SCHEMI ANALISI FUNZ.

- **Operatore lineare**: Siano X, Y due sp. vett. normati sul campo $K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Una funz. $T: X \to Y$ si dice operatore lineare se:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad \forall x, y \in X, \ \forall \lambda, \mu \in K$$

- **Teo. 3 condiz. fond. op. lin.**: Siano X, Y 2 sp. vett. normati e $T: X \to Y$ un op. lin. Sono equiv le 3 condiz:

T vista come funz. tra 2 spazi metrici

1. T è CONTINUA in $\emptyset$
2. T è CONTINUA in ogni punto
3. $\exists k$ t.c. $\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X \quad \forall x \in X$ o anche $\sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty$

- **Op. lin. continuo**: Un op. lin. $T: X \to Y$ tra 2 spazi vett. normati X, Y si dice continuo se vale una delle 3 condiz. equivalenti espresse dal teo. prec. In tal caso si definisce norma dell'operatore il numero:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

- **Spazio $\mathcal{L}(X, Y)$**: $\mathcal{L}(X, Y) = \{T: X \to Y, \ T \text{ lin. cont.}\}$ — Spazio op. lin. e cont.

$(X, Y$ sp. vett. norm.$)$ e vale che: Se Y è di BANACH $\Rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ è di BANACH

- **Funzioni vs Operatori vs Funzionali**:
  - FUNZIONE = legge che a ogni numero (di un certo insieme) associa uno e un sol numero (di un certo insieme)
  - OPERATORE = legge che a ogni funzione (di un certo spazio) associa una e una sola funzione (di un certo spazio)
  - FUNZIONALE = legge che a ogni funzione (di un certo spazio) associa uno e un sol numero (di un certo insieme)

- **Funzionale lin. cont.**: Sia X uno sp. vett. su $K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$, norm. Sia $T: X \to K$ lin. cont. Allora si dice che T è un funz. lin. cont. su X.

con norma $\|T\|_{X'} = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|T(x)|}{\|x\|_X} \to |T(x)| \leq \|T\| \|x\|_X$

- Duale $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$. $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ = duale di X → spazio di Banach xchè $Y=\mathbb{R}$ è completo

$\overset{\shortparallel}{X'}$ → Duale di uno sp. vett. norm. = sp. di tutti i funz. lin. cont. su X

- Teo. Rappr. Riesz: Se p,q sono esp. coniug. e $p\in[1,+\infty)$ allora lo spazio duale di $L^p(\Omega)$ si identifica con $L^q(\Omega)$.

$$T\in (L^p(\Omega))' \iff \exists g\in L^q \text{ t.c. } Tf=\int_\Omega fg \qquad \|T\|=\|g\|_{L^q}$$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}(L^p(\Omega),\mathbb{R})\simeq L^q(\Omega) \longrightarrow (L^p(\Omega))'\cong L^{p'}(\Omega)$$

- Sp. vett. con prodotto scalare: Sia V uno sp. vett. (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Diciamo che V è uno sp. vett. con prodotto scalare se, oltre alle 2 op. di sp. vett., è def. una terza oper. "PRODOTTO SCALARE": $(\vec{u},\vec{v}): V\times V\longrightarrow \mathbb{K}\ (=\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$

→ e soddisfa queste propr.:

1. linearità sulla prim. comp.: $(\lambda\vec{u}_1+\mu\vec{u}_2,\vec{v})=\lambda(\vec{u}_1,\vec{v})+\mu(\vec{u}_2,\vec{v}) \quad \forall \vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{v}\in V \quad \lambda,\mu\in\mathbb{K}$
2. a) se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{v},\vec{u})$ p. commutativa
   $(\vec{u},\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2)=\lambda(\vec{u},\vec{v}_1)+\mu(\vec{u},\vec{v}_2)$ bilinearità
   b) se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $(\vec{u},\vec{v})=\overline{(\vec{v},\vec{u})}$
   $(\vec{u},\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2)=\bar{\lambda}(\vec{u},\vec{v}_1)+\bar{\mu}(\vec{u},\vec{v}_2)$ sesquilinearità
3. Positività: $(x,x)\geq 0 \quad \forall x\in V$ e $(x,x)=0 \iff x=0$

- Teo. Proprietà sp. pre-Hilbertiani: Sia V uno sp. pre-Hilbert. su $\mathbb{K}$. Allora:
  1. Vale la dis. di Cauchy-Schwartz: $|(\vec{u},\vec{v})|\leq\sqrt{(\vec{u},\vec{u})}\sqrt{(\vec{v},\vec{v})} \quad \forall \vec{u},\vec{v}\in V$
  2. Se si definisce $\|\vec{u}\|=\sqrt{(\vec{u},\vec{u})}$ ← NORMA DEL PROD. SCALARE
     $! \hookrightarrow |(x,y)|\leq\|x\|\,\|y\|$
  3. Vale l'UGUAGLIANZA DEL PARALLELOGRAMMA:
     $$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

- Spazio pre-Hilbertiano: Spazio vett. normato la cui norma proviene da un prod. scalare

- Teo. Continuità dell. norm. del prod. scalare rispetto alla conv. in norma: Sia V uno sp. pre-Hilbert. Allora il prod. scalare è continuo. Cioè: se ho 2 succ. $\{x_n\},\{y_n\}\subset V$ t.c.

$$x_n\xrightarrow{V}x,\quad y_n\xrightarrow{V}y \qquad x,y\in V \Rightarrow \begin{cases}\|x_n\|\to\|x\| \\ (x_n,y_n)\to(x,y)\end{cases}$$

$\|x_n-x\|_V\to 0 \qquad \|y_n-y\|_V\to 0$ — vettori

- **Ortogonalità**: Si dice che $x, y \in V$ sono ortogonali tra loro, e si scrive $x \perp y$, se $(x,y)=0$
- **Teo. Pitagora (1° Versione)**: Sia V pre-Hilbert. e siano $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ vettori a 2 a 2 ortog.

Allora: $\| \sum_{j=1}^{n} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^2$

- **Spazio di Hilbert**: Sp. Hilbert = Sp. pre-Hilbertiano COMPLETO = sp. di Banach la cui norma proviene da un prod. scal.
- **$C^0[a,b]$**: Sp. pre-Hilbert. NON COMPLETO
- **$L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$**: $\rightarrow \ell^2 = \{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \; a_n \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty \} \rightarrow$ sp. Hilbert

$\{a_n\} \in L^2(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$

- **$L^p(\Omega)$**: $\forall p \neq 2$ è di Banach, ma NON di Hilbert
- **Serie sp. Hilbert**: Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è CONVERGENTE in H a un certo $x \in H$ se, detto $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ si abbia che $S_n \rightarrow x$, $n \rightarrow +\infty$

$\hookrightarrow \| S_n - x \|_H \rightarrow 0 \rightarrow \| \sum_{k=1}^{n} x_k - x \|_H \rightarrow 0$

- **Teo. Pitagora (2° versione)**: Se $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ è una succ. di elementi di uno sp. di Hilbert H a 2 a 2 ortogonali e t.c. la serie numerica $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2$ converge, allora la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge in H e vale la:

$$\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| x_j \|^2$$

- **Sistema ortonormale**: Un insieme finito $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^{n}$ (Vettore) o numerabile $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^{\infty}$ di elementi di H si dice SISTEMA ORTONORMALE se:

$$(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

x Pitagora 1°Vers. $\rightarrow \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{e}_i \|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$

x Pitagora 2°Vers. $\rightarrow \underbrace{\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \underline{e}_j - x \|_H}_{\in H} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \rightarrow \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2$