Esercizio 1.1. *Dire quali dei seguenti insiemi di funzioni sono spazi vettoriali:*
(a) $C^0(a,b)$
(b) $C^0[a,b]$
(c) $\{f \in C^0[0,2] : f(1) = 1\}$
(d) $\{f \in C^1[0,2] : f(0) = 0, f'(2) = 0\}$
(e) $\{f \in C^2(\mathbb{R}) : e^x f''(x) + (\sin x) f'(x) - 5f(x) = 0\}$
(f) $\{f \in C^2(\mathbb{R}) : e^x f''(x) f(x) + 5f'(x) = 0\}$
(g) $\left\{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(x) = f(0) + \int_0^x (x-t)^3 f(t)\,dt\right\}$

Esercizio 1.2. *Di ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $C^0(\mathbb{R})$, dire se è uno spazio vettoriale, e se è uno spazio vettoriale normato con la norma*

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

(a) $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : f \text{ è limitata}\}$
(b) $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(x) \to 0 \text{ per } x \to \pm\infty\}$
(c) $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : \text{per qualche } k > 0 \text{ è } f(x) = 0 \text{ per } |x| > k\}$
(d) $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : \text{esiste finito } \lim_{x\to\pm\infty} f(x)\}$
(e) $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.

Esercizio 1.3. *Verificare che lo spazio $P(\mathbb{R})$ delle funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, continue e periodiche non è uno spazio vettoriale.*

Tuttavia, se si pone

$$d(f,g) = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$$

questo risulta uno spazio metrico: verificare che $\forall f, g \in P(\mathbb{R})$ risulta $d(f,g) < \infty$.

Esercizio 1.4. *Nello spazio $C^0[a,b]$ si considerino le due norme:*

$$\|f\|_{C^0[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|;$$

$$\|f\|_{L^1[a,b]} = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Delle due disuguaglianze

$$c_1 \|f\|_{C^0[a,b]} \overset{?}{\leq} \|f\|_{L^1[a,b]} \overset{?}{\leq} c_2 \|f\|_{C^0[a,b]} \quad \text{per ogni } f \in C^0[a,b]$$

(che, se fossero entrambe vere, si esprimerebbero dicendo che le due norme sono equivalenti) in realtà una è vera e una è falsa. Trovare e dimostrare quella vera, e costruire un contresempio di quella falsa. Notare che una disuguaglianza del tipo $\|f\|_1 \leq c\|f\|_2$ significa che esiste una costante $c > 0$ per cui la disuguaglianza vale per ogni $f \in C^0[a,b]$, quindi "dare un contresempio alla disuguaglianza $\|f\|_1 \leq$

$c\|f\|_2$" significa mostrare che per ogni $c > 0$ esiste una funzione f tale che $\|f\|_1 > c\|f\|_2$, ossia significa trovare una successione $\{f_n\}$ di funzioni per cui si abbia

$$\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} \to \infty \text{ per } n \to \infty.$$

Esercizio 1.5 (*). *Dimostrare che in* $\mathbb{R}$ *la funzione*

$$d(x,y) = |x-y|^p$$

con p *numero fissato, se* $0 < p < 1$ *è una distanza, mentre se* $p > 1$ *non lo è.*

Suggerimento. Seguire questa traccia:

1. Studiare la funzione $f(t) = \frac{(1+t)^p}{1+t^p}$ *e tracciarne il grafico per* $t \geq 0$*, trattando separatamente i due casi* $p > 1$ *e* $0 < p < 1$.

2. Dedurre dallo studio precedente che $(1+t)^p \leq 1 + t^p$ *per ogni* $t > 0$ *se* $0 < p \leq 1$*. Che disuguaglianza si può scrivere invece se* $p > 1$*?*

3. Dedurre dal punto precedente che se $0 < p < 1$ *si ha* $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ *per ogni* $a, b \geq 0$.

4. Utilizzando il punto 3 dimostrare che d *è una distanza se* $0 < p < 1$.

5. Se $p > 1$*, provare con un contresempio che* d *non è una distanza.*

Esercizio 1.6 (*). *Nello spazio* $C^0[a,b]$ *si definisca:*

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx$$

per qualche $p \in (0,1)$ *fissato. Provare che* d *è una distanza. (E' utile il risultato dell'esercizio 1.5).*

Provare poi che, se si tentasse di definire una norma ponendo:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

(sempre per $p \in (0,1)$*) questa verificherebbe i primi due assiomi della norma ma non la disuguaglianza triangolare, ossia esibire due funzioni* f, g *per cui risulta*

$$\|f+g\|_p > \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Quindi abbiamo uno spazio di funzioni che è vettoriale e metrico, in cui la distanza però non proviene da una norma.

(Suggerimento: scegliere opportune funzioni f, g *che valgono 1 su un intervallo e 0 altrove).*

Esercizio 1.12. *Sia*

$$\|f\|_P = \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

Dire se $\|\cdot\|_P$ *risulta una norma:*

(a) sullo spazio $C^1[a,b]$*;*

(b) sullo spazio $X = \{f \in C^1[a,b] : f(a) = 0\}$.

Esercizio 1.1

(a) sì.

(b) sì.

(c) no, la condizione $f(1) = 1$ non si conserva sommando due funzioni che la soddisfano.

(d) sì (le condizioni omogenee si conservano per combinazione lineare).

(e) sì (l'equazione differenziale in f è lineare omogenea).

(f) no (l'equazione differenziale in f non è lineare, per la presenza del prodotto $f(x) f''(x)$)

(g) sì (l'equazione integrodifferenziale in f è lineare omogenea).

Esercizio 1.2

(a) E' uno spazio vettoriale, e la norma $\|f\|_{C^0(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ è finita per ogni f in questo spazio, perciò lo spazio è vettoriale normato.

(b) E' uno spazio vettoriale normato. La norma è finita perché una funzione continua e infinitesima all'infinito è necessariamente limitata.

(c) E' uno spazio vettoriale normato. La norma è finita perché una funzione continua e nulla fuori da un intervallo limitato è necessariamente limitata.

(d) E' uno spazio vettoriale normato. La norma è finita perché una funzione continua e avente limite finito all'infinito è necessariamente limitata.

(e) E' uno spazio vettoriale (la condizione omogenea $f(0) = 0$ si conserva per combinazioni lineari). Tuttavia una funzione continua e nulla nell'origine può essere illimitata (es. $f(x) = x$), perciò questa norma non è finita per ogni funzione di questo spazio.

Esercizio 1.3

Le funzioni $f(x) = \sin x, g(x) = \sin(\pi x)$ sono continue e periodiche, rispettivamente di periodi 2π e 2. Poiché il rapporto tra i periodi è un numero irrazionale, la somma $f(x) + g(x)$ non è periodica. Perciò $P(\mathbb{R})$ non è uno spazio vettoriale. Tuttavia ogni funzione continua e periodica è in particolare limitata, perciò lo è anche la differenza $|f(x) - g(x)|$, dunque $d(f, g)$ è ben definita in $P(\mathbb{R})$, ed è evidentemente una distanza, perciò $P(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico.

Esercizio 1.4

Si ha:

$$\|f\|_{L^1[a,b]} = \int_a^b |f(x)|\, dx \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = (b-a) \|f\|_{C^0[a,b]}$$

quindi la seconda disuguaglianza vale con $c_2 = (b-a)$.

Invece la prima disuguaglianza non vale. Per mostrarlo, sia $[a,b] = [-1,1]$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & \text{se } |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \le |x| \le 1. \end{cases}$$

Si ha

$$\|f_n\|_{C^0[a,b]} = 1 \text{ per ogni } n$$

$$\|f_n\|_{L^1[a,b]} = 2\int_0^{1/n} (1 - nx)\, dx = \frac{1}{n}, \text{ e}$$

$$\frac{\|f_n\|_{C^0[a,b]}}{\|f_n\|_{L^1[a,b]}} = n \to \infty \text{ per } n \to \infty.$$

Esercizio 1.5

Studiamo $f(t) = \frac{(1+t)^p}{1+t^p}$ per $t \geq 1$. La funzione è continua, $f(0) = 1$, $f(t) \to 1$ per $t \to +\infty$. Calcoliamo

$$f'(t) = \frac{p(1+t)^{p-1}(1+t^p) - pt^{p-1}(1+t)^p}{(1+t^p)^2} = \frac{p(1+t)^{p-1}\left[(1+t^p) - t^{p-1}(1+t)\right]}{(1+t^p)^2}$$
$$= \frac{p(1+t)^{p-1}}{(1+t^p)^2}\left[1 - t^{p-1}\right] \geq 0 \text{ per } t^{p-1} \leq 1, \text{ quindi:}$$

Se $p > 1, f'(t) \geq 0$ per $t \leq 1$, e $t = 1$ è punto di massimo. In questo caso è $0 \leq f(t) \leq f(1) = 2^{p-1}$, ossia

$$(1+t)^p \leq 2^{p-1}(1+t^p) \text{ per ogni } t \geq 0.$$

Se $0 < p < 1, f'(t) \geq 0$ per $t \geq 1$, e $t = 1$ è punto di minimo. In questo caso è $0 \leq f(t) \leq 1$, ossia

$$(1+t)^p \leq 1 + t^p \text{ per ogni } t \geq 0.$$

Nel caso $0 < p < 1$ si ha quindi

$$(1+t)^p \leq 1 + t^p \text{ per ogni } t \geq 0 \tag{1.5}$$

di conseguenza per $a, b \geq 0$ si ha

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p. \tag{1.6}$$

Infatti se $b = 0$ la disuguaglianza è ovvia, mentre se $b \neq 0$ è equivalente a

$$b^p\left(\frac{a}{b}+1\right)^p \leq b^p\left(\left(\frac{a}{b}\right)^p + 1\right)$$
$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p \leq \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1$$

che segue dalla (1.5) per $t = a/b$.

Proviamo quindi che nel caso $0 < p < 1$ la funzione

$$d(x,y) = |x-y|^p$$

è una distanza. Le proprietà

$$d(x,y) \geq 0 \text{ e } (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$

sono ovvie. Quanto alla disuguaglianza triangolare,

$$d(x,y) = |x-y|^p = |(x-z) + (z-y)|^p \leq (|x-z| + |z-y|)^p$$

per la disuguaglianza triangolare del modulo, e per la (1.6) applicata con $a = |x-z|, b = |z-y|$

$$\leq |x-z|^p + |z-y|^p = d(x,z) + d(z,y),$$

che è la disuguaglianza triangolare su d.

Infine, se $p > 1$,

$$d(1,3) = 2^p$$
$$d(1,2) + d(2,3) = 1^p + 1^p = 2 < 2^p = d(1,3),$$

quindi in questo caso la disuguaglianza triangolare viene a cadere.

Esercizio 1.6

Le proprietà

$$d(x,y) \geq 0 \text{ e } (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$

sono ovvie (per la proprietà di annullamento è importante che siamo in uno spazio di funzioni *continue*: se l'integrale di una funzione continua e non negativa è nullo, la funzione è *identicamente* nulla). Quanto alla disuguaglianza triangolare, sfruttando l'esercizio precedente abbiamo, per tre funzioni f, g, h continue e $0 < p < 1$,

$$|f(x) - g(x)|^p \leq |f(x) - h(x)|^p + |h(x) - g(x)|^p$$

e integrando in (a,b),

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \leq \int_a^b \left[|f(x) - h(x)|^p + |h(x) - g(x)|^p\right] dx$$
$$= \int_a^b |f(x) - h(x)|^p \, dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|^p \, dx = d(f,h) + d(h,g).$$

Proviamo che

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

per $p \in (0,1)$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare. Sia $(a,b) = (0,2)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ per } x \in (0,1) \\ 0 \text{ per } x \in (1,2) \end{cases} ; \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ per } x \in (0,1) \\ 1 \text{ per } x \in (1,2) \end{cases}$$

allora

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 1^p dx\right)^{1/p} = 1^{1/p} = 1 = \|g\|_p$$
$$\|f+g\|_p = \left(\int_0^2 1^p dx\right)^{1/p} = 2^{1/p} > 2$$
$$\|f\|_p + \|g\|_p = 2 < \|f+g\|_p$$

e la disuguaglianza triangolare della "norma" cade.

Esercizio 1.12

Come nell'esercizio precedente, l'unica proprietà della norma che è delicato verificare è quella di annullamento. Supponiamo che sia

$$\int_a^b |f'(x)| \, dx = 0$$

con $f \in C^1[a,b]$. Allora $|f'(x)|$ è una funzione continua non negativa con integrale nullo, perciò è identicamente nulla: dunque $f'(x) \equiv 0$, ossia $f(x)$ è costante in $[a,b]$. Nel caso (a), questo non consente di concludere che sia $f(x) \equiv 0$, mentre nel caso (b), sapendo che $f(a) = 0$, si conclude $f(x) \equiv 0$.

Dunque: quella proposta risulta una norma nel caso (b) e non nel caso (a).