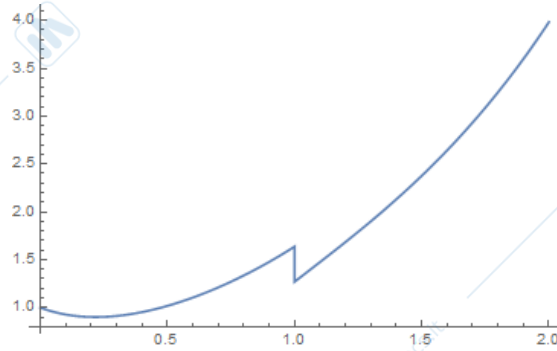
$$Y(s) = \mathcal{L} \left(f(t) + f(t) * \frac{5}{4} (e^t - e^{-3t}) \right)$$

e

$$u(t) = f(t) + \frac{5}{4} \int_0^t (e^{t-\tau} - e^{-3(t-\tau)}) f(\tau) d\tau.$$

Sia ora $f(t) = e^{-t} \chi_{(0,1)}(t)$. Si ha:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & e^{-t} + \frac{5}{4} \left(e^t \int_0^t e^{-2\tau} d\tau - e^{-3t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \right) \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{5}{4} \left(e^t \int_0^1 e^{-2\tau} d\tau - e^{-3t} \int_0^1 e^{2\tau} d\tau \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & e^{-t} + \frac{5}{4} \left(e^t \cdot \frac{1-e^{-2t}}{2} - e^{-3t} \cdot \frac{e^{2t}-1}{2} \right) \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{5}{4} \left(e^t \cdot \frac{1-e^{-2}}{2} - e^{-3t} \cdot \frac{e^2-1}{2} \right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } t < 1 & \frac{5}{8} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{5}{8} e^{-3t} \\ \text{se } t \geq 1 & \frac{5}{8} (e^t (1 - e^{-2}) + e^{-3t} (1 - e^2)) \end{cases} \end{aligned}$$



2. (5 punti). Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{ix + 1}.$$

Calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione temperata T_f , giustificando i passaggi, e semplificare l'espressione ottenuta.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{ix + 1} &= -ix + 1 + \frac{i}{x - i} \\ \mathcal{F}\left(\frac{x^2}{ix + 1}\right) &= -i\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(1) + i\mathcal{F}\left(\frac{1}{x - i}\right) \\ &= -i \cdot \frac{1}{-2\pi i} \delta' + \delta + i\mathcal{F}\left(\frac{1}{x - i}\right) = \frac{1}{2\pi} \delta' + \delta + i\mathcal{F}\left(\frac{1}{x - i}\right). \end{aligned}$$

Calcoliamo col metodo dei residui la trasformata di $g(x) = \frac{1}{x - i} \in L^2(\mathbb{R})$. Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{x - i}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{x - i} dx = \begin{cases} \text{se } \xi > 0 & 0 \\ \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z \xi}}{z - i}, i\right) \end{cases} \\ &= u(-\xi) 2\pi i (e^{-2\pi i z \xi})_{z=i} = 2\pi i u(-\xi) e^{2\pi \xi} \end{aligned}$$

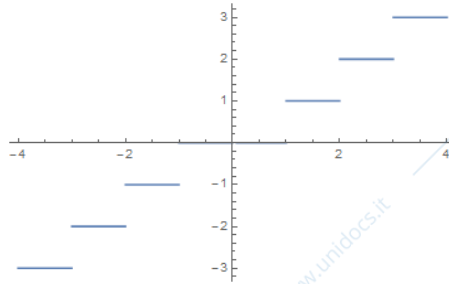
perciò

$$\widehat{(T_f)} = \frac{1}{2\pi} \delta' + \delta - 2\pi u(-\xi) e^{2\pi \xi}.$$

3. (5 punti). Sia $[x]$ = parte intera di x , cioè:

$$[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

Provare che questa funzione definisce una distribuzione temperata T e calcolare \widehat{T} e T' . Riconoscere la distribuzione T' ottenuta. Infine, calcolare la derivata distribuzionale di $x[x]$, riscrivendo il risultato nella forma più semplice.



$$[x] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

$$|[x]| \leq |x|,$$

perciò $[x]$ è una funzione lentamente crescente, e definisce una distribuzione temperata T .

Poiché T è costante a tratti, con discontinuità a gradino in tutti i punti di \mathbb{Z} , con salto 1, si ha:

$$T' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = \Delta_1.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \mathcal{F}(\chi_{[n, n+1)}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left[\frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \right]_n^{n+1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left[\frac{e^{-2\pi i(n+1)\xi} - e^{-2\pi i n \xi}}{-2\pi i \xi} \right] \\ &= \frac{1}{-2\pi i \xi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-2\pi i n \xi} (e^{-2\pi i \xi} - 1) = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} n e^{-2\pi i n \xi}. \end{aligned}$$

Poiché $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ vale la formula di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} (xT[x])' &= T[x] + x(T[x])' \\ &= [x] + x \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n = [x] + \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \delta_n. \end{aligned}$$