www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate
Esercizi sui prerequisiti

I seguenti esercizi contengono tecniche di analisi 1 o di matematica di base che si utilizzeranno, negli esercizi di questo corso, per calcolare trasformate di Fourier o di Laplace di funzioni. A chi trovasse difficoltà negli svolgimenti si suggerisce di ripassare in modo sistematico i corrispondenti argomenti del corso di analisi matematica 1.

1. Decomporre le seguenti funzioni razionali fratte in fratti semplici, cioè:

$$\frac{ax+b}{cx^2+dx+e} = \frac{A}{Bx+C} + \frac{D}{Ex+F}.$$

(a) $\frac{x}{5x^2+6x+1} = \ldots$ (b) $\frac{1}{5x^2+6x+1} = \ldots$ (c) $\frac{1}{x^2-16} = \ldots$

2. Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

(a) $z^2+i=0$ (b) $z^4+4z^2+3=0$
(c) $\left(z^2+2z+5\right)\left(z^2+1\right)=0$ (d) $2z^2+5iz+3=0$

3. Riscrivere le seguenti espressioni complesse separando parte reale e parte immaginaria (la variabile x è reale):

(a) $e^{\pi i x}\left(x^2+ix+5\right)$ (b) $e^{-\pi|x|}\frac{\left(ix^2+4\right)}{x+2i}$ (c) $\frac{x}{x^2+i}e^{(2-3i)x}$

4. Dopo aver semplificato l'espressione di

$$f(z) = 2\pi i\left(e^{-2\pi i z\xi}\frac{-2\pi i\xi\left(z+i\right)^2-2\left(z+i\right)}{\left(z+i\right)^4}\right),$$

calcolare $f(i)$. Riscrivere quindi l'espressione ottenuta separando parte reale e immaginaria (la variabile ξ è reale).

5. Dopo aver semplificato l'espressione di

$$f(z) = 2\pi i\left(\left(z-i\right)^2\frac{e^{-2\pi i z\xi}}{\left(1+z^2\right)^2}\right),$$

calcolarne $f'(i)$. Riscrivere quindi l'espressione ottenuta separando parte reale e immaginaria (la variabile ξ è reale).

6. Calcolare i seguenti integrali indefiniti o definiti (semplificando, quando possibile, le espressioni ottenute):

(a) $\int\frac{x}{x^2+2x+5}dx$ (b) $\int\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x}dx$ (c) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$
(d) $\int\frac{dx}{x^2+2x-3}$ (e) $\int e^{-t}\sin(2t)\,dt$

(f) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x|}\cos x dx$ (g) $\int_0^t\sin\left(3\left(t-\tau\right)\right)\sin\tau d\tau$ (h) $\int_0^t\tau\sin\left(t-\tau\right)d\tau$
(i) $e^x\int_0^{+\infty}\left(x-y\right)e^{-2y}dy$ (l) $e^{-x}\int_0^x\left(x-y\right)dy$ (m) $\int_0^t e^{-\left(\frac{t-\tau}{6}\right)}\tau d\tau$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari