

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Quinto appello. Febbraio 2018
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

B. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare e norma indotta dal prodotto scalare, enunciare e **dimostrare** la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la disuguaglianza triangolare per la norma e l'uguaglianza del parallelogramma.

C. (6 punti). Dare la definizione di funzione L -trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, ricavando formalmente (cioè senza dimostrazione rigorosa) una formula di antitrasformazione per la trasformata di Laplace.

D. (6 punti). Le operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, moltiplicazione per una funzione, di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: mostrare come si arriva alle definizioni di queste operazioni in modo che siano un'estensione degli analoghi concetti per le funzioni. Esemplicare poi queste operazioni nel caso della distribuzione $T = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2((0, +\infty), x dx)$ le funzioni

$$f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = e^{-2x}.$$

(Suggerimento: Calcolare prima di tutto l'integrale $I_k = \int_0^{+\infty} e^{-kx} x dx$ per $k > 0$ qualsiasi, e usare questo risultato nei calcoli successivi).

2. (5 punti). Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Usando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la soluzione di questo problema per un generico termine noto f definito in $(0, +\infty)$ e L -trasformabile.

3. (5 punti). Si consideri la distribuzione temperata S associata alla funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$$

e se ne calcoli la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate.

Si scriva quindi, per una generica ϕ a decrescenza rapida, l'espressione $\langle \widehat{S}, \phi \rangle$ in modo esplicito, cioè senza coinvolgere $\widehat{\phi}$.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Quinto appello. Febbraio 2018
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Enunciare con precisione e **dimostrare** il teorema sulla continuità del limite uniforme di funzioni continue. Mostrare con opportuni contresempi la necessità delle ipotesi.

[Risposta: v. Dispensa, §1.2.1]

B. (6 punti). Dopo aver dato la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare e norma indotta dal prodotto scalare, enunciare e **dimostrare** la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, la disuguaglianza triangolare per la norma e l'uguaglianza del parallelogramma.

[Risposta: v. Dispensa, §4.1]

C. (6 punti). Dare la definizione di funzione L -trasformabile, ascissa di convergenza, semipiano di convergenza, trasformata di Laplace. Quindi, mostrare la relazione fra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier, ricavando formalmente (cioè senza dimostrazione rigorosa) una formula di antitrasformazione per la trasformata di Laplace.

[Risposta: v. Dispensa, §6.1]

D. (6 punti). Le operazioni di traslazione, dilatazione, riflessione, moltiplicazione per una funzione, di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: mostrare come si arriva alle definizioni di queste operazioni in modo che siano un'estensione degli analoghi concetti per le funzioni. Esemplicare poi queste operazioni nel caso della distribuzione $T = \delta_{x_0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

[Risposta: v. Dispensa, §7.2.3]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2((0, +\infty), xdx)$ le funzioni

$$f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = e^{-2x}.$$

(Suggerimento: Calcolare prima di tutto l'integrale $I_k = \int_0^{+\infty} e^{-kx} x dx$ per $k > 0$ qualsiasi, e usare questo risultato nei calcoli successivi).

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{+\infty} e^{-kx} x dx = (\text{per parti}) \left[-\frac{x e^{-kx}}{k} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k} dx \\ &= 0 - \frac{1}{k^2} [e^{-kx}]_0^{+\infty} = \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

$$\|f_1\|_{L^2((0, +\infty), xdx)}^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2x} x dx = I_2 = \frac{1}{4}$$

$$\|f_1\|_{L^2((0, +\infty), xdx)} = \frac{1}{2}$$

$$e_1 = \text{vers}(f_1) = 2e^{-x}$$

$$\langle f_2, e_1 \rangle = 2 \int_0^{+\infty} e^{-3x} x dx = 2I_3 = \frac{2}{9}$$

$$e_2 = \text{vers}(f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1) = \text{vers}\left(e^{-2x} - \frac{4}{9}e^{-x}\right)$$

$$\begin{aligned} \left\| e^{-2x} - \frac{4}{9}e^{-x} \right\|_{L^2((0, +\infty), xdx)}^2 &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-2x} - \frac{4}{9}e^{-x} \right)^2 x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-4x} - \frac{8}{9}e^{-3x} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 e^{-2x} \right) x dx \\ &= I_4 - \frac{8}{9}I_3 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 I_2 = \frac{1}{16} - \frac{8}{81} + \frac{4}{81} = \frac{1}{16} - \frac{4}{81} \\ &= \frac{81 - 64}{16 \cdot 81} = \frac{17}{16 \cdot 81} \end{aligned}$$

$$\left\| e^{-2x} - \frac{4}{9}e^{-x} \right\|_{L^2((0, +\infty), xdx)} = \frac{\sqrt{17}}{4 \cdot 9}$$

$$e_2 = \text{vers}\left(e^{-2x} - \frac{4}{9}e^{-x}\right) = \frac{36}{\sqrt{17}} \left(e^{-2x} - \frac{4}{9}e^{-x} \right).$$

2. (5 punti). Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Usando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la soluzione di questo problema per un generico termine noto f definito in $(0, +\infty)$ e L -trasformabile.

a. Applicando la trasformata di Laplace, indicando con Y e F le trasformate di y e f , si ha:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2(sY(s) - y(0)) - 3Y(s) &= F(s) \\ Y(s)(s^2 + 2s - 3) - s - 2 &= F(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 2s - 3} + \frac{s + 2}{s^2 + 2s - 3} \\ &\equiv F(s)G(s) + H(s). \end{aligned}$$

Antitrasformiamo G e H .

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2 + 2s - 3} &= \frac{a}{s - 1} + \frac{b}{s + 3} \\ s(a + b) + (3a - b) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a - b = 1 \end{cases}$$

$$4a = 1; a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{4}$$

$$G(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s + 3} = \mathcal{L} \left(\frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-3t} \right)$$

$$g(t) = \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} \frac{s + 2}{s^2 + 2s - 3} &= \frac{a}{s - 1} + \frac{b}{s + 3} \\ s(a + b) + (3a - b) &= s + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a - b = 2 \end{cases}$$

$$4a = 3; a = \frac{3}{4}; b = \frac{1}{4}$$

$$H(s) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s + 3} = \mathcal{L} \left(\frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-3t} \right)$$

$$h(t) = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-3t}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} y(t) &= (g * f)(t) + h(t) \\ &= \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-3t} + \frac{1}{4} \int_0^t (e^{t-\tau} - e^{-3(t-\tau)}) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

3. (5 punti). Si consideri la distribuzione temperata S associata alla funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$$

e se ne calcoli la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate.

Si scriva quindi, per una generica ϕ a decrescenza rapida, l'espressione $\langle \widehat{S}, \phi \rangle$ in modo esplicito, cioè senza coinvolgere $\widehat{\phi}$.

Riscriviamo anzitutto

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} = x + 2 - \frac{x + 2}{x^2 + 1}.$$

Ora la funzione $f_1(x) = x + 2$ è una distribuzione temperata (ma non una funzione L^1 o L^2), e si ha:

$$\mathcal{F}(x + 2) = \frac{1}{-2\pi i} \delta' + 2\delta = \frac{i}{2\pi} \delta' + 2\delta$$

mentre la funzione $f_2(x) = -\frac{x+2}{x^2+1}$ sta in $L^2(\mathbb{R})$ e la sua trasformata di Fourier si può calcolare col metodo dei residui:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(-\frac{x+2}{x^2+1}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} -\frac{x+2}{x^2+1} e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{z+2}{z^2+1} e^{-2\pi i z \xi}, i\right) & \text{se } \xi < 0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}\left(-\frac{z+2}{z^2+1} e^{-2\pi i z \xi}, -i\right) & \text{se } \xi > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2\pi i \left(\frac{z+2}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{z=i} & \text{se } \xi < 0 \\ 2\pi i \left(\frac{z+2}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{z=-i} & \text{se } \xi > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\pi(2+i)e^{2\pi\xi} & \text{se } \xi < 0 \\ -\pi(2-i)e^{-2\pi\xi} & \text{se } \xi > 0 \end{cases} = \pi e^{-2\pi|\xi|} (-2 + i \operatorname{sgn} \xi) \end{aligned}$$

e in definitiva

$$\widehat{S} = \frac{i}{2\pi} \delta' + 2\delta + \pi e^{-2\pi|\xi|} (-2 + i \operatorname{sgn} \xi)$$

e

$$\langle \widehat{S}, \phi \rangle = -\frac{i}{2\pi} \phi'(0) + 2\phi(0) + \pi \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|x|} (-2 + i \operatorname{sgn} x) \phi(x) dx.$$