

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Quarto appello. Febbraio 2020
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome e Nome:	
N° matr. o cod. persona:	
N° d'ordine in elenco	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare quindi (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f . Mostrare quindi con contreesempi opportuni che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

B. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, separatamente per $p \in [1, \infty)$ e per $p = \infty$, e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Cosa si può dire sugli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0, 1)$?

C. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata. Utilizzando le formule delle derivate, ricavare la formula per la trasformata della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$ (in una variabile). Utilizzando altre opportune proprietà della trasformata, ricavare da questa formula quella per la trasformata di $e^{-\alpha|x|^2}$ con $\alpha > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ (in n variabili).

D. Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ricavare (con i calcoli dettagliati) la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspide, oppure di discontinuità a salto.

Svolgere i seguenti esercizi**1. (5 punti).** Sia

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + i)(x^2 - 4i)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: f eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene \hat{f} (C^0 , L^1 , L^2 , $\mathcal{S}...$), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

2. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace:

a. risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = f(t) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L -trasformabile.

b. Si consideri ora $f(t) = e^{-t}\chi_{(0,1)}(t)$. Dire quale regolarità si può prevedere a priori per la soluzione $y(t)$ in questo caso. Quindi, calcolare esplicitamente tale soluzione.

3. (5 punti). Si consideri la distribuzione:

$$T = D_3(\tau_3(x\delta'_2)).$$

a. Calcolare T riscrivendo nel modo più semplice il risultato. (Si chiede cioè di calcolare $\langle T, \phi \rangle$ riscrivendola nel modo più semplice, fino a poter riscrivere $T = \dots$ in forma esplicita, senza più ϕ).

b. Quindi (sfruttando l'espressione semplice ed esplicita ottenuta per T e non quella data inizialmente nel testo) calcolare la convoluzione di T con la funzione $f(x) = e^{-x^2}$, riscrivendo il risultato nel modo più semplice ed esplicito. Richiamare le proprietà utilizzate nel calcolo della convoluzione.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Quarto appello. Febbraio 2020
 A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare quindi (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f . Mostrare quindi con contreesempi opportuni che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

Risposta: v. libro di testo, §1.2.1, 1.2.2.

B. Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, separatamente per $p \in [1, \infty)$ e per $p = \infty$, e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Cosa si può dire sugli spazi $L^p(\Omega)$ per $p \in (0, 1)$?

Risposta: v. libro di testo, §2.4.

C. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata. Utilizzando le formule delle derivate, ricavare la formula per la trasformata della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$ (in una variabile). Utilizzando altre opportune proprietà della trasformata, ricavare da questa formula quella per la trasformata di $e^{-\alpha|x|^2}$ con $\alpha > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$ (in n variabili).

Risposta: v. libro di testo, §7.1.1.

D. Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ricavare (con i calcoli dettagliati) la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspide, oppure di discontinuità a salto.

Risposta: v. libro di testo, §9.2.2.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + i)(x^2 - 4i)}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier \hat{f} si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f ?

Rispondere sui seguenti punti: \hat{f} eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene \hat{f} (C_* , L^1 , L^2 , \mathcal{S} ...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare \hat{f} col metodo dei residui.

a. f è dispari, perciò \hat{f} sarà dispari; f non è né reale né immaginaria, quindi non prevediamo come sarà \hat{f} .

$f \in L^1(\mathbb{R})$, $xf \in L^1(\mathbb{R})$, $x^2f \notin L^1(\mathbb{R})$ quindi $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap C_*^0(\mathbb{R})$, e ci aspettiamo che $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ con derivate integrabili, perciò $\hat{f}(\xi) = o(1/\xi^n)$ per ogni n , per $\xi \rightarrow \infty$.

b. La funzione ha poli del prim'ordine nei 4 punti in cui si annulla il denominatore, cioè:

$$z^2 = -i, z_{1,2} = \sqrt{-i} = \pm e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z^2 = 4i, z_{3,4} = \sqrt{4i} = \pm 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Poiché \hat{f} è dispari, la calcoliamo per $\xi > 0$ e poi simmetrizziamo. Per $\xi > 0$ consideriamo i due poli nel semipiano $\text{Re } z < 0$, cioè

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, z_4 = -2e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}(1+i)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2 + i)(x^2 - 4i)} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= -2\pi i \left\{ \text{Res} \left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{(z^2 + i)(z^2 - 4i)}, z_1 \right) + \text{Res} \left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{(z^2 + i)(z^2 - 4i)}, z_4 \right) \right\} \\ &= -2\pi i \left\{ \left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{2z(z^2 - 4i)} \right)_{/z=z_1} + \left(\frac{ze^{-2\pi i \xi z}}{(z^2 + i)2z} \right)_{/z=z_4} \right\} \\ &= -\pi i \left\{ \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 - 4i} \right)_{/z=z_1} + \left(\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{z^2 + i} \right)_{/z=z_4} \right\} = -\pi i \left\{ \frac{e^{-2\pi i \xi \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)}}{-i - 4i} + \frac{e^{-2\pi i \xi (-\sqrt{2}(1+i))}}{4i + i} \right\} \\ &= -\pi \left\{ -\frac{e^{-\sqrt{2}\pi\xi(i+1)}}{5} + \frac{e^{2\sqrt{2}\pi\xi(i-1)}}{5} \right\} \\ &= \frac{\pi}{5} \left\{ e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left(\cos(\sqrt{2}\pi\xi) - i \sin(\sqrt{2}\pi\xi) \right) - e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \left(\cos(2\sqrt{2}\pi\xi) + i \sin(2\sqrt{2}\pi\xi) \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{5} \left\{ \left[e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \cos(\sqrt{2}\pi\xi) - e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \cos(2\sqrt{2}\pi\xi) \right] - i \left[e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) + e^{-\sqrt{2}\pi\xi} \sin(2\sqrt{2}\pi\xi) \right] \right\} \end{aligned}$$

Simmetrizzando dispari si ha:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{5} \left\{ \left[e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \cos(\sqrt{2}\pi\xi) - e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \cos(2\sqrt{2}\pi\xi) \right] \operatorname{sgn} \xi - i \left[e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \sin(\sqrt{2}\pi\xi) + e^{-\sqrt{2}\pi|\xi|} \sin(2\sqrt{2}\pi\xi) \right] \right\}.$$

2. (5 punti). Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace:

a. risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = f(t) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

cioè scrivere una formula risolutiva esplicita che assegna la soluzione in funzione del generico termine noto $f(t)$, che si suppone L -trasformabile.

b. Si consideri ora $f(t) = e^{-t}\chi_{(0,1)}(t)$. Dire quale regolarità si può prevedere a priori per la soluzione $y(t)$ in questo caso. Quindi, calcolare esplicitamente tale soluzione.

a. Indicando con $Y(s)$, $F(s)$ rispettivamente le trasformate di $y(t)$, $f(t)$ si ha:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = F(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 4s + 4) = F(s) + sy(0) + y'(0) + 4y(0)$$

$$Y(s)(s+2)^2 = F(s) - s - 3$$

$$Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{s+3}{(s+2)^2}.$$

$$\frac{1}{(s+2)^2} = \mathcal{L}(te^{-2t})$$

$$\frac{s+3}{(s+2)^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} = \mathcal{L}(e^{-2t} + te^{-2t})$$

$$Y(s) = \mathcal{L}(f(t) * te^{-2t} - (e^{-2t} + te^{-2t}))(s)$$

$$y(t) = f(t) * te^{-2t} - (e^{-2t} + te^{-2t})$$

$$= \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (t-\tau) f(\tau) d\tau - (e^{-2t} + te^{-2t}).$$

b. Se $f(t) = e^{-t}\chi_{(0,1)}(t)$, discontinua. Ci si può aspettare che y non sia C^2 , ma sia C^1 . Si ha

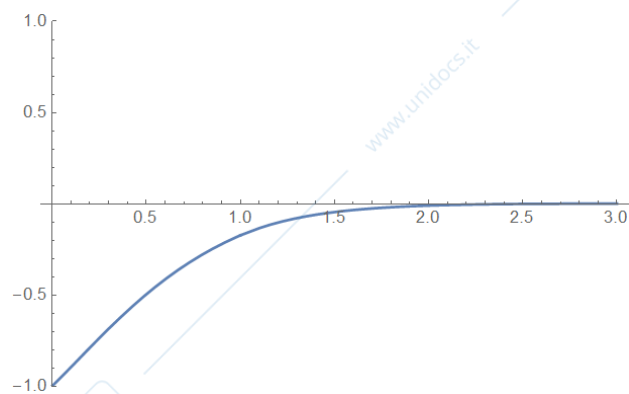
$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (t-\tau) f(\tau) d\tau &= \begin{cases} t < 1 & \int_0^t e^{-2(t-\tau)} (t-\tau) e^{-\tau} d\tau \\ t > 1 & \int_0^1 e^{-2(t-\tau)} (t-\tau) e^{-\tau} d\tau \end{cases} \\ &= \begin{cases} t < 1 & e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} (t-\tau) d\tau \\ t > 1 & e^{-2t} \int_0^1 e^{\tau} (t-\tau) d\tau \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int e^{\tau} (t - \tau) d\tau = e^{\tau} (t - \tau) + \int e^{\tau} d\tau = e^{\tau} (t - \tau + 1).$$

$$\int_0^t e^{-2(t-\tau)} (t - \tau) f(\tau) d\tau = \begin{cases} t < 1 & e^{-2t} [e^{\tau} (t - \tau + 1)]_0^t = e^{-2t} [e^t - (t + 1)] = e^{-t} - e^{-2t} (t + 1) \\ t > 1 & e^{-2t} [e^{\tau} (t - \tau + 1)]_0^1 = e^{-2t} [et - (t + 1)] = e^{-2t} (t(e - 1) - 1) \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} t < 1 & e^{-t} - 2e^{-2t} (t + 1) \\ t > 1 & e^{-2t} (t(e - 2) - 2) \end{cases}$$

Grafico di $y(t)$:



3. (5 punti). Si consideri la distribuzione:

$$T = D_3 (\tau_3 (x\delta'_2)).$$

a. Calcolare T riscrivendo nel modo più semplice il risultato. (Si chiede cioè di calcolare $\langle T, \phi \rangle$ riscrivendola nel modo più semplice, fino a poter riscrivere $T = \dots$ in forma esplicita, senza più ϕ).

b. Quindi (sfruttando l'espressione semplice ed esplicita ottenuta per T e non quella data inizialmente nel testo) calcolare la convoluzione di T con la funzione $f(x) = e^{-x^2}$, riscrivendo il risultato nel modo più semplice ed esplicito. Richiamare le proprietà utilizzate nel calcolo della convoluzione.

a.

$$\begin{aligned}
\langle D_3(\tau_3(x\delta'_2)), \phi \rangle &= \left\langle \tau_3(x\delta'_2), \frac{1}{3}\phi\left(\frac{x}{3}\right) \right\rangle = \left\langle x\delta'_3, \tau_{-3}\left(\frac{1}{3}\phi\left(\frac{x}{3}\right)\right) \right\rangle = \left\langle x\delta'_2, \frac{1}{3}\phi\left(\frac{x-3}{3}\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \delta'_2, \frac{x}{3}\phi\left(\frac{x-3}{3}\right) \right\rangle = - \left\langle \delta_2, \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{3}\phi\left(\frac{x-3}{3}\right)\right) \right\rangle \\
&= - \left\langle \delta_2, \frac{1}{3}\phi\left(\frac{x-3}{3}\right) + \frac{x}{9}\phi'\left(\frac{x-3}{3}\right) \right\rangle \\
&= - \left[\frac{1}{3}\phi\left(\frac{2-3}{3}\right) + \frac{2}{9}\phi'\left(\frac{2-3}{3}\right) \right] = -\frac{1}{3}\phi\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{9}\phi'\left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= \left\langle -\frac{1}{3}\delta_{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\delta'_{-\frac{1}{3}}, \phi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Perciò

$$T = -\frac{1}{3}\delta_{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\delta'_{-\frac{1}{3}}.$$

b. Sappiamo che per ogni distribuzione S è

$$\begin{aligned}
S * \delta_{x_0} &= \tau_{-x_0} S \\
S * \delta'_{x_0} &= (S * \delta_{x_0})' = (\tau_{-x_0} S)' = \tau_{-x_0}(S')
\end{aligned}$$

Nel nostro caso $S = T_{e^{-x^2}}$, perciò

$$\begin{aligned}
T * e^{-x^2} &= \left(-\frac{1}{3}\delta_{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}\delta'_{-\frac{1}{3}}\right) * e^{-x^2} = -\frac{1}{3}(\delta_{-\frac{1}{3}} * e^{-x^2}) + \frac{2}{9}(\delta'_{-\frac{1}{3}} * e^{-x^2}) \\
&= -\frac{1}{3}(\tau_{\frac{1}{3}}(e^{-x^2})) + \frac{2}{9}(\tau_{\frac{1}{3}}(e^{-x^2})') = -\frac{1}{3}(\tau_{\frac{1}{3}}(e^{-x^2})) + \frac{2}{9}(\tau_{\frac{1}{3}}(-2e^{-x^2})) \\
&= -\frac{1}{3}e^{-(x+\frac{1}{3})^2} - \frac{4}{9}\left(x + \frac{1}{3}\right)e^{-(x+\frac{1}{3})^2}.
\end{aligned}$$