Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Seconda prova in itinere. 12 Luglio 2017

A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Mostrare come si risolve mediante la trasformata di Fourier il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con D costante positiva. Non si richiede di discutere le ipotesi di validità della formula ottenuta, ma di **mostrare in dettaglio come si ottiene la formula**, richiamando con precisione le proprietà della trasformata di Fourier che si utilizzano nella deduzione.

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata e derivata n-esima di una funzione.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di traslata $\tau_a T$, dilatata $D_a T$, riflessa $T^\vee$ di una distribuzione T, e di prodotto gT con g funzione regolare, enunciare le formule di derivazione per queste 4 espressioni di T, **dimostrando** quella della dilatata e del prodotto.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrando** che questa è a sua volta una distribuzione temperata.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata, separando parte reale e immaginaria.

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integro-differenziale di un circuito LCR in serie con una tensione $v(t)$ applicata:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\, d\tau\right) = v(t)$$

dove $i(0) = 0, q_0 = 0$ e $L = 2, C = 4, R = 1$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la formula di rappresentazione che assegna la soluzione di questo problema per un generico termine noto $v(t)$ L-trasformabile.

b. Calcolare esplicitamente la soluzione quando $v(t) = e^{-t/4}$.

3. (5 punti).

a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata

$$\left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)'.$$

Per far questo si chiede anzitutto di calcolare esplicitamente, per $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espressione

$$\left\langle \left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)', \phi \right\rangle$$

(si raccomanda di procedere ordinatamente, applicando le definizioni e riportando tutti i passaggi), e quindi riesprimere il risultato trovato nella forma $\langle T, \phi\rangle$ dove T è espressa nel modo più semplice possibile mediante opportune derivate della δ.

b. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata di T_f dove

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

giustificando il procedimento in base ai risultati studiati.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Seconda prova in itinere. 12 Luglio 2017
A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Mostrare come si risolve mediante la trasformata di Fourier il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \text{ per } x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \text{ per } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con D costante positiva. Non si richiede di discutere le ipotesi di validità della formula ottenuta, ma di **mostrare in dettaglio come si ottiene la formula**, richiamando con precisione le proprietà della trasformata di Fourier che si utilizzano nella deduzione.

[**Risposta: v. Dispensa, § 5.3.2**]

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la $\mathcal{L}$-trasformata della primitiva di una funzione, della derivata e derivata n-esima di una funzione.

[**Risposta: v. Dispensa, § 6.2**]

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di traslata $\tau_a T$, dilatata $D_a T$, riflessa $T^\vee$ di una distribuzione T, e di prodotto gT con g funzione regolare, enunciare le formule di derivazione per queste 4 espressioni di T, **dimostrando** quella della dilatata e del prodotto.

[**Risposta: v. Dispensa, § 7.2.3**]

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la trasformata di Fourier di una distribuzione e mostrare come si arriva a restringere l'insieme delle distribuzioni. Dare la definizione di convergenza nello spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida e la definizione di distribuzione temperata. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, **dimostrando** che questa è a sua volta una distribuzione temperata.

[**Risposta: v. Dispensa, § 7.4.1**]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata, separando parte reale e immaginaria.

a. $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, quindi sarà $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ma non necessariamente $\widehat{f}$ continua; f è reale né pari né dispari, a priori $\widehat{f}$ non sarà né reale né immaginaria pura e non avrà simmetrie; f è infinitamente derivabile, quindi $\widehat{f}$ tenderà a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x; f tende a zero lentamente, $\widehat{f}$ potrebbe essere discontinua.

b. Sia

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5} = xg(x), \text{ con}$$
$$g(x) = \frac{1}{x^2+2x+5},$$

calcoliamo anzitutto $\widehat{g}$ col metodo dei residui. La funzione $g(z)$ ha poli del prim'ordine in $z = -1 \pm 2i$.

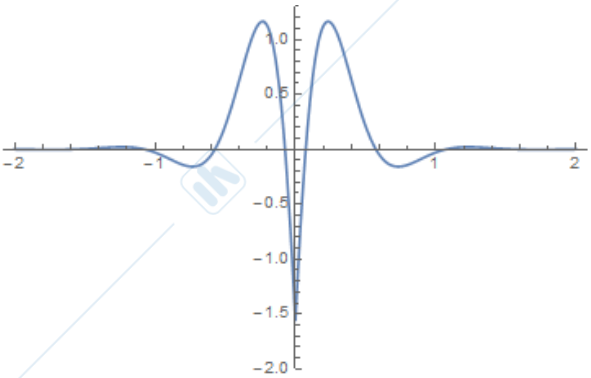
$$\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x^2+2x+5}dx = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+2z+5}, -1+2i\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2+2z+5}, -1-2i\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{2z+2}\right)_{/z=-1+2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{2z+2}\right)_{/z=-1-2i} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{e^{2\pi i\xi(1-2i)}}{4i}\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{e^{2\pi i\xi(1+2i)}}{-4i}\right) \end{cases}$$

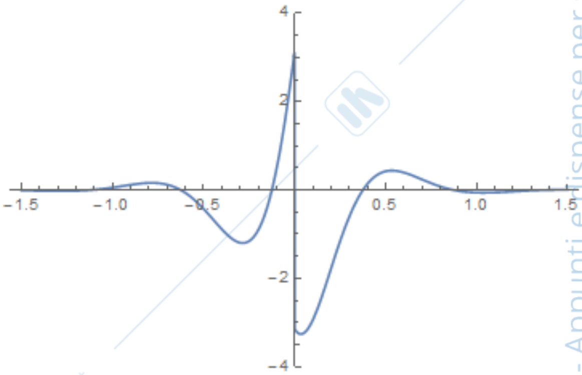
$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}e^{4\pi\xi}e^{2\pi i\xi} \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}e^{-4\pi\xi}e^{2\pi i\xi} \end{cases} = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi|\xi|}e^{2\pi i\xi} = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi|\xi|}\left(\cos(2\pi\xi) + i\sin(2\pi\xi)\right)$$

Ora sfruttiamo la proprietà

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \mathcal{F}(xg(x))(\xi) = \frac{-1}{2\pi i}\widehat{g}'(\xi) \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\frac{\pi}{2}\left[e^{-4\pi|\xi|}\left(\cos(2\pi\xi) + i\sin(2\pi\xi)\right)\right]' \\
&= \frac{i}{4}\left[e^{-4\pi|\xi|}\cos(2\pi\xi) + ie^{-4\pi|\xi|}\sin(2\pi\xi)\right]' \\
&= \frac{i}{4}\left\{\left[e^{-4\pi|\xi|}\cos(2\pi\xi)\right]' + i\left[e^{-4\pi|\xi|}\sin(2\pi\xi)\right]'\right\} \\
&= \frac{i}{4}\left[e^{-4\pi|\xi|}\left(-4\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)\cos(2\pi\xi) - 2\pi\sin(2\pi\xi)\right)\right] - \frac{1}{4}\left[e^{-4\pi|\xi|}\left(-4\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)\sin(2\pi\xi) + 2\pi\cos(2\pi\xi)\right)\right] \\
&= -\frac{\pi}{2}\left[e^{-4\pi|\xi|}\left(-2\,\mathrm{sgn}(\xi)\sin(2\pi\xi) + \cos(2\pi\xi)\right)\right] + i\frac{\pi}{2}\left[e^{-4\pi|\xi|}\left(-2\,\mathrm{sgn}(\xi)\cos(2\pi\xi) - \sin(2\pi\xi)\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}e^{-4\pi|\xi|}\left[-\cos(2\pi\xi) + 2\sin(2\pi|\xi|) - i\left(2\,\mathrm{sgn}(x)\cos(2\pi\xi) + \sin(2\pi\xi)\right)\right]
\end{aligned}
$$



Re $\widehat{f}(\xi)$



Im $\widehat{f}(\xi)$

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integro-differenziale di un circuito LCR in serie con una tensione $v(t)$ applicata:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \int_0^t i(\tau)\,d\tau\right) = v(t)$$

dove $i(0) = 0, q_0 = 0$ e $L = 2, C = 4, R = 1$.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la formula di rappresentazione che assegna la soluzione di questo problema per un generico termine noto $v(t)$ L-trasformabile.

b. Calcolare esplicitamente la soluzione quando $v(t) = e^{-t/4}$.

a. Ponendo $I(s) = \mathcal{L}(i(t))(s), V(s) = \mathcal{L}(v(t))(s)$ e trasformando l'equazione differenziale tenendo conto delle condizioni iniziali si ha:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + RI(s) + \frac{1}{C}\left(q_0 + \frac{I(s)}{s}\right) &= V(s) \\ LsI(s) + RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} &= V(s) \\ I(s)\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right) &= V(s) \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}. \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}},$$

e con $L = 2, C = 4, R = 1$ si ha

$$\frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}}.$$

Ora:

$$\frac{s}{s^2 + \frac{1}{16}} = \mathcal{L}\left(\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right)(s)\,; \frac{\frac{1}{4}}{s^2 + \frac{1}{16}} = \mathcal{L}\left(\sin\left(\frac{t}{4}\right)\right)(s)$$

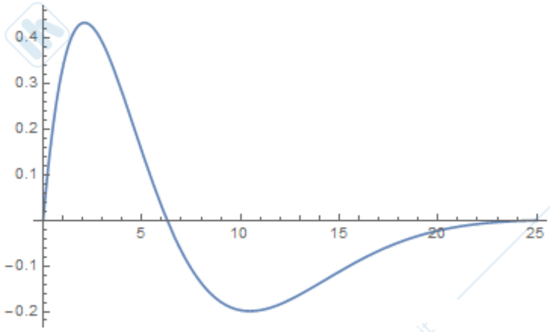
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(s + \frac{1}{4}\right)}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}} - \frac{\frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}}\right\} \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-t/4}\cos\left(\frac{t}{4}\right) - e^{-t/4}\sin\left(\frac{t}{4}\right)\right)(s) \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} I(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{-t/4}\left(\cos\left(\frac{t}{4}\right) - \sin\left(\frac{t}{4}\right)\right) * v(t)\right)(s) \\ i(t) &= \frac{1}{2}e^{-t/4}\left(\cos\left(\frac{t}{4}\right) - \sin\left(\frac{t}{4}\right)\right) * v(t). \end{aligned}$$

b. Per $v(t) = v(t) = e^{-t/4}$ si ha

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2}\int_0^t e^{-\tau/4}\left(\cos\left(\frac{\tau}{4}\right) - \sin\left(\frac{\tau}{4}\right)\right)e^{-(t-\tau)/4}d\tau \\ &= \frac{1}{2}e^{-t/4}\int_0^t \left[\cos\left(\frac{\tau}{4}\right) - \sin\left(\frac{\tau}{4}\right)\right]d\tau = \frac{1}{2}e^{-t/4}\left[4\sin\left(\frac{\tau}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{\tau}{4}\right)\right]_0^t \\ &= 2e^{-t/4}\left[\sin\left(\frac{t}{4}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right) - 1\right]. \end{aligned}$$



3. (5 punti).

a. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata

$$\left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)'.$$

Per far questo si chiede anzitutto di calcolare esplicitamente, per $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espressione

$$\left\langle \left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)', \phi \right\rangle$$

(si raccomanda di procedere ordinatamente, applicando le definizioni e riportando tutti i passaggi), e quindi riesprimere il risultato trovato nella forma $\langle T, \phi\rangle$ dove T è espressa nel modo più semplice possibile mediante opportune derivate della δ.

b. Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ delle distribuzioni, la derivata di T_f dove

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

giustificando il procedimento in base ai risultati studiati.

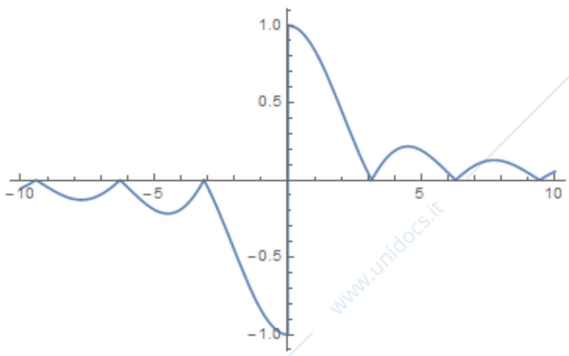
a.

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)', \phi \right\rangle &= -\left\langle D_2\left(e^{-x}\delta'\right), \phi' \right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle e^{-x}\delta', D_{1/2}\left(\phi'\right)\right\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\left\langle \delta', e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \delta, \left(e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right)\right)'\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right)\right)'(0) = \frac{1}{2}\left(-e^{-x}\phi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-x}\phi''\left(\frac{x}{2}\right)\right)(0) \\
&= -\frac{1}{2}\phi'(0) + \frac{1}{4}\phi''(0) = \left\langle \frac{1}{2}\delta' + \frac{1}{4}\delta'', \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

Quindi

$$\left(D_2\left(e^{-x}\delta'\right)\right)' = \frac{1}{2}\delta' + \frac{1}{4}\delta''.$$

b. La funzione $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ è regolare a tratti, con:
una discontinuità a salto in $x = 0$, con $f(0^+) - f(0^-) = 2$;
punti angolosi per $x = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$



Nei punti $x \neq k\pi$, dove f è derivabile in senso classico, si ha:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \operatorname{sgn}(\sin x) \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right).$$

Poiché la derivata distribuzionale di una funzione continua e regolare a tratti coincide con la derivata classica (definita quasi ovunque) e la derivata di un gradino coincide con il salto moltiplicato per la δ nel punto di salto, si ha:

$$\begin{aligned}(T_f)' = T_{f'} + 2\delta &= \operatorname{sgn}(\sin x) \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right) + 2\delta \\ &= \left(\frac{x \cos x \operatorname{sgn}(\sin x) - |\sin x|}{x^2} \right) + 2\delta.\end{aligned}$$