Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Prima prova in itinere. Aprile 2018

A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

B. (6 punti). Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_\Omega f(x, y)\, dy,$$

e **si dimostri** il teorema di derivazione. Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

C. (6 punti). Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso e si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

D. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare e **dimostrare** (nel caso unidimensionale) le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier. Quindi mostrare come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

a. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

b. Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$

c. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^3(\mathbb{R})$

d. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$

e. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

2. (4 punti). Siano

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2};\, g(x) = \chi_{(-1,1)}(x).$$

a. Prima di eseguire calcoli, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, o a $L^2(\mathbb{R})$, se è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua (dimostrando l'affermazione fatta).

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ e semplificare l'espressione ottenuta.

3. (6 punti).

Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata. In particolare, scrivere esplicitamente, in forma semplificata, $\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$ e $\left|\widehat{f}(\xi)\right|$.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Aprile 2018
A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme, commentandone la differenza. Enunciare quindi (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f. Mostrare quindi con esempi che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

B. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si mostri poi come si applica questo teorema nella **dimostrazione** del teorema sulla convoluzione di funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Dare quindi la definizione di sistema ortonormale (s.o.n.) numerabile e di serie di Fourier, in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n. numerabile. **Mostrare** come dal teorema della proiezione seguono la disuguaglianza di Bessel e la convergenza delle serie di Fourier (a un elemento dello spazio). Infine, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert e enunciare con precisione il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n.c.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione. **Dimostrare** quindi due delle precedenti proprietà (per le formule delle derivate, è richiesto solo il caso di derivata prima e funzioni di una variabile).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

a. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$

b. Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

c. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $g \in L^3(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

d. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^2(\mathbb{R})$

e. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$

2. (4 punti). Siano

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}; g(x) = \chi_{(-1,1)}(x).$$

a. Prima di eseguire calcoli, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, o a $L^2(\mathbb{R})$, se è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua (dimostrando l'affermazione fatta).

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ e semplificare l'espressione ottenuta.

3. (6 punti).

Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata. In particolare, scrivere esplicitamente, in forma semplificata, $\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$ e $\left|\widehat{f}(\xi)\right|$.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Prima prova in itinere. Aprile 2018

A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti

Svolgimento Tema A

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1

B. (6 punti). Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy,$$

e **si dimostri** il teorema di derivazione. Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

Risposta: v. libro di testo, §2.3.4 (e 7.1.1, ad esempio, per l'applicazione alla continuità e alla derivata della trasformata di Fourier).

C. (6 punti). Si dia la definizione di funzionale lineare continuo su uno spazio vettoriale normato, norma di un funzionale lineare continuo, spazio duale di uno spazio vettoriale normato. Si faccia qualche esempio di funzionale lineare continuo sugli spazi di funzioni incontrati nel corso e si faccia un esempio incontrato nel corso di caratterizzazione dello spazio duale di un certo spazio vettoriale normato.

Risposta: v. libro di testo, §3.2

D. (6 punti). Dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida, enunciare e dimostrare (nel caso unidimensionale) le proprietà di questo spazio rilevanti dal punto di vista della teoria della trasformata di Fourier. Quindi mostrare come, sfruttando queste proprietà, è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Risposta: v. libro di testo, §7.4.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

a. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

b. Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$

c. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g \in L^3(\mathbb{R})$

d. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$

e. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

a. Vero. Poiché $f \in C_0^0(\mathbb{R})$,

$$|f \cdot g(x)| \leq \|f\|_{C^0} |g(x)|.$$

Poiché $f \cdot g$ è nulla fuori da un certo intervallo $[a,b]$, e $L^2[a,b] \subset L^1[a,b]$ (inclusione tra spazi L^p su insiemi di misura finita), $fg \in L^1(\mathbb{R})$.

b. Falso. Poiché $f \in C^0(\mathbb{R})$, su un intervallo $[a,b]$ fissato si ha

$$|f \cdot g(x)| \leq \|f\|_{C^0[a,b]} |g(x)|.$$

Tuttavia il fatto che $g \in L^1[a,b]$ non implica che $g \in L^2[a,b]$, quindi fg può non appartenere a $L^2[a,b]$. Ad esempio,

$$f(x) = 1 \in C^0(\mathbb{R}), g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ ma}$$
$$fg(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \notin L^2_{loc}(\mathbb{R}).$$

c. Vero. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $f \in L^3(\mathbb{R})$ dunque se $g \in L^1(\mathbb{R})$, per il teorema di Young $f * g \in L^3(\mathbb{R})$.

d. Vero. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f} \in C_*^0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, dunque se $g \in L^2(\mathbb{R})$ è anche $\widehat{f} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$.

e. Vero. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e se $g \in L^2(\mathbb{R})$, per la disuguaglianza di Hölder $\widehat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

2. (4 punti). Siano

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}; g(x) = \chi_{(-1,1)}(x).$$

a. Prima di eseguire calcoli, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, o a $L^2(\mathbb{R})$, se è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua (dimostrando l'affermazione fatta).

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ e semplificare l'espressione ottenuta.

a. $f \in L^2(\mathbb{R})$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R})$; $g \in L^1(\mathbb{R})$ quindi per il teorema di Young, $f * g \in L^2(\mathbb{R})$. Poiché f è dispari e g è pari, sarà $f * g$ dispari. Poiché

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x-y}{1+(x-y)^2} dy,$$

l'integranda è continua rispetto a x e

$$\left|\frac{x-y}{1+(x-y)^2}\right| \leq |x-y| \leq |x|+1 \leq c$$

per ogni x variabile in un intorno fissato di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi fissato, e la costante c è una funzione integrabile (rispetto a y) in $(-1,1)$, la convoluzione è continua.

b.

$$(f*g)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x-y}{1+(x-y)^2} dy = \left[-\frac{1}{2}\log\left(1+(x-y)^2\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+(x-1)^2}{1+(x+1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right).$$

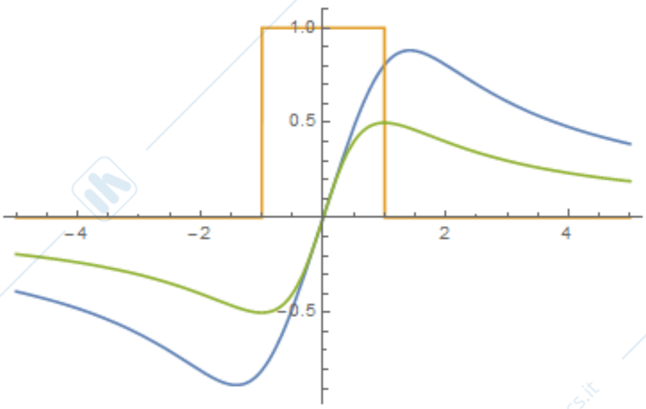


Grafico di f, g e $f*g$.

3. (6 punti).
Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata. In particolare, scrivere esplicitamente, in forma semplificata, $\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$ e $\left|\widehat{f}(\xi)\right|$.

a. $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, quindi sarà $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ma probabilmente $\widehat{f} \notin C^0_*(\mathbb{R})$; f è reale non simmetrica, $\widehat{f}$ non sarà né reale né immaginaria pura, e senza simmetrie; f è infinitamente derivabile, quindi $\widehat{f}$ tenderà a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x; f tende a zero come $1/x$, quindi come già detto $f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$ e potrebbe essere $\widehat{f} \notin C^0(\mathbb{R})$.

b. La funzione $f(z)$ ha 2 poli del prim'ordine nei punti $z = -1 \pm 2i$.

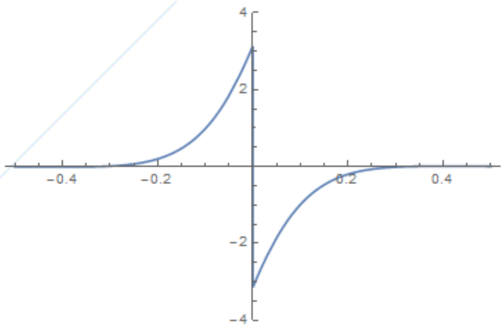
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{xe^{-2\pi i x\xi}}{x^2+2x+5}dx = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+2z+5}, -1+2i\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+2z+5}, -1-2i\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{2z+2}\right)_{/z=-1+2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{2z+2}\right)_{/z=-1-2i} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \pi i \cdot \frac{(-1+2i)e^{-2\pi i\xi(-1+2i)}}{2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -\pi i \cdot \frac{(-1-2i)e^{-2\pi i\xi(-1-2i)}}{-2i} \end{cases}$$

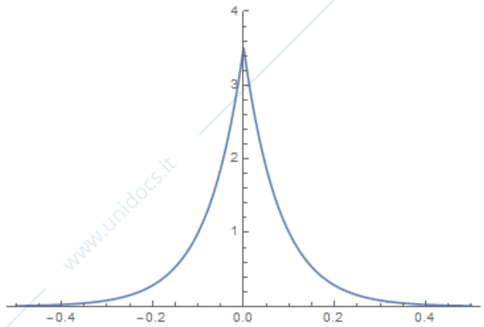
$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\left[(-1+2i)\,e^{2\pi i\xi}e^{4\pi\xi}\right] \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\left[(-1-2i)\,e^{2\pi i\xi}e^{-4\pi\xi}\right] \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\left[(2\cos(2\pi\xi) - \sin(2\pi\xi))\,e^{4\pi\xi}\right] \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\left[(-2\cos(2\pi\xi) - \sin(2\pi\xi))\,e^{-4\pi\xi}\right] \end{cases}$$

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\left|-1+2i\right| e^{4\pi\xi} \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\left|-1-2i\right| e^{-4\pi\xi} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\sqrt{5}e^{4\pi\xi} \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\sqrt{5}e^{-4\pi\xi} \end{cases} = \frac{\pi}{2}\sqrt{5}e^{-4\pi|\xi|}$$



$\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$



$\left|\widehat{f}(\xi)\right|$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
Prima prova in itinere. Aprile 2018
A.A. 2017/2018. Prof. M. Bramanti
Svolgimento Tema B

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme, commentandone la differenza. Enunciare quindi (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f. Mostrare quindi con esempi che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1, 1.2.2.

B. (6 punti). Si enunci con precisione il teorema di Fubini-Tonelli che consente di trattare gli integrali doppi nella teoria di Lebesgue. Si mostri poi come si applica questo teorema nella **dimostrazione** del teorema sulla convoluzione di funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Risposta: v. libro di testo, §2.5, 2.6.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert e di sistema ortonormale (finito), enunciare il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert. Dare quindi la definizione di sistema ortonormale (s.o.n.) numerabile e di serie di Fourier, in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n. numerabile. **Mostrare** come dal teorema della proiezione seguono la disuguaglianza di Bessel e la convergenza delle serie di Fourier (a un elemento dello spazio). Infine, dare la definizione di sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) in uno spazio di Hilbert e enunciare con precisione il teorema che riguarda la trasformata e le serie di Fourier in uno spazio di Hilbert, rispetto a un fissato s.o.n.c.

Risposta: v. libro di testo, §4.2-4.3.

D. (6 punti). Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione. **Dimostrare** quindi due delle precedenti proprietà (per le formule delle derivate, è richiesto solo il caso di derivata prima e funzioni di una variabile).

Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Di ciascuna delle seguenti affermazioni stabilire se è vera o falsa, giustificando la risposta.

a. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$

b. Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

c. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $g \in L^3(\mathbb{R})$, allora $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$

d. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} * g \in L^2(\mathbb{R})$

e. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f} \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$

a. Falso. Se $f \in C_0^0(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$|f \cdot g(x)| \leq \|f\|_{C^0} |g(x)|,$$

inoltre $f \cdot g$ si annulla fuori da un certo intervallo $[a, b]$. Tuttavia il fatto che $g \in L^1[a, b]$ non implica che $g \in L^2[a, b]$, contresempio:

$$g(x) = \frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}} \text{ e } f(x) \text{ continua e diversa da zero in un intorno dell'origine.}$$

b. Vero. Fissato un intervallo $[a, b]$,

$$|f \cdot g(x)| \leq \|f\|_{C^0[a,b]} |g(x)|$$

Se $g \in L^2[a, b]$, allora $g \in L^1[a, b]$ (inclusione tra spazi L^p su insiemi di misura finita), perciò $f \cdot g \in L^1[a, b]$.

c. Vero. Sia q l'esponente coniugato di $p = 3$. Poiché $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ e $g \in L^3(\mathbb{R})$, per la disuguaglianza di Hölder $f \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$.

d. Vero. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e se $g \in L^1(\mathbb{R})$, per il teorema di Young $\widehat{f} * g \in L^2(\mathbb{R})$.

e. Falso. Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Ora $g \in L^1(\mathbb{R})$ e il prodotto tra una funzione L^1 e una funzione L^2 non sta necessariamente in L^2. Ad esempio:

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{1 + |x|} \in L^2(\mathbb{R}); g(x) = \frac{e^{-|x|}}{\sqrt{|x|}} \in L^1(\mathbb{R})$$
$$\widehat{f} \cdot g \notin L^2(\mathbb{R}).$$

2. (4 punti). Siano

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}; g(x) = \chi_{(-1,1)}(x).$$

a. Prima di eseguire calcoli, stabilire in base alle proprietà di f e g se la convoluzione $f * g$ è ben definita e appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, o a $L^2(\mathbb{R})$, se è eventualmente simmetrica pari o dispari, e se è continua (dimostrando l'affermazione fatta).

b. Calcolare quindi esplicitamente $f * g$ e semplificare l'espressione ottenuta.

a. $f \in L^2(\mathbb{R})$ ma $f \notin L^1(\mathbb{R})$; $g \in L^1(\mathbb{R})$ quindi per il teorema di Young, $f * g \in L^2(\mathbb{R})$. Poiché f è dispari e g è pari, sarà $f * g$ dispari. Poiché

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x-y}{1+(x-y)^2} dy,$$

l'integranda è continua rispetto a x e

$$\left| \frac{x-y}{1+(x-y)^2} \right| \leq |x-y| \leq |x| + 1 \leq c$$

per ogni x variabile in un intorno fissato di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualsiasi fissato, e la costante c è una funzione integrabile (rispetto a y) in $(-1,1)$, la convoluzione è continua.

b.

$$(f * g)(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x-y}{1+(x-y)^2} dy = \left[-\frac{1}{2} \log\left(1+(x-y)^2\right) \right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1+(x-1)^2}{1+(x+1)^2} \right) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2} \right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2} \right).$$

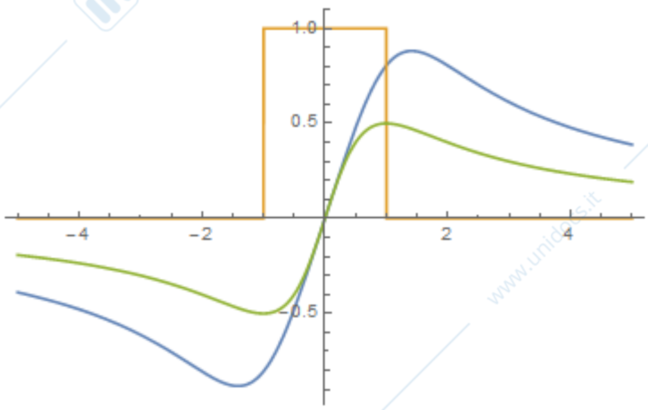


Grafico di f, g e $f * g$.

3. (6 punti).
Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}.$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quale spazio funzionale appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$ e riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata. In particolare, scrivere esplicitamente, in forma semplificata, $\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$ e $\left|\widehat{f}(\xi)\right|$.

a. $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, quindi sarà $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ma probabilmente $\widehat{f} \notin C^0_*(\mathbb{R})$; f è reale non simmetrica, $\widehat{f}$ non sarà né reale né immaginaria pura, e senza simmetrie; f è infinitamente derivabile, quindi $\widehat{f}$ tenderà a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza di x; f tende a zero come $1/x$, quindi come già detto $f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$ e potrebbe essere $\widehat{f} \notin C^0(\mathbb{R})$.

b. La funzione $f(z)$ ha 2 poli del prim'ordine nei punti $z = -1 \pm 2i$.

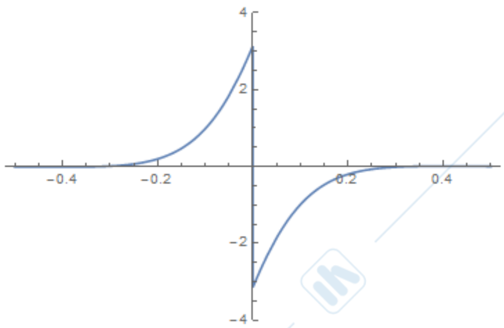
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{xe^{-2\pi i x\xi}}{x^2+2x+5}dx = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+2z+5}, -1+2i\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+2z+5}, -1-2i\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{2z+2}\right)_{/z=-1+2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{2z+2}\right)_{/z=-1-2i} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \pi i \cdot \frac{(-1+2i)e^{-2\pi i\xi(-1+2i)}}{2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -\pi i \cdot \frac{(-1-2i)e^{-2\pi i\xi(-1-2i)}}{-2i} \end{cases}$$

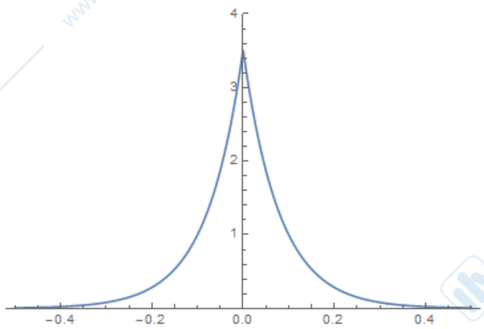
$$= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\left[(-1+2i)\, e^{2\pi i\xi} e^{4\pi\xi}\right] \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\left[(-1-2i)\, e^{2\pi i\xi} e^{-4\pi\xi}\right] \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\left[(2\cos(2\pi\xi) - \sin(2\pi\xi))\, e^{4\pi\xi}\right] \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\left[(-2\cos(2\pi\xi) - \sin(2\pi\xi))\, e^{-4\pi\xi}\right] \end{cases}$$

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\,|-1+2i|\, e^{4\pi\xi} \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\,|-1-2i|\, e^{-4\pi\xi} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2}\sqrt{5}e^{4\pi\xi} \\ \text{se } \xi > 0 & \frac{\pi}{2}\sqrt{5}e^{-4\pi\xi} \end{cases} = \frac{\pi}{2}\sqrt{5}e^{-4\pi|\xi|}$$



$\operatorname{Im}\widehat{f}(\xi)$



$\left|\widehat{f}(\xi)\right|$