

Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate

a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano

Settimana 9

Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la settimana 9:**Libro di testo: Cap.8, §8.2, 8.3.1, 8.5.1.****Svolgere i seguenti esercizi sulla trasformata di Laplace:****Esercizio 8.7** (utilizzando i metodi elementari visti a lezione o comunque ragionando a ritroso sulle formule di trasformazione studiate).**Esercizi 8.8, 8.9, 8.10, 8.11, 8.12.****Calcolo di convoluzioni finite.** Nelle formule risolutive dei problemi che si affrontano con la trasformata di Laplace occorre spesso calcolare la convoluzione finita di due segnali f, g :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \text{ per } t > 0,$$

Esercitarsi sui metodi elementari di integrazione (analisi 1!) che intervengono nel calcolo delle convoluzioni come:

$e^t * e^{-3t}$	$e^t * \sin t$
$\sin t * \chi_{(0,1)}(t)$	$t * \chi_{(a,b)}(t)$ per $0 < a < b$
$\sin(at) * \cos(bt)$	$e^{at} * t$
$\sin(at) * \sin(bt)$	$e^{at} * t^2$
$\cos(at) * \cos(bt)$	$\sin(\omega t) * \chi_{(a,b)}(t)$
$e^{at} * \sin(bt)$	$\cos(\omega t) * \chi_{(a,b)}(t)$
$e^{at} * \cos(bt)$	$e^{kt} * \chi_{(a,b)}(t)$
$e^{at} * e^{bt}$	$t^2 * \chi_{(a,b)}(t)$

dove a, b, k, ω sono costanti positive.**2 Esercizio.** Per i seguenti segnali $f(t)$ (prolungati a zero per $t < 0$) prevedere, senza calcolare $\mathcal{L}f(s)$, la velocità di convergenza a zero per $\operatorname{Re} s \rightarrow \infty$ di $\mathcal{L}f(s)$, in base al teorema visto.

$$\begin{aligned} & t^2 (\sin t) e^{-t} \\ & \sin(2t) \cos^2 t \\ & t^2 \chi_{(0,1)}(t) \\ & e^{3t} \chi_{(0,1)}(t) \end{aligned}$$

Svolgere l'Esercizio 2 del Quarto Appello dell'A.A. 2018/19 (scaricabile dalla pagina web del corso).

Approfondimento. In Analisi 2 avete visto che la soluzione dell'*equazione delle oscillazioni forzate e non smorzate*,

$$y'' + \omega^2 y = A \sin(\nu t)$$

può dar luogo al fenomeno della *risonanza*, cioè ad oscillazioni di ampiezza illimitata (fisicamente “catastrofica”) nel caso in cui $\omega = \nu$. La trasformata di Laplace permette di affrontare il seguente problema più generale: per quali forzanti $f(t)$ (anche di tipo non trigonometrico) l'equazione

$$y'' + \omega^2 y = f(t)$$

ha soluzioni illimitate? Ossia: quali tipi di sollecitazione esterna producono un effetto di risonanza su un oscillatore armonico? Chi vuole conoscere la risposta può leggere il paragrafo 8.5.4 del libro (fuori programma).