Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Terzo appello. 6 Settembre 2017

A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l'esistenza della misura di Lebsegue in $\mathbb{R}^n$ e le sue proprietà.

B. (6 punti). Dare la definizione di sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert e spiegare cos'è e a cosa serve il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Dire come si ottengono i polinomi di Legendre, Laguerre e Hermite ortonormalizzando le potenze in opportuni spazi di Hilbert, e illustrare in dettaglio questo procedimento in uno dei tre casi, per le potenze $1, x, x^2$.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, mostrare (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier della delta di Dirac, delle funzioni $e^{2\pi iax}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega x$, della costante.

D. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema fondamentale dei filtri, dopo aver richiamato con cura le definizioni dei concetti coinvolti (in particolare, definire con precisione le tre proprietà operatoriali che sono coinvolte nella definizione di filtro).

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{ne^{-|x-n|}}{1+x}.$$

a. Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0, +\infty)$.
b. Studiare la convergenza in $C^0[0,1]$ e $C^1[0,1]$.

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = xe^{-x}\chi_{(0,2)}(x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quali spazi funzionali (di funzioni continue o integrabili) appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$, sfruttando opportunamente le proprietà studiate per semplificare i calcoli. Usando l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$, calcolare il numero $\widehat{f}(0)$.

3. (5 punti). Calcolare le derivate distribuzionali T' e T'' dove $T = T_f$ con

$$f(x) = u(x+1)e^{-|x-1|},$$

giustificando i passaggi *e semplificando le espressioni trovate.*

(Si suggerisce di tracciare anzitutto il grafico di f e applicare i risultati studiati per le derivate distribuzionali, *non* la regola di derivazione del prodotto; dopo aver calcolato T', per calcolare T'' ragionare in modo analogo, calcolando la derivata di T' nello stesso modo).

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Terzo appello. 6 Settembre 2017
A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare dettagliatamente il teorema che afferma l'esistenza della misura di Lebsegue in $\mathbb{R}^n$ e le sue proprietà.

[Risposta: v. Dispensa, §2.2]

B. (6 punti). Dare la definizione di sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert e spiegare cos'è e a cosa serve il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Dire come si ottengono i polinomi di Legendre, Laguerre e Hermite ortonormalizzando le potenze in opportuni spazi di Hilbert, e illustrare in dettaglio questo procedimento in uno dei tre casi, per le potenze $1, x, x^2$.

[Risposta: v. Dispensa, §4.2]

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di distribuzione temperata e trasformata di Fourier di una distribuzione temperata, mostrare (con i calcoli dettagliati) come si calcolano le trasformate di Fourier della delta di Dirac, delle funzioni $e^{2\pi iax}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega x$, della costante.

[Risposta: v. Dispensa, §7.4.1]

D. (6 punti). Enunciare e **dimostrare** il teorema fondamentale dei filtri, dopo aver richiamato con cura le definizioni dei concetti coinvolti (in particolare, definire con precisione le tre proprietà operatoriali che sono coinvolte nella definizione di filtro).

[Risposta: v. Dispensa, §8.1]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{ne^{-|x-n|}}{1+x}.$$

a. Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0, +\infty)$.
b. Studiare la convergenza in $C^0[0,1]$ e $C^1[0,1]$.

a. Per x fissato e $n \to \infty$ (in particolare possiamo supporre $n > x$, quindi $|x-n| = n-x$), si ha

$$f_n(x) = \frac{ne^{-n+x}}{1+x} = ne^{-n}\left(\frac{e^x}{1+x}\right) \to 0$$

perché $ne^{-n} \to 0$. Il limite puntuale è 0.

Però

$$f_n(n) = \frac{n}{1+n} \to 1$$

perciò

$$\|f_n\|_{C^0[0,+\infty)} \geq f_n(n) \to 1$$

e questo implica che $\|f_n\|_{C^0[0,+\infty)}$ non tende a zero, cioè la convergenza non è uniforme in $[0, +\infty)$.

b. Per $x \in [0,1]$ e $n = 1, 2, 3...$ si ha

$$f_n(x) = \frac{ne^{-n+x}}{1+x} = ne^{-n}\left(\frac{e^x}{1+x}\right).$$

La funzione $g(x) = \frac{e^x}{1+x}$ è $C^1[0,1]$, quindi g e g' sono funzioni limitate in $[0,1]$ (teorema di Weierstrass). Pertanto:

$$\|f_n\|_{C^0[0,1]} = ne^{-n}\|g\|_{C^0[0,1]} \to 0$$
$$\|f_n'\|_{C^0[0,1]} = ne^{-n}\|g'\|_{C^0[0,1]} \to 0$$

pertanto $f_n \to 0$ in $C^0[0,1]$ e $C^1[0,1]$.

2. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = xe^{-x}\chi_{(0,2)}(x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quali spazi funzionali (di funzioni continue o integrabili) appartiene f e a quale apparterrà perciò $\widehat{f}$; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se $\widehat{f}$ è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se $\widehat{f}$ è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà $\widehat{f}$; con che velocità tenderà a zero $\widehat{f}$.

b. Calcolare quindi $\widehat{f}$, sfruttando opportunamente le proprietà studiate per semplificare i calcoli. Usando l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$, calcolare il numero $\widehat{f}(0)$.

a. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, quindi sarà $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; f è reale ma senza simmetrie, perciò $\widehat{f}$ a priori non è né reale né immaginaria pura, e non ha simmetrie; f è discontinua, quindi $\widehat{f}$ tenderà a zero all'infinito lentamente; f è a supporto compatto, perciò $\widehat{f}$ sarà $C^\infty(\mathbb{R})$.

b. Sia prima

$$g(x) = e^{-x}\chi_{(0,2)}(x)$$

e calcoliamo

$$\widehat{g}(\xi) = \int_0^2 e^{-x}e^{-2\pi i x\xi}dx = \left[\frac{e^{-x(1+2\pi i\xi)}}{-(1+2\pi i\xi)}\right]_0^2 = \frac{1-e^{-2(1+2\pi i\xi)}}{1+2\pi i\xi}.$$

Ora sfruttiamo la relazione:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \mathcal{F}(xg(x))(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)}\widehat{g}'(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)}\left(\frac{1-e^{-2(1+2\pi i\xi)}}{1+2\pi i\xi}\right)' \\
&= \frac{1}{(-2\pi i)}\left(\frac{e^{-2(1+2\pi i\xi)}4\pi i(1+2\pi i\xi) - 2\pi i\left(1-e^{-2(1+2\pi i\xi)}\right)}{(1+2\pi i\xi)^2}\right) \\
&= \frac{1-e^{-2(1+2\pi i\xi)}(3+4\pi i\xi)}{(1+2\pi i\xi)^2}
\end{aligned}$$

$$\widehat{f}(0) = 1-3e^{-2}.$$

Oppure, con calcolo diretto:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_0^2 xe^{-x(1+2\pi i\xi)}dx = \text{(per parti)} \\
&= \left[\frac{-xe^{-x(1+2\pi i\xi)}}{1+2\pi i\xi}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{e^{-x(1+2\pi i\xi)}}{1+2\pi i\xi}dx \\
&= \frac{-2e^{-2(1+2\pi i\xi)}}{1+2\pi i\xi} - \left[\frac{e^{-x(1+2\pi i\xi)}}{(1+2\pi i\xi)^2}\right]_0^2 = \frac{-2e^{-2(1+2\pi i\xi)}}{1+2\pi i\xi} - \frac{e^{-2(1+2\pi i\xi)}-1}{(1+2\pi i\xi)^2}.
\end{aligned}$$

$\widehat{f}(0) = 1-3e^{-2}$.

3. (5 punti). Calcolare le derivate distribuzionali T' e T'' dove $T = T_f$ con

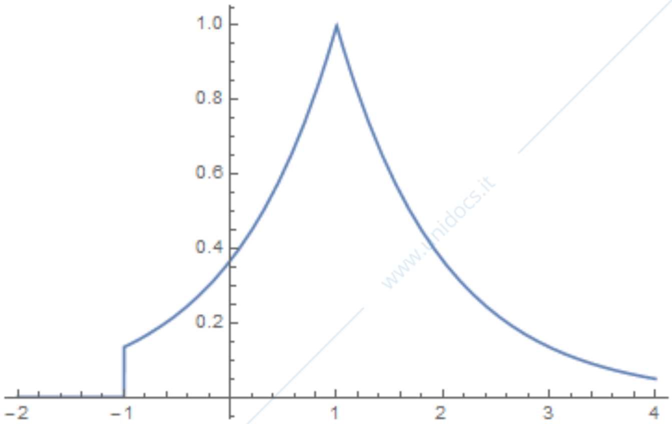
$$f(x) = u(x+1)e^{-|x-1|},$$

giustificando i passaggi *e semplificando le espressioni trovate.*

(Si suggerisce di tracciare anzitutto il grafico di f e applicare i risultati studiati per le derivate distribuzionali, *non* la regola di derivazione del prodotto;

dopo aver calcolato T', per calcolare T'' ragionare in modo analogo, calcolando la derivata di T' nello stesso modo).

Grafico di f:



In $x=-1$ la funzione f ha una discontinuità a salto, con salto e^{-2}; in $x=1$ la funzione è continua ma ha un punto angoloso. Poiché

$$\left(e^{-|x-1|}\right)' = -e^{-|x-1|}\,\mathrm{sgn}\,(x-1)\,,$$

in base ai teoremi studiati si ha:

$$T' = \delta_{-1}e^{-2} - u\,(x+1)\,e^{-|x-1|}\,\mathrm{sgn}\,(x-1)\,.$$

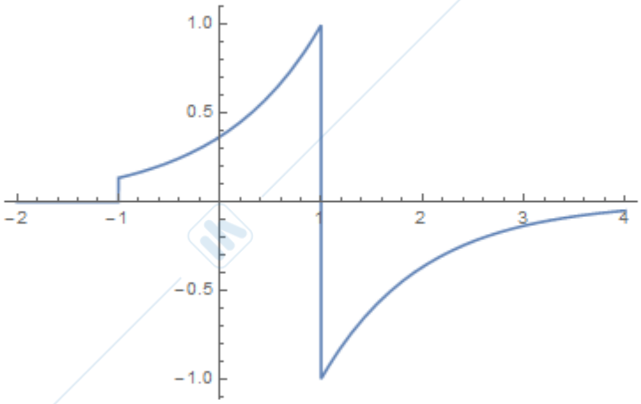
Per calcolare la derivata seconda, osserviamo che

$$\left(\delta_{-1}e^{-2}\right)' = \delta'_{-1}e^{-2}.$$

Inoltre, posto

$$g\,(x) = -u\,(x+1)\,e^{-|x-1|}\,\mathrm{sgn}\,(x-1)\,,$$

tracciamo il grafico di g:



La funzione g ha un salto e^{-2} in $x = -1$ e un salto -2 in 1, altrove è derivabile con derivata

$$u(x+1)\, e^{-|x-1|},$$

perciò

$$(T_g)' = u(x+1)\, e^{-|x-1|} + e^{-2}\delta_{-1} - 2\delta_1$$

e in definitiva,

$$T'' = \delta'_{-1} e^{-2} + u(x+1)\, e^{-|x-1|} + e^{-2}\delta_{-1} - 2\delta_1.$$