

Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate

a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano

Settimana 10

Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la settimana 10:**Libro di testo: Cap.8, §8.5.2, 8.5.3, 8.5.5,****Svolgere i seguenti esercizi dal libro di testo sulla trasformata di Laplace:****Esercizi 8.13, 8.14, 8.15, 8.16, 8.17, 8.18, 8.19, 8.20.***A lezione si sono svolti tutti gli esercizi sulla trasformata di Laplace contenuti nei temi d'esame dell'A.A. 2019/20.***Svolgere i seguenti esercizi dai temi d'esame dell'A.A. 2018/19**

(scaricabili dalla pagina web del corso, completi di svolgimento):

Seconda prova in itinere: Tema A, Esercizio 1; Tema B, Esercizio 1.**Primo appello: Esercizio 1****Secondo appello: Esercizio 1****Terzo appello: Esercizio 2****Quarto appello: Esercizio 2.****Approfondimento sulle equazioni integrali di Volterra di prima specie.** Dopo aver fatto qualcuno degli esercizi sulle equazioni integrali di Volterra di 2^a specie (esercizi 8.17-8.20), affrontare il prossimo esercizio.**Esercizio.** Si consideri l'equazione integrale

$$\int_0^t \sin(t - \tau) y(\tau) d\tau = f(t)$$

con $y(t)$ incognita e $f(t)$ assegnata. E' un'equazione integrale di Volterra, di convoluzione, di prima specie, e a lezione si è detto che queste equazioni sono più difficili di quelle di seconda specie, cioè quelle del tipo

$$y(t) + \int_0^t \sin(t - \tau) y(\tau) d\tau = f(t).$$

Infatti, se alla prima equazione applichiamo la trasformata di Laplace otteniamo:

$$Y(s) \frac{1}{s^2 + 1} = F(s)$$

$$Y(s) = (s^2 + 1) F(s)$$

e ora, per una generica funzione $f(t)$ Laplace trasformabile, il prodotto $(s^2 + 1) F(s)$ potrebbe non essere antitrasformabile. Ad esempio,se $f(t) = 1$ si ha $F(s) = \frac{1}{s}$ e

$$(s^2 + 1) F(s) = \frac{s^2 + 1}{s} \rightarrow \infty \text{ per } \operatorname{Re} s \rightarrow +\infty,$$

perciò certamente la funzione $\frac{s^2+1}{s}$ non è antitrasformabile. Per aver speranza che $(s^2 + 1) F(s)$ sia antitrasformabile, $F(s)$ dovrà tendere a zero all'infinito abbastanza rapidamente, ossia il segnale $f(t)$ dovrà essere *abbastanza regolare* (si ricordi il risultato sulla velocità di convergenza a zero all'infinito di $\mathcal{L}f(s)$). Consideriamo il caso

$$f(t) = t^n.$$

1. Qual è il minimo intero n per cui riuscite ad antitrasformare $(s^2 + 1) F(s)$?
2. Detto n_0 questo intero, risolvete l'equazione per $n = n_0$.
3. ...già che ci siete, con poca fatica risolvete l'equazione per ogni $n \geq n_0$.
4. Rispondere ora alle stesse domande per l'equazione

$$y(t) * e^{kt} = t^n$$

e k costante reale non nulla.

5. Rispondere ora alle stesse domande per l'equazione

$$y(t) * t^k = t^n$$

cioè: fissato un intero positivo k , per quali interi positivi n sapete risolvere l'equazione? Risolvetela, quando si può.

Approfondimento sulle applicazioni della trasformata di Laplace ai circuiti elettrici. Le applicazioni del metodo della trasformata di Laplace alla discussione analitica dei circuiti elettrici sono numerose, appena accennate nelle lezioni di questo corso. Lo studente curioso di saperne qualcosa di più (e capire qualche passaggio analitico che forse ha visto fare in altri corsi, di elettrotecnica o elettronica), può scaricare dalla pagina web del corso il pdf di questi approfondimenti (non in programma).