

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Secondo appello. Agosto 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di spazi di funzioni che sono di Hilbert, oppure di Banach ma non di Hilbert, oppure vettoriali normati ma non completi, oppure metrici ma non vettoriali, oppure vettoriali ma non normati. (Fare un esempio significa definire esplicitamente e con precisione sia l'insieme di funzioni sia l'eventuale norma o distanza che si considera). Le affermazioni negative ("questa non è una norma", "questo spazio non è vettoriale", ecc.) vanno giustificate con opportuni esempi o considerazioni. Negli esempi, utilizzare *almeno* (non solo!) i seguenti spazi:

$$C^0(a, b), C_*^0(\mathbb{R}), C^1[a, b], \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu), \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \text{ con } p > 1 \text{ e con } p < 1.$$

B. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**. Dare la definizione degli spazi $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ e spiegare che inclusione vale tra spazi $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ per diversi valori di p .

C. (6 punti). Dare la definizione di funzione L -trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, e **dimostrare** l'iniettività della trasformata di Laplace.

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di limite di una successione di distribuzioni temperate, e somma di una serie di distribuzioni temperate, definire il treno di impulsi e **dimostrare** che è una distribuzione temperata, ottenendolo come trasformata di un'opportuna serie convergente di distribuzioni temperate. Quindi **dimostrare** la formula di calcolo della trasformata di Fourier del treno di impulsi Δ_1 , giustificando i passaggi citando gli opportuni risultati.

Risolvere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Usare il metodo della trasformata di Laplace per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

per un generico termine noto $f(t)$ Laplace-trasformabile.

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}.$$

- Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?
- Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

3. (5 punti). Sia A un filtro avente risposta in frequenza

$$H(\xi) = \frac{1}{(\xi - 2\pi i)^4}.$$

- Calcolare la risposta in ampiezza e la risposta all'impulso.
- In base a quanto calcolato al punto precedente, dire se il filtro è causale o no, e dire se si può considerare un filtro passa-basso o passa-alto, o nessuna delle due cose. Giustificare le risposte.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Secondo appello. Agosto 2018
 A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Fare esempi di spazi di funzioni che sono di Hilbert, oppure di Banach ma non di Hilbert, oppure vettoriali normati ma non completi, oppure metrici ma non vettoriali, oppure vettoriali ma non normati. (Fare un esempio significa definire esplicitamente e con precisione sia l'insieme di funzioni sia l'eventuale norma o distanza che si considera). Le affermazioni negative ("questa non è una norma", "questo spazio non è vettoriale", ecc.) vanno giustificate con opportuni esempi o considerazioni. Negli esempi, utilizzare *almeno* (non solo!) i seguenti spazi:

$$C^0(a, b), C_*^0(\mathbb{R}), C^1[a, b], \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{M}, \mu), \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \text{ con } p > 1 \text{ e con } p < 1.$$

Risposta: v. libro di testo, Cap.1, §4.2.

B. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**. Dare la definizione degli spazi $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ e spiegare che inclusione vale tra spazi $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ per diversi valori di p .

Risposta: v. libro di testo, §2.4

C. (6 punti). Dare la definizione di funzione L -trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, e **dimostrare** l'iniettività della trasformata di Laplace.

Risposta: v. libro di testo, §8.1

D. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di limite di una successione di distribuzioni temperate, e somma di una serie di distribuzioni temperate, definire il treno di impulsi e **dimostrare** che è una distribuzione temperata, ottenendolo come trasformata di un'opportuna serie convergente di distribuzioni temperate. Quindi **dimostrare** la formula di calcolo della trasformata di Fourier del treno di impulsi Δ_1 , giustificando i passaggi citando gli opportuni risultati.

Risposta: v. libro di testo, §9.5.3.

Risolvere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Usare il metodo della trasformata di Laplace per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$$

per un generico termine noto $f(t)$ Laplace-trasformabile.

Indicando con Y, F la trasformata di Laplace di y, f , rispettivamente, e applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) &= F(s) \\ Y(s)(s^2 + 2s + 5) - s + 4 - 2 &= F(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2s + 5} + \frac{s - 2}{s^2 + 2s + 5}.$$

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) \right)$$

$$\frac{s - 2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} - \frac{3}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 2^2} = \mathcal{L} \left(e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{2} e^{-t} \sin(2t) \right)$$

Perciò

$$Y(s) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) * f(t) + e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{2} e^{-t} \sin(2t) \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t) * f(t) + e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{2} e^{-t} \sin(2t)$$

$$= e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{2} e^{-t} \sin(2t) + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin 2(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

2. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

a. f non è reale dispari, quindi \hat{f} sarà immaginaria pura e dispari. $f \in L^2 \setminus L^1$ quindi $\hat{f} \in L^2$ e ci aspettiamo $\hat{f} \notin C_*^0$. $f \in C^\infty$ quindi $\hat{f}(\xi) = o(1/\xi^k)$ per ogni k , per $\xi \rightarrow \pm\infty$.

b. Calcoliamo $\widehat{f}(\xi)$ per $\xi > 0$ e poi simmetrizzeremo.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^3}{(x^2+1)^2} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

La funzione $f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2}$ ha due poli del second'ordine in $z = \pm i$, ricordiamo che se g ha un polo del second'ordine in z_0 è

$$\text{Res}(g(z), z_0) = \frac{d}{dz} \left((z - z_0)^2 g(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

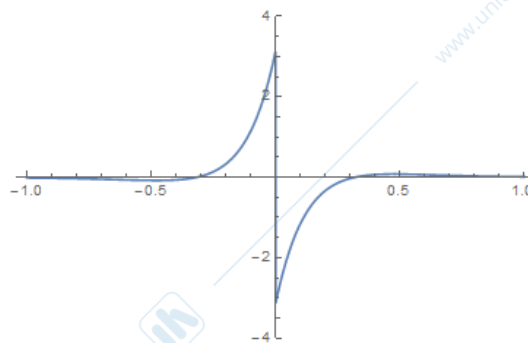
quindi per $\xi > 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= -2\pi i \text{Res} \left(\frac{z^3}{(z^2+1)^2} e^{-2\pi i \xi z}, -i \right) \\ &= -2\pi i \left(\frac{z^3}{(z-i)^2} e^{-2\pi i \xi z} \right)' \Big|_{z=-i} \\ &= -2\pi i \left[e^{-2\pi i \xi z} \left(-2\pi i \xi \frac{z^3}{(z-i)^2} + \frac{3z^2(z-i)^2 - 2z^3(z-i)}{(z-i)^4} \right) \right] \Big|_{z=-i} \\ &= -2\pi i e^{-2\pi i \xi} \left(-2\pi i \xi \frac{(-i)^3}{(-2i)^2} + \frac{-3(-2i) - 2i}{(-2i)^3} \right) \\ &= -2\pi i e^{-2\pi i \xi} \left(2\pi \xi \frac{1}{-4} + \frac{4i}{8i} \right) = \pi i e^{-2\pi i \xi} (\pi \xi - 1). \end{aligned}$$

quindi simmetrizzando dispari,

$$\widehat{f}(\xi) = \pi i e^{-2\pi |\xi|} (\pi \xi - \text{sgn}(\xi)).$$

Vediamo che \widehat{f} è immaginaria pura e dispari, discontinua, tendente a zero in modo esponenziale all'infinito. Grafico di $\text{Im } \widehat{f}$:



3. (5 punti). Sia A un filtro avente risposta in frequenza

$$H(\xi) = \frac{1}{(\xi - 2\pi i)^4}.$$

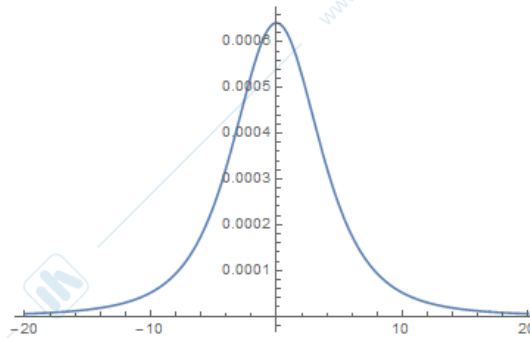
a. Calcolare la risposta in ampiezza e la risposta all'impulso.

b. In base a quanto calcolato al punto precedente, dire se il filtro è causale o no, e dire se si può considerare un filtro passa-basso o passa-alto, o nessuna delle due cose. Giustificare le risposte.

La risposta in ampiezza è data da

$$|H(\xi)| = \frac{1}{|\xi - 2\pi i|^4} = \frac{1}{(\sqrt{\xi^2 + 4\pi^2})^4} = \frac{1}{(\xi^2 + 4\pi^2)^2}.$$

Poiché $|H(0)| > 0$ e $|H(\xi)| \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow \pm\infty$, si può considerare un filtro passa-basso:



Calcoliamo la risposta all'impulso,

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i \xi t}}{(\xi - 2\pi i)^4} d\xi.$$

La funzione $f(z) = \frac{e^{2\pi i z t}}{(z - 2\pi i)^4}$ ha un polo del 4° ordine in $z = 2\pi i$, perciò

$$\begin{aligned} h(t) &= \begin{cases} \text{se } t > 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2\pi i z t}}{(z - 2\pi i)^4}, 2\pi i\right) \\ \text{se } t < 0 & 0 \end{cases} \\ &= u(t) 2\pi i \cdot \frac{1}{3!} (e^{2\pi i z t})'''|_{z=2\pi i} \\ &= u(t) \pi i \cdot \frac{1}{3} \left((2\pi i t)^3 e^{2\pi i z t} \right) |_{z=2\pi i} \\ &= u(t) \pi i \cdot \frac{1}{3} (2\pi i t)^3 e^{-4\pi^2 t} \\ &= u(t) \frac{8}{3} \pi^4 t^3 e^{-4\pi^2 t}. \end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{supp} h(t) \subset [0, +\infty)$, in particolare il filtro è causale.