Corso di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate
A.A. 2020/2021
Domande-tipo di teoria sulla parte di programma che rientra nella prima prova in itinere

Marco Bramanti
Politecnico di Milano

April 8, 2021

Cap. 1. Elementi di analisi funzionale

1. Si dia la definizione di spazio metrico (riportando gli assiomi di distanza), successione di Cauchy, spazio metrico completo, spazio vettoriale normato (riportando gli assiomi di norma), spazio di Banach. Si facciano esempi di spazi di funzioni con le seguenti caratteristiche:

-uno spazio vettoriale normato e uno spazio vettoriale che non ha una norma naturale;

-uno spazio metrico che non è uno spazio vettoriale;

-uno spazio vettoriale normato completo e uno non completo.

Si sottolinea che tutti gli esempi fatti devono consistere di spazi *di funzioni*, non di spazi di dimensione finita.

2. Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f. Mostrare quindi con esempi espliciti che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

3. Dopo aver richiamato la definizione di condizione di Cauchy in uno spazio vettoriale normato e la definizione di spazio vettoriale normato completo, dimostrare (utilizzando esempi opportuni) che lo spazio $C^0([a,b])$ con la norma integrale non è completo e che lo spazio $C^1([a,b])$ con la norma C^0 non è completo.

4. Di ciascuno dei seguenti spazi di funzioni, dire se è vettoriale, se è normato, se è completo, fornendo le opportune giustificazioni:

a. Lo spazio $C^0[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

b. Lo spazio $C^0(a,b)$ con la norma $\sup_{x\in(a,b)}|f(x)|$.

c. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

d. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

e. Lo spazio $C^1[a,b]$ con la norma $\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|+\sup_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

f. Lo spazio $C_b^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e limitate su $\mathbb{R}$ con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

g. Lo spazio $C_*^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e che tendono a zero all'infinito, con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

h. Lo spazio $C_0^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ e nulle fuori da un intervallo chiuso e limitato (variabile da funzione a funzione), con la norma $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

Cap. 2. Teoria della misura e dell'integrazione

1. "Sia $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ uno spazio di misura". Si spieghi cosa significa, cioè si dica cosa sono $\Omega,\mathcal{M},\mu$, definendo in dettaglio i concetti coinvolti di sigma algebra e misura. Fare poi diversi esempi di spazi di misura incontrati nel corso.

2. Enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l'esistenza della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$ e le sue proprietà.

3. In un generico spazio di misura $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$, illustrare come si definisce l'integrale, prima per una funzione misurabile positiva e poi per una funzione di segno qualunque o a valori complessi. Richiamare le definizioni dei principali concetti coinvolti. Enunciare quindi le proprietà elementari dell'integrale in questo contesto (linearità, monotonia...).

4. Enunciare il teorema della convergenza dominata per l'integrale di Lebesgue e fare esempi di applicazioni teoriche di questo teorema incontrate nel corso. Confrontare con il teorema di passaggio al limite per l'integrale di Riemann che si è incontrato nel corso.

5. Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione **e si dimostrino** il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x)=\int_\Omega f(x,y)\,dy.$$

Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

6. Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si discuta poi qualche applicazione di questo teorema che si è incontrata nel corso.

7. Si definisca cosa si intende per convoluzione di due funzioni in $\mathbb{R}^n$ e si illustrino le proprietà della convoluzione viste nel corso. In particolare, si enunci

e **dimostri** un risultato preciso che riguarda la convoluzione di due funzioni $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si enunci poi il risultato analogo che estende il precedente a spazi L^p.

8. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty)$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Cosa si può dire sugli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0, 1)$?

9. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$. (Distinguere la definizione nei casi $p < \infty$ e $p = \infty$). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**. Dare la definizione degli spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e spiegare che inclusione vale tra spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per diversi valori di p.

Cap. 3. Operatori e funzionali lineari continui

1. Operatori lineari continui tra due spazi vettoriali normati: si enunci con precisione il teorema che sta alla base della definizione di "operatore lineare continuo" (equivalenza tra tre condizioni), si dia quindi questa definizione e la definizione di norma di un operatore. Si facciano diversi esempi di operatori lineari continui tra spazi di funzioni, e un esempio di operatore lineare non continuo.

2. Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso, e un esempio di funzionale lineare non continuo. Infine, si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

Cap. 4. Spazi di Hilbert

1. Dopo aver dato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare (in particolare, elencando gli assiomi di prodotto scalare), si enuncino la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la proprietà che consente di definire una norma, e l'uguaglianza del parallelogramma. Si dia la definizione di spazio pre-hilbertiano e spazio di Hilbert, e si facciano esempi di spazi di Hilbert e di spazi pre-hilbertiani che non sono di Hilbert. Si enuncino **e dimostrino** le proprietà di continuità della norma e del prodotto scalare.

2. Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi pre-hilbertiani per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

3. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

4. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare (senza dimostrazione) il teorema della proiezione

su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Dare quindi la definizione di sistema ortonormale (s.o.n.) numerabile e di serie di Fourier, in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n. numerabile. **Dimostrare** come dal teorema della proiezione seguono la disuguaglianza di Bessel e la convergenza delle serie di Fourier (a un elemento dello spazio per ora non precisato).

5. Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert. Quindi enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema che riguarda la trasformata di Fourier come isometria lineare tra spazi di Hilbert e la convergenza delle serie di Fourier in spazi di Hilbert.

6. Ortonormalizzando le potenze $1, x, x^2$ in $L^2(-1,1)$, costruire i primi polinomi di Legendre.

7. Ortonormalizzando le potenze $1, x, x^2$ in $L^2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx\right)$, costruire i primi polinomi di Hermite.

Risposte domande tipo di teoria Aiti

Cap. 1.1

- **Def. Spazio metrico**: Un insieme X si dice spazio metrico se è definita una funzione distanza $d: X \times X \longmapsto [0,+\infty)$ (dove $d(x,y)$ = "distanza da x a y") t.c.:

  1: $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$ (p. simmetria)

  2: $d(x,y) = 0 \iff x=y \quad \forall x,y \in X$ (p. annullamento)

  3: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$ (p. dis. triang.)

- **Def. Successione di Cauchy**: Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione appartenente a uno sp. metrico (X,d). Allora $\{x_n\}$ si dice di Cauchy se:

  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \text{t.c.} \quad \forall m,n \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

- **Def. Spazio metrico completo**: Sia (X,d) uno spazio metrico. (X,d) si dice completo se ogni successione di Cauchy $\subseteq X$ è convergente in X.

- **Def. Spazio vettoriale normato**: Uno sp. vett. X si dice normato se è definita una funzione detta norma $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ t.c.:

  1: $\|x\| = 0 \iff x=0 \quad \forall x \in X$ (p. annullamento)

  2: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}$ (p. omogeneità)

  3: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in X$ (p. dis. triang.)

  ↳ Inoltre ogni sp. vett. normato è uno sp. metrico dove la distanza è $d(x,y) = \|x-y\|$

- **Def. Spazio di Banach**: Si dice spazio di Banach uno spazio vett. normato completo. Ossia, sia X uno sp. vett. normato e per ogni succ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ è di Cauchy, quindi vale che: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \text{t.c.} \quad \forall m,n \geq n_0 \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$
  E ognuna di queste successioni di Cauchy converge in X, quindi X è completo.
  Poiché X è normato e completo si dice di Banach.

- Esempi:

1.a Spazio vett. normato senza norma naturale:

Lo spazio $C^\infty[a,b]$ non ha una "norma naturale", nel senso che sono definite infinite norme ma con nessuna di queste è completo. Quindi non esiste una norma naturale che "catturi" tutte le informazioni richieste dalla definizione di $C^\infty[a,b]$

1.b Spazio vett. senza norma naturale

Dato uno sp. vett. non è detto che sia normato. Ad es. lo spazio $C^0(a,b)$ non è normato in quanto su intervallo aperto le funzioni possono essere illimitate e quindi non è possibile definire nessuna norma.

2 Spazio metrico non vettoriale:

$X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzioni periodiche e limitate$\}$ con $d(f,g)=\|f-g\|_X$ è uno sp. metrico ma non è vett. poiché la comb. lin. di funz. periodiche non si conserva.

3a Spazio vett. normato completo: $C^0[a,b]$ con norma $\|\cdot\|_{C^0[a,b]}$ è di BANACH

3b Spazio vett. normato NON completo: $C^0[a,b]$ con norma $\|f\|_{C^0[a,b]}=\int_a^b|f(x)|dx$ non è COMPLETO, ma è NORMATO

Cap. 1.2

- Def. Convergenza puntuale: Sia $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $n=1,2,3,\dots$ una successione di funzioni con $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Si dice che $\{f_n\}$ converge puntualmente a $f:\Omega\to\mathbb{R}$ in Ω se $\forall\bar{x}\in\Omega$ $\exists$ finito $\lim_{n\to\infty}f_n(\bar{x})=f(\bar{x})$.

- Def. Convergenza uniforme: Sia $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $n=1,2,3,\dots$ e $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Si dice che $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f:\Omega\to\mathbb{R}$ se:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0\text{ t.c. }\forall n\quad|f_n-f|<\varepsilon\quad\forall x\in\Omega$$

- Teo. Conv. unif. + continuità: Sia $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$, con $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ e supponiamo valga che $f_n\to f$ uniformemente con $f:\Omega\to\mathbb{R}$ e supponiamo che f_n = succ. di funz. continue in Ω. Allora f è continua in Ω.

↳ Controes. $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_n=|x|^{\frac{1}{n}}\,sgn(x)$ continue in $[-1,1]$

$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ puntualmente e non unif. dove $f=\begin{cases}1 & ,x\in(0,1]\\ -1 & ,x\in[-1,0)\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ → f discontinua

- Teo. Conv. unif + Integrabilità: Sia $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, successione di funz. (limitate) e Riemann-integrabili in $[a,b]$, allora se $f_n\to f$ ($f:[a,b]\to\mathbb{R}$) unif. vale che f sarà (limitata) e Riemann-integr. e $\int_a^b f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$.

↳ Controes.: $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in[\frac{1}{n},1]\\ n\,x & x\in[0,\frac{1}{n}]\end{cases} \xrightarrow{\text{puntual.}} f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\in(0,1]\\ 0 & ,x=0\end{cases}$

→ f non integr. in $[0,1]$

- Teo. Conv. Unif + derivabilità: Sia $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ derivabili in Ω. Allora se $\exists f,g$ t.c.:

1. $f_n\to f$ puntualmente in Ω
2. $f_n'\to g$ uniform. in Ω

Allora vale che:
a. $f_n\to f$ unif. in Ω
b. f deriv. in Ω
c. $f'=g$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)=f'$

↳ Controes.: $f_n(x)=|x|^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{\text{puntual.}} f(x)=|x|$

f_n derivabili ↳ non derivabile

Cap. 1.3

- Def. condizione di Cauchy: Sia $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$, con $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ per $n=1,2,3,\dots$ allora vale che:

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n\ \ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\ \forall x\in\Omega \iff f_n\to f$ unif. in Ω con $f:\Omega\to\mathbb{R}$

- Def. Spazio di Banach: Si dice spazio di Banach uno spazio vett. normato completo. Ossia, sia X uno sp. vett. normato e per ogni succ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ è di Cauchy, quindi vale che: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0$ t.c. $\forall m,n\geq n_0\ \ \|x_n-x_m\|<\varepsilon$
E ognuna di queste successioni di Cauchy converg. in X, quindi X è completo.
Poiché X è normato e completo si dice di Banach.

- **Dimostrazione: $(C^0[a,b], \|\cdot\|_{L^1})$ non è completo:**

Consideriamo lo spazio $C^0[-1,1]$ con la norma integrale:

$$\|f\|_{L^1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$$

E mostriamo che NON è completo. Consideriamo la succ.:

$$f_n = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \text{se } x \geq 0 \\ -\sqrt[n]{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \longrightarrow f_n = |x|^{\frac{1}{n}} \operatorname{sgn}(x) \quad , n = 1, 2, 3 \dots$$

→ **Dimostrazione:**

La successione è di Cauchy. Infatti per $n > m$ si ha:

$$\|f_n - f_m\|_{L^1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = 2\int_0^1 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[m]{x})\,dx = 2\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{1+\frac{1}{m}}\right) \to 0 \quad \text{per } n,m \to \infty$$

D'altrocanto la succ. non converge ad alcun elemento dello spazio. Infatti $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ dove:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{discontinua} \Rightarrow f \notin C^0[-1,1]$$

→ Vedendo $C^0[-1,1] \subset R[-1,1]$ ($C^0[-1,1]$ sottosp. di $R[-1,1]$), dove $R[-1,1]$ è lo spazio delle funzioni limitate e Riemann integrabili che ha la norma $\|\cdot\|_{L^1}$

Quindi: ↳ $f_n \in C^0[-1,1]$ e di Cauchy in $C^0[-1,1]$ con norma $\|\cdot\|_{L^1}$

↳ $f_n \longrightarrow f \in R[-1,1] \setminus C^0[-1,1]$

↳ f_n non converge a un elemento di $C^0[-1,1]$

↳ in $C^0[-1,1]$ la succ. f_n è di Cauchy ma non converge $\Rightarrow C^0[-1,1]$ con norma $\|\cdot\|_{L^1}$ NON è COMPLETO

• Dimostrazione che $(C^1[a,b], \|\cdot\|_{C^0[a,b]})$ non è completo.

Motivo: Se mostriamo che $C^1[a,b]$ è un sottoinsieme chiuso in $C^0[a,b]$ possiamo concludere che è COMPLETO.

Ma NON è così.

→ Dimostrazione: Sia $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ in $[-1,1]$. Si ha $f_n \in C^1[-1,1]$ $\forall n = 1,2\ldots$

dove:

$$f_n'(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)|x|^{\frac{1}{n}} \, \mathrm{sgn}(x) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

E vale che $f_n(x) \xrightarrow[\text{unif.}]{} f(x) = |x|$ per $x \to \infty$

$$\max_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in (0,1)} \underbrace{\left(x - x^{1+\frac{1}{n}}\right)}_{g(x)}$$

Ricerca max $g(x)$ → $g'(x) = 1 - \left(1+\frac{1}{n}\right) x^{\frac{1}{n}} \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

↳ $\max_{x \in [0,1]} g(x) = g\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\right) = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{n})}\right) = \underbrace{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} e} \underbrace{\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} n} \sim \frac{1}{en} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$ conv. unif. ✓

→ $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ in $C^0[a,b]$ (conv. in norma $C^0[-1,1]$).

MA il limite $f \notin C^1[-1,1]$ → $f(x) = |x|$ non deriv. in 0

↳ Per la def. di sottoins. chiuso ⟹ $C^1[-1,1]$ NON è un sottoins. chiuso di $C^0[a,b]$

⟹ $(C^1[-1,1], \|\cdot\|_{C^0[-1,1]})$ NON è COMPLETO

Cap. 1.4

a $C^0[a,b]$ con $\|f\|_{C^0[a,b]} \longrightarrow$ VETT., NORM., COMPLETO

b $C^0(a,b)$ con norma $\|f\|_{C^0(a,b)} \longrightarrow$ VETT. (non normato vedi es. Cap. 1.1)

c $C^1[a,b]$ con $\|f\|_{C^0[a,b]} \longrightarrow$ VETT, NORM. (non compl. dim. prec.)

d $C^1[a,b]$ con $\|f'\|_{C^1[a,b]} \longrightarrow$ VETT. (non rispetta la prop. di annullamento della norma $\Rightarrow$ NON NORM.)

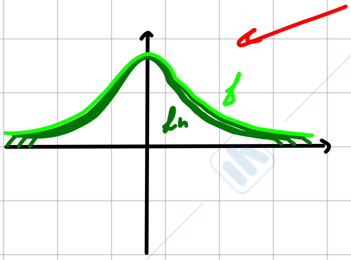
e $C^1[a,b]$ con $\|f\|_{C^0} + \|f'\| \longrightarrow$ VETT, NORM., COMPLETO

f $C_b^0(\mathbb{R})$ con $\|f\|_{C^0} \longrightarrow$ VETT, NORM., COMPLETO

g $C_*^0(\mathbb{R})$ con $\|f\|_{C^0} \longrightarrow$ VETT, NORM, COMPLETO

h. $C_0^0(\mathbb{R})$ con $\|f\|_{C^0} \longrightarrow$ VETT, NORM. (non completo si possono costruire esempi in cui $\{f_n\}$ sono di Cauchy ma non convergono a una f. di $C_0^0(\mathbb{R})$)

es



Cap. 2.1

- **Def. σ-Algebra:** Sia Ω un insieme qualsiasi. Sia $\mathcal{M}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω ($\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$). $\mathcal{M}$ si dice σ-algebra se:
  1. $\Omega \in \mathcal{M}$
  2. Se $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
  3. $\mathcal{M}$ chiuso per unioni numerabili: cioè se $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$

$\rightarrow (\Omega, \mathcal{M})$ si dice spazio misurabile

- **Def. Misura** Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile si definisce misura su $(\Omega, \mathcal{M})$ la funzione $\mu: \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ t.c. μ sia numerabilmente additiva, cioè $\forall \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$ (a 2 a 2 disg.)

$\rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

$\rightarrow (\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ si dice spazio di misura

- **Esempi:**

  a. Misura del conteggio: $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ con $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad \mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } E \text{ insieme inf.} \\ |E| & \rightarrow \text{card. di } E = \text{num. di el. di } E \text{ finito} \end{cases}$

  b. Misura di Dirac: $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mu)$ con $x_0 \in \Omega$, $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad \mu(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in E \\ 0 & \text{se } x_0 \notin E \end{cases}$

Cap. 2.2

- **Teo. Esistenza misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$**

In $\Omega = \mathbb{R}^n$ esiste una σ-algebra $\mathcal{L}$ (degli insiemi misurabili secondo Lebesgue) ed esiste una misura $\mu: \mathcal{L} \longrightarrow [0, +\infty]$ t.c.:

1. $\mathcal{L}$ contiene tutti gli insiemi aperti e chiusi e le loro unioni e intersezioni (ma $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$)
2. Dati $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è una n-cella $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ allora $\mu(I) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \ldots \cdot |b_n - a_n|$
3. $\forall E \in \mathcal{L}$ $\quad \mu(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) \text{ dove } I_n \text{ sono le n-celle t.c. } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$

4. μ è invariante per traslazioni

5. μ è una misura completa

- <u>Misura completa</u>: Una misura μ si dice completa se nello spazio di misura $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $\forall F \in \mathcal{M}$ per cui $\mu(F)=0$ e $\forall E \subseteq F$ si ha $E \in \mathcal{M}$ $(\mu(E)=0)$

<u>Cap. 2.3.</u>

- <u>Def. Integrale per $f \geq 0$</u>: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. Sia $f: \Omega \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora esiste una successione di funzioni semplici $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $S_n: \Omega \to [0,+\infty]$ t.c. $S_n(x) \nearrow f(x)$ per $n \to +\infty$. Allora si pone:

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega S_n(x)\,d\mu(x) \quad \left(\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \sup\left\{ \int_\Omega S(x)\,d\mu(x),\ S(x) \leq f(x)\ \forall x \in \Omega \right\} \right)$$

- <u>Def. Integrale $f: \Omega \to \mathbb{R}$</u> Se $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Scrivo $f = f^+ - f^-$ dove $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ e $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Allora se:

1. f è misurabile
2. $\int_\Omega |f(x)|\,d\mu(x) < +\infty$

vale che: $$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega f^+(x)\,d\mu(x) - \int_\Omega f^-(x)\,d\mu(x)$$

- <u>Def. Integrale $f: \Omega \to \mathbb{C}$</u>: Se $f: \Omega \to \mathbb{C}$. Se:

1. $Im\{f\}$ e $Re\{f\}$ sono misurabili
2. $\int_\Omega |f(x)|\,d\mu(x) < +\infty$

Allora: $$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = \int_\Omega Re\{f(x)\}\,d\mu(x) + i \int_\Omega Im\{f(x)\}\,d\mu(x)$$

- <u>Proprietà integrale</u>:

  - <u>Linearità</u> Siano $f, g \in L^1(\Omega)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Allora $c_1 f + c_2 g \in L^1(\Omega)$ e $$\int_\Omega (c_1 f(x) + c_2 g(x))\,d\mu(x) = c_1 \int_\Omega f(x)\,d\mu(x) + c_2 \int_\Omega g(x)\,d\mu(x)$$

- Monotonia: Se $g(x) \leq f(x)$ per q.o. $x \in \Omega$. Allora

$$\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) \leq \int_\Omega g(x)\,d\mu(x)$$

Vale poi che: $\left| \int_\Omega f(x)\,d\mu(x) \right| \leq \int_\Omega |f(x)\,d\mu(x)|$

e se $E \subseteq F$ e $f \geq 0$ in Ω mis. Allora $\int_E f(x)\,d\mu(x) \leq \int_F f(x)\,d\mu(x)$
$(E, F \in \mathcal{M})$

- Annullamento:
1. $\mu(E) = 0 \iff \int_E f(x)\,d\mu(x) = 0$
2. $f(x) = 0$ q.o. in Ω $\int_\Omega f(x)\,d\mu(x) = 0$
3. $\int_\Omega |f(x)|\,d\mu(x) \Rightarrow f(x) = 0$ q.o. in Ω

Cap. 2.4

- **Teo. Convergenza dominata:**

Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura μ completa. Sia $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) una succ. di funzioni misurabili e supponiamo $\exists f, g$ t.c.:

1. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ per q.o. $x \in \Omega$ (conv. punt. in Ω)
2. $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall n = 1, 2, \dots$ per q.o. $x \in \Omega$ e $g(x) \in L^1(\Omega)$

Allora $$\int_\Omega f_n(x)\,d\mu(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_\Omega f(x)\,d\mu(x)$$

- Esempi di applicazioni teoriche:

a. Il teo. si usa nella dimostrazione del teo. di Continuità per un integrale dip. da un parametro

b. Il teo. si usa nella dimostrazione del teo. di Derivazione per un integrale dip. da un parametro

• Teo. passaggio al limite per Riemann (Conv. unif + integrabilità)

CONFRONTO

Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, successione di funz. (limitate) e Riemann-integrabili in $[a,b]$, allora se $f_n \to f$ ($f : [a,b] \to \mathbb{R}$) unif. vale che f sarà (limitata) e Riemann-integr. e $\int_a^b f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$.

Cap. 2.5

• Teo. Continuità di un integrale dip. da un parametro

Sia $k : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $\Omega \to \mathbb{R}^n$ mis. t.c.:

1. per ogni $x \in I$ la funz. $y \to k(x,y)$ è integr. in $\Omega \to k(x,\cdot) \in L^1(\Omega)\ \forall x \in I$
2. per q.o. $y \in \Omega$ la funz. $x \to k(x,y)$ è continua in $x_0 \in I \to k(\cdot,y)$ cont. in $x_0 \in I$ per q.o. $y \in \Omega$
3. $\exists g \in L^1(\Omega)$ e $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ t.c. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ per q.o. $y \in \Omega$ sia $|k(x,y)| \le g(y)$

$\Rightarrow u(x) := \int_\Omega k(x,y) d\mu(y)$ è continua in x_0

→ Dimostrazione: Tesi: $\lim_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega K(x_n,y)\, d\mu(y) = \int_\Omega K(x_0,y)\, d\mu(y)$$

↳ Per far valere la tesi devono essere valide le seguenti IPOTESI:

1. $\forall x$ fissato, $k(x,\cdot) \in L^1(\Omega)$ → per far sì che $k(x,y)$ sia integr. in y (parametro: x)
2. Per q.o. $y \in \Omega$, $k(\cdot,y)$ continua in x_0
   ↳ per far valere: $k_n(y) = k(x_n,y) \xrightarrow{n\to+\infty} k(x_0,y) = k(y)$ per q.o. y (A)
3. $\exists g(x) \in L^1(\Omega)$ e $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ t.c. $|K(x_n,y)| = |K_n(y)| \le g(y)$ per q.o. $y \in \Omega$, $\forall n$ (B) $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

⇒ Infatti grazie alle condizioni (A) e (B) si può applicare il teo. della CONVERGENZA DOMINATA in questo modo

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega k_n(y)\, d\mu(y) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega K(x_n,y)\, d\mu(y) = \int_\Omega K(x_0,y)\, d\mu(y)}_{\checkmark} = \int_\Omega k(y)\, d\mu(y)$$

• Teo. Derivazione di integrali dip. da un parametro

Sia $k: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $\Omega \to \mathbb{R}^n$ mis. t.c.:

1. $k(x, \cdot) \in L^1(\Omega) \quad \forall x \in I$
2. per q.o. $y \in \Omega \quad \exists \frac{\partial k}{\partial x}(x,y) \quad \forall x \in I$
3. $\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ e $\exists g \in L^1(\Omega)$ t.c. $\left|\frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per q.o. $y \in \Omega$

$$\Longrightarrow \exists \frac{du(x_0)}{dx} = \int_\Omega \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y)\, d\mu(y)$$

→ Dimostrazione: Tesi: $\exists\, u'(x_0) = \int_\Omega \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y)$

Sappiamo che: $u(x) = \int_\Omega k(x,y)\, d\mu(y)$

E consideriamo il rapporto incrementale: $u'(x_0) = \lim\limits_{\substack{h_n \to 0 \\ \uparrow \\ \text{per } n \to +\infty}} \frac{u(x_0 + h_n) - u(x_0)}{h_n}$

↳ Riscrivendo esplicitamente l'espress. delle $u(x)$:

$$\frac{u(x_0 + h_n) - u(x_0)}{h_n} = \int_\Omega \frac{k(x_0 + h_n, y) - k(x_0, y)}{h_n}\, d\mu(y)$$

→ Voglio applicare il teo. della CONVERGENZA DOMINATA, per farlo devono valere A e B:

A. $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \downarrow \\ h_n \to 0}} \frac{k(x_0 + h_n, y) - k(x_0, y)}{h_n} = \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y)$ → se $\exists \frac{\partial k}{\partial x}$ in x_0 → da Hp. 2

B. $\left|\frac{k(x_0 + h_n, y) - k(x_0, y)}{h_n}\right| \leq g(y) \in L^1(\Omega)$ per q.o. $y \in \Omega \quad \forall n$

↳ infatti per q.o. $y \; \forall n$ posso applicare il Teo. di Lagrange alla funz. $x \mapsto k(x,y)$ su $[x_0, x_0 + h_n]$, quindi varrebbe che:

$\exists\, \delta_n \in (0,1)$ t.c. $\frac{k(x_0 + h_n, y) - k(x_0, y)}{h_n} = \frac{\partial k}{\partial x}(\overbrace{x_0 + \delta_n \cdot h_n}^{\in [x_0, x_0 + h_n]}, y)$ → da Hp. 3 Vale B.

$\Longrightarrow$ Vale quindi il teo.:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ h_n \to 0}} \int_\Omega \frac{k(x_0 + h_n, y) - k(x_0, y)}{h_n}\, d\mu(y) = \int_\Omega \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y)\, d\mu(y) \quad \checkmark$$

- **Esempi di Applicazione teorica**

  a. Continuità → si usa nella dimostrazione che se $f \in L^1 \xrightarrow{\text{trasf. Fourier}} \hat{f} \in C_b^0$

  b. Derivazione → si usa nella dimostrazione di applicabilità della derivazione per la formula della derivata della trasformata di Fourier $\frac{d^h}{d\xi^h}\hat{f}(\xi) = (-2\pi i)^h \mathcal{F}(x^h f)(\xi)$

Cap. 2.6

- **Teo. Fubini-Tonelli:** Sia $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) misurabile.

Allora vale che:

$$\iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Se vale una di queste proprietà:

1. $f(x) \geq 0$
2. Almeno un integrale iterato converge assolutamente
3. Se f cambia segno e so a priori che $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$

- **Esempi di applicazione:**

  a. Si usa nella dim. che $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$

  b. Si usa nella dim. che $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$

  c. Si usa nella dim. che $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

Cap. 2.7

- **Def. convoluzione:** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\left(f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \right)$ si definisce convoluzione tra f e g la funzione $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,dy$ e vale che $(f*g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

- **Proprietà:**
  1. $(f*g) = (g*f)$ (p. commutativa)
  2. $f*(g*h) = (f*g)*h$ (p. associativa)
  3. p. simmetria →

g \ f	pari	disp.
pari	pari	disp.
disp.	disp.	pari

← $f*g$

- Dimostrazione $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$

$$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy\right|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)g(y)|\,dy\,dx = *$$

Scambiando l'ordine di integrazione, che è un'operaz. ammissibile poiché per il teo. di Fubini-Tonelli l'integranda è positiva, poiché in valore assoluto

$$* = \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|\,dx\right)dy \underset{\substack{x-y=z\\dx=dz}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz\right)dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|\,dy}_{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz}_{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$$

$$\Longrightarrow \|f*g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\cdot\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

- Teo. Disuguaglianza di Young: Siano $f,g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p\in[1,+\infty]$. Allora vale che $(f*g)\in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$$

Cap. 2.3

- Spazi L^p: Per $p\in[1,+\infty)$ $L^p(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}$ misurabile $: \int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)<\infty\}$
- Proprietà in base a p:

$d(f,g)=\int_\Omega |f(x)-g(x)|^p d\mu(x)$

- SPAZI VETT. $\forall p\in(0,+\infty)$ → per $p\in(0,1)$ è VETT., METRICO, ma NON NON NORMATO
- SPAZI VETT. NORMATI $\forall p\in[1,+\infty)$ con $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$ COMPLETI (BANACH)

- Teo. Disuguaglianza di Hölder: Siano $p,q\in(1,+\infty)$ t.c. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (p,q = esponenti coniugati)

Se $f\in L^p(\Omega)$ e $g\in L^q(\Omega) \Longrightarrow fg\in L^1(\Omega)$ e vale: $\int_\Omega |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q$

Cap. 2.9

- **Spazi L^p**: Per $p \in [1,+\infty)$ $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile : $\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\}$

- **$L^\infty(\Omega)$**: $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$ mis. : $\overbrace{\exists K>0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq K \text{ per q.o. } x \in \Omega}^{f \text{ ESSENZIALMENTE LIMITATA}}\}$

  ↳ SP. DI BANACH per $\forall p \geq 1$ con norma $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{K>0 : |f(x)| \leq K$ per q.o. $x \in \Omega\}$

- **Teo. Inclusione tra spazi L^p su domini di misura finita**

  Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ sp. di mis. con $\mu(\Omega) < +\infty$. Sia $1 \leq p < r \leq \infty$. Allora: $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^r(\Omega)} \, \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \qquad \forall f \in L^r(\Omega)$$

→ **Dimostrazione**: Sia $f \in L^r(\Omega)$ **Tesi**: $\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) < +\infty$

$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \int_\Omega |f(x)|^p \cdot \underbrace{1 \, d\mu(x)}$$

Applico la disug. di Hölder a $|f|^p$ e a 1

- $|f|^p \in L^{\frac{r}{p}}(\Omega)$ → infatti $\int_\Omega (|f(x)|^p)^{\frac{r}{p}} d\mu(x) < +\infty$ → poiché $f \in L^r(\Omega)$
- $1 \in L^q$ dove $\frac{1}{q} + \frac{p}{r} = 1$

Hölder →
$$\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \int_\Omega |f(x)|^p \cdot 1 \, d\mu(x) \leq \left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^{\frac{r}{p}}\right)^{\frac{p}{r}} \cdot \left(\int_\Omega 1^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_\Omega |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{p}{r}} \cdot \mu(\Omega)^{1-\frac{p}{r}} \qquad \frac{1}{q} = 1 - \frac{p}{r}$$

elevando alla $\frac{1}{p}$ →
$$\underbrace{\left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \leq \underbrace{\left(\int_\Omega |f(x)|^r d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}}_{\|f\|_{L^r(\Omega)}} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$$

↳ Se $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \underbrace{\|f\|_{L^\infty(\Omega)}} \left(\int_\Omega 1 \cdot d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Poiché per def. $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{K>0 : |f(x)| \leq K$ per q.o. $x \in \Omega\}$
quindi posso portar fuori $|f(x)|$ con la norma $\|f\|_{L^\infty}$

- $L^p_{loc}(\mathbb{R})$: $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ (f localmente integr.) se: $\forall (a,b)$ è $f \in L^p(a,b)$

$$f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \iff \forall K \text{ chiuso e limit. } \subseteq \mathbb{R}^n \text{ si ha } f \in L^p(K)$$

- Teo. Inclusione tra spazi $L^p_{loc}(\Omega)$: $1 \leq p < r \leq +\infty \implies L^r_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$\hookrightarrow L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in (1,+\infty)$

Cap. 3.1

• **Operatore lineare**: Siano X, Y due sp. vett. normati sul campo $K (= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Una funz. $T: X \to Y$ si dice operatore lineare se:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall x, y \in X, \ \forall \lambda, \mu \in K$$

• **Teo. 3 condiz. fond. op. lin.**: Siano X, Y 2 sp. vett. normati e $T: X \to Y$ un op. lin. Sono equiv le 3 condiz:

T vista come funz. tra spazi metrici

1. T è CONTINUA in $\emptyset$
2. T è CONTINUA in ogni punto
3. $\exists k > 0$ t.c. $\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X \ \forall x \in X$ o anche $\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$

• **Op. lin. continuo**: Un op. lin. $T: X \to Y$ tra 2 spazi vett. normati X, Y si dice continuo se vale una delle 3 condiz. equivalenti espresse dal teo. prec. In tal caso si definisce norma dell'operatore il numero:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

• **Esempi**

– **Operatori continui tra spazi di funz.**

a **Eq. lin del 2° ordine**: $L: C^2[\alpha, \beta] \longrightarrow C^0[\alpha, \beta]$

$Lu(x) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)$

→ È lineare

→ e si verifica che $\|Lu\|_{C^0} \leq k \|u\|_{C^2}$

↳ continuo

b **Operatori di convoluzione** $T: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$T: f \longrightarrow k * f$

→ È lineare

→ per dis. Young $\|Tf\|_{L^p} \leq \|k\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$

↳ continuo

c) Operatori di moltiplicazione: $T: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$T: f \longrightarrow af$

→ È lineare

→ $\|Tf\|_{L^p} \leq \|a\|_\infty \|f\|_{L^p}$ → continuo

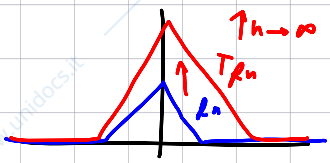
- Operatore lineare NON continuo

$T: C_0^\circ(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0^\circ(\mathbb{R})$

$T: f_n \longrightarrow x f_n$

→ È lineare

→ Si possono costruire dei controes. tali che $k \to \infty$ in $\|Tf\|_{C^\circ} \leq k \|f\|_{C^\circ}$



Cap. 3.2

- Funzionale lineare: Sia X uno sp. vett. normato sul campo $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Una funz. $T: X \to \mathbb{K}$ si dice funzionale lineare se:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \qquad \forall x,y \in X, \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$$

- Teo. 3 condiz. fond. funz. lin.: Sia X uno sp. vett. normato e $T: X \to \mathbb{R}$ un funz. lin. Sono equiv. le 3 condiz.:

T vista come funz. tra 2 spazi metrici

1. T è CONTINUA in $\emptyset$
2. T è CONTINUA in ogni punto
3. $\exists k > 0$ t.c. $|T(x)| \leq k \|x\|_X \ \forall x \in X$ o anche $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \dfrac{|T(x)|}{\|x\|_X} < +\infty$

- Funz. lin. continuo: Un funz. lin. $T: X \to \mathbb{R}$ (cioè un op. lin da X al campo degli scalari di X) si dice continuo se vale una delle 3 condiz. equivalenti espresse dal teo. prec. In tal caso si definisce norma del funzionale il numero:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|T(x)|}{\|x\|_X}$$

• Duale $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$: $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ = duale di X → spazio di Banach x chi $Y=\mathbb{R}$ è completo
$\quad \| \; X'$ → Duale di uno sp. vett. norm. = sp. di tutti i funz. lin. cont. su X

• Esempi:

– Funzionali lineari continui:

a Funzionali di valutazione: $T: C^0[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in [a,b]$
→ lineare $\quad T: f \longrightarrow f(x_0)$
→ $|Tf| = |f(x_0)| \leq \|f\|_{C^0}$ → continuo

b Funzionale di valutazione della derivata: $T: C^1[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in [a,b]$
→ lineare $\quad T: f \longrightarrow f'(x_0)$
→ $|Tf| = |f'(x_0)| \leq \|f\|_{C^1}$ → continuo

c Funzionale come integrale definito $T: C^0[a,b] \to \mathbb{R}$
→ lineare $\quad T: f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$
→ $|Tf| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)\|f\|_{C^0}$ → continuo

– Funzionale lineare NON continuo: $T: C_0^0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
→ lineare $\quad T: f \longrightarrow f(0)$
→ posso creare degli esempi di funz. che in 0 tendono all'∞ $\Rightarrow |Tf| = |f(0)| \to \infty$ → NON continuo

– Caratterizzazione dello spazio duale

Per il teorema di rappresentazione di Riesz vale che per esponenti coniugati p,q t.c. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=0$ per $p \in [1,+\infty)$

lo spazio duale $\mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R}) \cong L^q(\Omega)$ $\to (L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega) = L^q(\Omega)$

↳ es. $\mathcal{L}(L^2(\Omega),\mathbb{R}) = L^2(\Omega)$ $\to (L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$

Cap. 4.1

- **Def. Spazio vett. con prodotto scalare:** Sia V uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$). Diciamo che V è uno sp. vett. con prodotto scalare se, oltre alle 2 op. di sp. vett, è definita una terza operazione "PRODOTTO SCALARE": $(\vec{u},\vec{v}): V\times V \longrightarrow \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ t.c.:

  1. $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$ e $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y} \in V$ $\quad (\lambda \underline{x}_1 + \mu \underline{x}_2, \underline{y}) = \lambda(\underline{x}_1, \underline{y}) + \mu(\underline{x}_2, \underline{y})$ (p. linearità su 1° componente)
  2. a. Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
        - $(\underline{x},\underline{y}) = (\underline{y},\underline{x}) \quad \forall \underline{x},\underline{y} \in V$ (p. commutativa)
        - $(\underline{x}, \lambda \underline{y}_1 + \mu \underline{y}_2) = \lambda(\underline{x},\underline{y}_1) + \mu(\underline{x},\underline{y}_2) \quad \forall \underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in V \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ (p. bilinearità)

     b. Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
        - $(\underline{x},\underline{y}) = \overline{(\underline{y},\underline{x})} \quad \forall \underline{x},\underline{y} \in V$
        - $(\underline{x}, \lambda \underline{y}_1 + \mu \underline{y}_2) = \bar{\lambda}(\underline{x},\underline{y}_1) + \bar{\mu}(\underline{x},\underline{y}_2) \quad \forall \underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2 \in V \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}$ (p. sesquilinearità)
  3. $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in V$ e $(\underline{x},\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = 0$ (p. positività)

- **Proprietà Spazi pre-Hilbertiani:** Sia V uno sp. pre-Hilbertiano su $\mathbb{K}$ e siano $\underline{x},\underline{y} \in V$

  Allora vale:
  1. $|(\underline{x},\underline{y})| \leq \sqrt{(\underline{x},\underline{x})}\sqrt{(\underline{y},\underline{y})}$ Dis. Cauchy-Schwartz
  2. $\|\underline{x}\| = \sqrt{(\underline{x},\underline{x})}$ → NORMA DEL PRODOTTO SCALARE

     Cauchy-Schwartz
     $|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$
  3. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ Uguaglianza del parallelogramma

- **Def. Spazio pre-Hilbertiano.** Uno Spazio pre-Hilbertiano è uno sp. vett. normato la cui norma proviene da un prodotto scalare

- **Esempi**

  1. **Sp. pre-Hilbertiani:**

     a. $C^0[a,b]$ con norma proveniente da $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

     b. $L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con norma proveniente da $(f,g) = \int_\Omega f(x)\,g(x)\,d\mu(x)$

2. **Sp. non pre-Hilbertiani:**

Gli spazi $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $p \in [1, +\infty]$ e $p \neq 2$ non sono pre-Hilbert. poiché si dimostra che non rispettano l'uguaglianza del parallelogramma

- **Def. Spazi di Hilbert:** Uno sp. di Hilbert è uno sp. Pre-Hilbert. completo, quindi è uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare.

- **Esempi:**

1. **Spazi di Hilbert:**

$L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con norma $\|f\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(f,f)}$

e sappiamo che L^2 è di Banach

2. **Spazi NON di Hilbert**

a. $C^0[a,b]$ è pre-Hilbertiano, ma non è completo con la norma $\|\cdot\|_{L^2}$
$\Rightarrow$ NON è di Hilbert

b. $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $p \neq 2$ non è pre-Hilbert. $\Rightarrow$ NON è di Hilbert

Teo. Continuità della norma e del prodotto scalare

Sia V uno sp. pre-Hilbert.

Allora il prod. scalare è continuo. Cioè: se ho 2 succ. $\{x_n\}, \{y_n\} \subset V$ t.c.

$x_n \xrightarrow{V} x$, $y_n \xrightarrow{V} y$ $\quad x, y \in V$ (Vettori) $\Rightarrow$
1. $\|x_n\| \to \|x\|$ CONTINUITÀ NORMA
2. $(x_n, y_n) \to (x, y)$ CONTINUITÀ PROD. SCALARE

$\|x_n - x\|_V \to 0 \quad \|y_n - y\|_V \to 0$

- **Dimostrazione**

1. Tesi: $\|x_n\| \to \|x\|$

In ogni sp. vett. norm. vale la disug. triangolare: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\to \|x\| = \|(x-y) + y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \to \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$ scambiando x e y vale ancora:

$\hookrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| \Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

→ Considerando x_n e x → $\left| \|x_n\| - \|x\| \right| \leqslant \|x_n - x\| \xrightarrow{Hp.} 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ ✓

2. Tesi: $|(x_n, y_n) - (x,y)| \longrightarrow 0$ per $n \longrightarrow \infty$

applico Cauchy-Schwartz alla norma scalare

$$|(x_n, y_n) - (x,y)| \overset{\text{bilinearità prod. scal.}}{=} |(x_n - x, y_n) + (x_n, y_n - y)| \leqslant |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\|x_n - x\|}_{Hp \to 0} \underbrace{\|y_n\|}_{\to \|y\|} + \|x\| \underbrace{\|y_n - y\|}_{Hp \to 0} \longrightarrow 0 \cdot (\|y\| + \|x\|) \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow |(x_n, y_n) - (x,y)| \longrightarrow 0 \Rightarrow (x_n, y_n) \longrightarrow (x,y) \ ✓$$

Cap. 4.2

• **Teo.** Teorema di Pitagora 1° versione

Sia V pre-Hilbert. e siano $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vettori a 2 a 2 ortog. Allora: $\left\| \sum_{J=1}^{n} x_J \right\|^2 = \sum_{J}^{n} \|x_J\|^2$

→ Dimostrazione:

Per def. di norma + bilinearità del prodotto scalare:

$$\left\| \sum_{J=1}^{n} x_J \right\|^2 = \left(\sum_{J=1}^{n} x_J, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \sum_{i,J=1}^{n} (x_i, x_J) = \sum_{J=1}^{n} (x_J, x_J) = \sum_{J=1}^{n} \|x_J\|^2$$

Vettori a 2 a 2 ortog.
⇓
$(x_i, x_J) = 0$ per $i \neq J$

• **Teo.** Teorema di Pitagora 2° versione

Se $\{x_J\}_{J=1}^{\infty}$ è una succ. di elementi di uno sp. di Hilbert H a 2 a 2 ortogonali e t.c. la serie numerica $\sum_{J=1}^{\infty} \|x_J\|^2$ converge, allora la serie $\sum_{J=1}^{\infty} x_J$ converge in H e vale la:

$$\left\| \sum_{J=1}^{\infty} x_J \right\|^2 = \sum_{J=1}^{\infty} \|x_J\|^2$$

→ Dimostrazione:

Poichè la serie numerica $\sum_{J=1} \|x_J\|^2$ converge, le sue somme parziali:

$S_n = \sum_{J=1}^{n} \|x_J\|^2$ e $S_m = \sum_{J=1}^{m} \|x_J\|^2$ $\quad m > n > 0$ → sono di Cauchy

$\hookrightarrow S_m - S_n = \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\|^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$

Applicando il Teo. di Pitagora 1° Vers. a tutte le somme parz. della serie:

$$\underbrace{\left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_j \right\|^2}_{} = \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\|^2$$

$\hookrightarrow$ le somme parz. di $\sum_{j=1}^{n} x_j$ sono allora una succ. di Cauchy in H

$\hookrightarrow$ H completo $\Longrightarrow$ la serie converge in H

$\hookrightarrow$ Esiste $x \in H$ t.c. $\sum_{j=1}^{n} x_j \to x$ $\xrightarrow{\text{x il teo. della continuità della norma del prod. scal. rispetto alla converg. in norma}}$ $\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 \longrightarrow \|x\|^2$

$\hookrightarrow$ Per il teo di Pitagora 1° vers.: $\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \longrightarrow \|x\|^2$

$\hookrightarrow$ Sappiamo per ipotesi che $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ converge e per def. di serie convergente $\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$

Poiché i limiti $\|x\|^2$ sono uguali: per $n \to \infty$:

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\|^2$$

Cap. 4.3

- **Def. Spazi di Hilbert:** Uno sp. di Hilbert è uno sp. Pre-Hilbert. completo, quindi è uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare.

- **Def. Sistema ortonormale finito**

Sia H uno sp. di Hilbert e sia $\{e_n\}_{n=1}^{n}$ finito $\subseteq H$ t.c.:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Allora $\{e_n\}_{n=1}^{n}$ si dice sistema ortonormale finito

• Teorema della proiezione su un sottosp. finito di uno sp. di Hilbert

Sia H uno spazio di Hilbert. V_n un suo sottospazio vettoriale finito dimensionale, dotato della base ortonormale $\{e_j\}_{j=1}^n$

$\Rightarrow$ Allora per ogni $x \in H$ $\exists! \ \bar{v} \in V_n$:

1. $\|\bar{v} - x\| \leq \|v - x\| \longrightarrow \bar{v}$ elemento di V di minima distanza da x
2. $(x - \bar{v}) \perp V_n$
3. $\bar{v} = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \longrightarrow \bar{v}$ = proiezione di x su V_n
4. $\|\bar{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$

$\longrightarrow$ Dimostrazione:

2. Tesi: $(x - \bar{v}) \perp V_n \longrightarrow$ è suff. dimostrare che $(x - \bar{v}) \perp e_k \ \forall k$ → per linearità prod. scal. sarà $\perp$ ad ogni comb. lin. degli e_k (quindi ogni el. di V_n)

$$(x - \bar{v}, e_k) = \left(x - \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j, e_k\right) = (x, e_k) - \sum_{j=1}^n (x, e_j)(e_j, e_k) = (x, e_k) - \sum_{j=1}^n (x, e_j)\, \delta_{jk}$$

δ_{jk}: $= 0$ se $j \neq k$; $\boxed{= 1 \text{ se } j = k}$

$j = k$

$\hookrightarrow (x, e_k) - (x, e_k) = 0 \Rightarrow (x - \bar{v}, e_k) = 0 \Rightarrow (x - \bar{v}) \perp e_k$ ✓

4. Per il teo. di Pitagora 1°vers. e la def. di $\bar{v}$: $\|\bar{v}\|^2 = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 \underbrace{\|e_j\|^2}_{=1} = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2$

$\hookrightarrow$ Consideriamo $x = (x - \bar{v}) + \bar{v} \xrightarrow[\text{teo. Pitagora}]{\text{ortog. +}} \|x\|^2 = \|x - \bar{v}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 \geq \|\bar{v}\|^2 \longrightarrow \|x\|^2 \geq \|\bar{v}\|^2$ ✓

1. Proviamo che $\bar{v}$ minimizza la dist. di x da V_n

$$\|x - v\|^2 = \|\underbrace{(x - \bar{v})}_{\perp V_n} + \underbrace{(\bar{v} - v)}_{\in V_n}\|^2 \xrightarrow{+\text{ Pitagora}} = \|x - \bar{v}\|^2 + \|\bar{v} - v\|^2 \geq \|x - \bar{v}\|^2 \Longrightarrow \|x - \bar{v}\| = \min_{v \in V_n} \|x - v\|$$ ✓

3* Proviamo l'unicità di $\bar{v} = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i \rightarrow$ Supponiamo ci siano due v_1 e v_2 che min. la dist. di x da V_n:

$\hookrightarrow \|v_i - x\| = d = \min_{v \in V_n} \|x - v\|$ per $i = 1, 2$ e Usando la disug. del parallelogramma:

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \|(v_1 - x) + (x - v_2)\|^2 = -\|(v_1 - x) - (x - v_2)\|^2 + 2(\|v_1 - x\|^2 + \|x - v_2\|^2) = -4\left\|\underbrace{\frac{v_1 + v_2}{2}}_{\in V_n} - x\right\|^2 + 2(d^2 + d^2)$$

$\hookrightarrow$ per def. di min. dist.: $\left\|\frac{v_1 + v_2}{2} - x\right\| \geq d$

$\hookrightarrow \|v_1 - v_2\|^2 = -4\left\|\frac{v_1 + v_2}{2} - x\right\|^2 + 2(d^2 + d^2) \leq -4d^2 + 4d^2 = 0 \Rightarrow \|v_1 - v_2\|^2 = 0 \xLeftrightarrow[\text{annullamento}]{\text{proprietà}} v_1 = v_2$ unic. $\bar{v}$ ✓

Cap. 4.4

- **Def. Spazi di Hilbert:** V uno sp. di Hilbert è uno sp. Pre-Hilbert completo, quindi è uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare.

- **Def. Sistema ortonormale finito**

  Sia H uno sp. di Hilbert e sia $\{e_n\}_{n=1}^{n} \subseteq H$ t.c.: finito

$$(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

  Allora $\{e_n\}_{n=1}^{n}$ si dice sistema ortonormale finito

- **Teorema della proiezione su un sottosp. finito di uno sp. di Hilbert**

  Sia H uno spazio di Hilbert. V_n un suo sottospazio vettoriale finito dimensionale, dotato della base ortonormale $\{\underline{e_j}\}_{j=1}^{n}$

  $\Rightarrow$ Allora per ogni $\underline{x} \in H$ $\exists!$ $\underline{\overline{v}} \in V_n$:

  1. $\|\underline{\overline{v}} - \underline{x}\| \leq \|\underline{v} - \underline{x}\|$ $\longrightarrow$ $\underline{\overline{v}}$ elemento di V di minima distanza da $\underline{x}$
  2. $(x - \underline{\overline{v}}) \perp V_n$
  3. $\underline{\overline{v}} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}, \underline{e_i}) e_i$ $\longrightarrow$ $\underline{\overline{v}}$ = proiezione di $\underline{x}$ su V_n
  4. $\|\underline{\overline{v}}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(\underline{x}, \underline{e_i})|^2 \leq \|\underline{x}\|^2$

- **Def. Sistema ortonormale numerabilmente infinito**

  Sia H uno sp. di Hilbert e sia $\{\underline{e_n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ t.c.:

$$(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

  Allora $\{\underline{e_n}\}_{n=1}^{\infty}$ si dice sistema ortonormale numerabile

- **Def. Serie di Fourier**

  Dato uno sp. di Hilbert H e un s.o.n. $\{\underline{e_n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\forall \underline{f} \in H$ posso considerare la serie di Fourier rispetto al s.o.n. considerato

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\underline{f}, \underline{e_j}) \underline{e_j}$$

  e questa serie converge in H a un certo elemento $\underline{\overline{f}}$ per cui vale $\sum_{j=1}^{\infty} |(\underline{f}, \underline{e_j})|^2 = \|\underline{\overline{f}}\|^2 \leq \|\underline{f}\|^2$ dis. Bessel

- **Teo. Disuguaglianza di Bessel**

Se $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ è un s.o.n. (sist. ortonormale) in uno sp. di Hilbert H, per ogni $\underline{x} \in H$ vale la disug. (di Bessel):

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(\underline{x}, e_j)|^2 \leq \|\underline{x}\|^2$$

→ la serie converge a un certo $\overline{\underline{x}}$

e vale:

$$\left\|x - \sum_{j=1}^{n} (\underline{x}, e_j) e_j\right\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(\underline{x}, e_j)|^2$$

→ **Dimostrazione:**

Applichiamo il teo. della proiezione al sottosp. V_n generato dai primi n vettori $\{e_j\}_{j=1}^{n}$:

proiez. di $\underline{x} \in H$ su V_n

$$\|\overline{v}\|^2 = \|P_{V_n} \underline{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(\underline{x}, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(\underline{x}, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \quad ✓$$

somme parziali a termini positivi superiormente limitate ⟹ la serie di Fourier $\sum_{j=1}^{\infty} (\underline{x}, e_j) e_j$ converge a un certo $\overline{\underline{x}}$

↳ Scomponiamo:

$$\underline{x} = \underbrace{\overline{v}}_{\in V_n} + \underbrace{(\underline{x} - \overline{v})}_{\perp V_n} \implies \overline{v} \perp (\underline{x} - \overline{v})$$

↳ Per l'ortogonalità possiamo applicare il teo. di Pitagora 1° vers.:

$$\|\underline{x}\|^2 = \|\overline{v}\|^2 + \|\underline{x} - \overline{v}\|^2$$

↳ Sostituendo $\overline{v}$ con la sua espressione e riordinando i termini:

$$\left\|\underline{x} - \sum_{j=1}^{n} (\underline{x}, e_j) e_j\right\|^2 = \|\underline{x} - \overline{v}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - \|\overline{v}\|^2 = \|\underline{x}\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |(\underline{x}, e_j)|^2 \quad ✓$$

Cap. 4.5

- **Def. Spazi di Hilbert:** Uno sp. di Hilbert è uno sp. Pre-Hilbert completo, quindi è uno sp. di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare.

- **Def. Sistema ortonormale:**

Sia H uno sp. di Hilbert, sia $\{e_n\}_{n=1}^{h}$ o num. inf. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ t.c.:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Allora $\{e_n\}_{n=1}^{n \text{ o } \infty}$ si dice sistema ortonormale.

- **Def. Sistema ortonormale completo:**

Sia H uno sp. di Hilbert. Allora $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ è un s.o.n.c. se:

1. è un s.o.n.
2. $\forall \underline{x} \in H$ $(\underline{x}, \underline{e}_J) = 0$ $\forall J$, allora $\underline{x} = 0$

- **Teo. Serie e trasformata di Fourier in spazi di Hilbert**

Sia H uno sp. di Hilbert e sia $\{\underline{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ un s.o.n.c. $\forall \underline{x} \in H$ poniamo $\hat{x}_n := (\underline{x}, \underline{e}_n)$ ← coeff. di Fourier n-esimo

chiamiamo $\mathcal{F}(\underline{x}) = \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Allora:

1. $\mathcal{F}: \underline{x} \longmapsto \{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ è un op. lin. da H a ℓ^2 → $\mathcal{F}$ lineare
2. $\mathcal{F}$ è iniettivo e suriettivo
3. $\mathcal{F}$ è un'isometria di sp. di Hilbert, cioè conserva la norma e il prod. scal. cioè:

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in H \quad (\underline{x}, \underline{y})_H = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \bar{\hat{y}}_n \longleftarrow \text{prod. scal. in } \ell^2$$

$$\|\underline{x}\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2 \Rightarrow \hat{x}_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \underline{e}_n = \underline{x}$ cioè la serie di Fourier di $\underline{x}$ converge proprio a $\underline{x}$

→ $\mathcal{F}$ = trasformata di Fourier sullo sp. di Hilbert H.

→ **Dimostrazione:**

1. $\mathcal{F}$ è evidentemente lineare, per la disug. di Bessel $\sum_{J=1}^{\infty} |\hat{x}_J|^2 \le \|x\|^2$ e $\{\hat{x}_J\}_{J=1}^{\infty} \in \ell^2$

2a. Tesi: $\mathcal{F}$ suriettiva.

Data una succ. $\{c_J\}_{J=1}^{\infty} \in \ell^2$ $\xrightarrow{\text{cioè}}$ $\sum_{J=1}^{\infty} |c_J|^2 < \infty$, per il Teo. di Pitagora (2° vers.) la serie $\sum_{J=1}^{\infty} c_J \underline{e}_J$ converge in H ad un certo $\underline{x}$:

$$\hat{x}_J = (\underline{x}, \underline{e}_J) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k \underline{e}_k, \underline{e}_J\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \underbrace{(\underline{e}_k, \underline{e}_J)}_{\substack{\text{per } J \neq k \; = 0 \\ \text{per } J = k \; = 1}} \overset{k=J}{=} c_J$$

← elemento di $\{c_J\}_{J=1}^{\infty}$

↑ x linearità e continuità del prod. scal.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\underline{x}) = c_J$ → abbiamo costruito un $\underline{x} \in H$ t.c. $\{\hat{x}_n\}_{J=1}^{\infty} = \{c_J\}_{J=1}^{\infty}$ ⇒ $\mathcal{F}$ SURIETTIVA ✓

2b. Tesi: $\mathcal{F}$ iniettiva

L'iniettività segue dal fatto che ho un s.o.n. $\{e_J\}_{J=1}^{\infty}$ COMPLETO ⇒ se $\hat{x}_J = 0$ $\forall J$ → $\hat{x}_J = (\underline{x}, \underline{e}_J) = 0$ $\forall J$ ⇒ $\underline{x} = 0$

→ $\mathcal{F}(\underline{x}) = 0$ ⇒ $\underline{x} = 0$ → $\mathcal{F}$ INIETTIVA ✓

4 • **Tesi:** la serie di Fourier di $\underline{x}$ converge proprio a $\underline{x}$

Per la completezza del sistema e per la linearità e continuità del prod. scal.:

$$\left(\underline{x} - \sum_{k=1}^{\infty}(\underline{x}, e_k)e_k \,,\, e_J\right) = (\underline{x}, e_J) - \sum_{k=1}^{\infty}(\underline{x}, e_k)(e_k, e_J) = \hat{x}_J - \sum_{k=1}^{\infty}\hat{x}_k \underbrace{(e_k, e_J)}_{\substack{k\neq J \,=0 \\ k=J \,=1}} = \hat{x}_J - \hat{x}_J = 0$$

$$\Rightarrow \left(\underline{x} - \sum_{k=1}^{\infty}(\underline{x}, e_k)e_k \,,\, e_J\right) = 0 \xRightarrow{\text{completezza}} \underline{x} - \sum_{k=1}^{\infty}(\underline{x}, e_k)e_k$$

$$\Downarrow$$

convergenza della serie di Fourier di $\underline{x}$ a $\underline{x}$ $\longleftarrow$ $\underline{x} = \sum_{k=1}^{\infty}(\underline{x}, e_k)e_k$ ✓

3 • **Tesi A:** $\forall \underline{x}, \underline{y} \in H \quad (\underline{x}, \underline{y})_H = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n \overline{\hat{y}_n}$

→ Dalla bilinearità e continuità del prod. scal.:

$$(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k e_k \,,\, \sum_{J=1}^{\infty} \hat{y}_J e_J\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{J=1}^{\infty} \hat{x}_k \overline{\hat{y}_J} \underbrace{(e_k, e_J)}_{\substack{k\neq J \,=0 \\ k=J \,=1}} = \sum_{J=1}^{\infty} \hat{x}_J \overline{\hat{y}_J} \quad ✓$$

• **Tesi B:** $\|\underline{x}\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}_n|^2$

Si dimostra come il caso A ma considerando $\underline{y} = \underline{x}$ ✓

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ è un'isometria di sp. di Hilbert, cioè conserva la norma e il prod. scal. ✓

Cap. 4.6

• **Polinomi di Legendre:**

Ortonormalizzo $1, x, x^2$ in $L^2(-1,1)$

↳ Utilizzo l'algoritmo di Gram-Schmidt:

1. $e_0 = \text{Vers}(1) = \dfrac{1}{\|1\|_{L^2(-1,1)}}$

↳ $\|1\|_{L^2} = \int_{-1}^{1} 1^2 dx = 2 \Longrightarrow e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2. $e_1 = \text{vers}(x - (x, e_0)e_0)$

↳ $(x, e_0) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0 \longrightarrow e_1 = \text{vers}(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$

↳ $\|x\|_{L^2} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \Longrightarrow e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$

3 $\underline{e}_2 = \text{vers}\left(x^2 - (x^2, \underline{e}_1)\underline{e}_1 - (x^2, \underline{e}_0)\underline{e}_0\right)$

$\hookrightarrow (x^2, \underline{e}_1) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x^3\, dx = 0$

$\hookrightarrow (x^2, \underline{e}_0) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}}\, dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \underline{e}_2 = \text{vers}\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|}$

$\hookrightarrow \|x^2 - \frac{1}{3}\|^2 = \int_{-1}^{1} x^4 dx - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{9}\cdot dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \Longrightarrow \underline{e}_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$

Cap. 4.7

• Polinomi di Hermite:

Ortonormalizzo $1, x, x^2$ in $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$

$\hookrightarrow$ Consideriamo: $I_k = \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x^2} dx$ con $k = 0, 1, 2, \dots$

$\rightarrow$ se k disp.

$\underbrace{x^k}_{\text{disp}}\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{pari}}$ = dispari $\rightarrow$ su intervallo simm. $I_k = 0$

$\rightarrow$ Consideriamo quindi k pari e calcoliamo nel nostro caso solo I_0, I_2, I_4

$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$\hookrightarrow$ Osserviamo poi per k pari $\quad I_k = \int_{\mathbb{R}} \overbrace{(-2x e^{-x^2})}^{f'} \overbrace{\left(-\frac{x^{k-1}}{2}\right)}^{g} dx = \cancel{-e^{-x^2}\frac{x^{k-1}}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}} + \overbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\frac{(k-1)}{2} x^{k-2} dx}^{I_{k-2}}$

$\Longrightarrow I_k = \frac{(k-1)}{2} I_{k-2}$

$\hookrightarrow \begin{cases} I_0 = \sqrt{\pi} \\ I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ I_4 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \end{cases}$

1 $\underline{e}_0 = \text{vers}(1) = \frac{1}{\|1\|}$

$\|1\|^2 = \int_{\mathbb{R}} 1^2 e^{-x^2} dx = I_0 = \sqrt{\pi} \Longrightarrow \underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$

2 $\underline{e}_1 = (x - (x, \underline{e}_0)\underline{e}_0)$

$\hookrightarrow (x, \underline{e}_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt[4]{\pi}} dx = 0 \longrightarrow \underline{e}_1 = \text{vers}(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$\hookrightarrow \|x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx = I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow e_1 = \frac{\sqrt{2}\, x}{\sqrt[4]{\pi}}$

3 $\quad e_2 = \text{vers}\left(x^2 - (x^2, e_1)e_1 - (x^2, e_0)e_0\right)$

$\hookrightarrow (x^2, e_1) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} x^3 dx = 0$

$\hookrightarrow (x^2, e_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2} dx = \frac{I_2}{\sqrt[4]{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rightarrow (x^2, e_0)e_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{\sqrt[4]{\pi}}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt[4]{\pi}}} = \frac{1}{2}$

$\longrightarrow e_2 = \text{vers}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{\|x^2 - \frac{1}{2}\|}$

$\hookrightarrow \|x^2 - \frac{1}{2}\|^2 = \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-x^2} dx - \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = I_4 - I_2 + \frac{I_0}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\Rightarrow e_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$