

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari  
**ESERCIZIO 1.28.** Costruire, per un intero  $n \geq 1$  fissato, un esempio di funzione  $C^n(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$ .

**ESERCIZIO 1.29.** Costruire esplicitamente, per un generico intervallo  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , una funzione  $f \in C_0^\infty(a, b)$ .

Costruire esplicitamente, per un generico insieme  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  contenente la sferetta di centro  $x_0$  e raggio  $\rho$ , una funzione  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ .

(Suggerimento: modificare opportunamente l'esempio 1.21).

**Esercizio 1.28**

Per  $n = 1, 2, \dots$  sia

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per  $x \neq 0$  la funzione  $f_n(x)$  è derivabile infinite volte, il problema è ovviamente nel punto di raccordo.

Notiamo che la funzione  $x^{n+1}$  si annulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine  $n$  nell'origine, e ha  $f'_{n+1}(0) \neq 0$ , mentre la costante 0 ha tutte le derivate nulle nell'origine. Quindi le derivate di  $f_n$  nell'origine si raccorderanno con continuità fino all'ordine  $n$ , mentre non si raccordano all'ordine  $n + 1$ , ossia:

$$f_n \in C^n(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R}).$$

**Esercizio 1.29**

Poniamo  $x_0 = (a + b)/2$  e  $r = (b - a)/4$ . (Ossia:  $x_0$  è il centro dell'intervallo  $(a, b)$  e  $r$  è 1/4 della sua ampiezza). Ora definiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/((x-x_0)^2-r^2)} & \text{per } |x - x_0| < r \\ 0 & \text{per } |x - x_0| \geq r. \end{cases}$$

Questa funzione è infinitamente derivabile ed è identicamente nulla fuori dall'intervallo  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , che è contenuto in  $(a, b)$ . Perciò  $f \in C_0^\infty(a, b)$ .

In più variabili, definiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(|x-x_0|^2-r^2)} & \text{per } |x - x_0| < r \\ 0 & \text{per } |x - x_0| \geq r \end{cases}$$

con  $r = \rho/2$ . Questa funzione è infinitamente derivabile ed è identicamente nulla fuori dalla sfera  $\{x : |x - x_0| \leq \rho/2\} \subset \Omega$ , perciò  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Esercizio 2.2.**  $\mu_1$  è una misura con peso, perché  $f(x) = e^{x^2}$  è misurabile e non negativa.

$\mu_2$  non è una misura perché la densità  $f(x) = xe^{-|x|}$  assume anche valori negativi; perciò ad esempio  $\mu_2(-1, 0) < 0$ , mentre la misura di un insieme dev'essere sempre  $\geq 0$ .

$\mu_3$  è una misura.

$\mu_4$  non è una misura perché non è additiva, a causa della non linearità della funzione  $t^2$ : se  $A, B$  sono misurabili e disgiunti si ha

$$\begin{aligned} \mu_4(A \cup B) &= |A \cup B|^2 = (|A| + |B|)^2 = |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 \\ &= \mu_4(A) + \mu_4(B) + 2|A||B|. \end{aligned}$$

$\mu_5$  è una misura perché combinazione lineare di misure con coefficienti positivi.

$\mu_6$  è una misura con peso, rispetto al peso  $f(x) = e^{-x^2} \cdot \chi_{(-\infty, 0)}(x)$ , che è non negativa e misurabile.

$\mu_7$  non è una misura perché non è numerabilmente additiva, ad esempio ogni insieme  $\{n\}$  ha misura 1 mentre  $\mu_7(\cup_{n=1}^\infty \{n\}) = 0$ .

$\mu_8$  è la misura del conteggio.

$\mu_9$  è una misura, finita.

$\mu_{10}$  non è una misura perché assume anche valori negativi, ad esempio  $\mu_{10}(\{-1\}) = -1$ .

**Esercizio 2.4.**

	(a)	(b)	(c)	(d)
$f_1$	no	sì	sì	sì
$f_2$	sì	no	no	no
$f_3$	sì	no	sì	sì
$f_4$	sì	no	no	no
$f_5$	sì	no	no	no
$f_6$	no	sì	no	sì