Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate

a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano

Settimana 12

Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la dodicesima settimana:

Libro di testo: Cap. 9, § 9.2.3, 9.3, 9.4 (cenni).

Scaricare i *complementi sulla verifica che un funzionale è una distribuzione o una distribuzione temperata*. Contiene i "criteri delle seminorme" (il primo è già stato illustrato a lezione, del secondo parleremo la prossima volta). Non è un argomento teorico in più di cui è richiesta la conoscenza, ma applicare quei criteri può rendere più semplice lo svolgimento di certi esercizi sulle distribuzioni.

Svolgere i seguenti esercizi:

Fare (o rifare) dal libro di testo gli Esercizi 9.13, 9.14, 9.17, 9.22, 9.23, 9.24, 9.25.

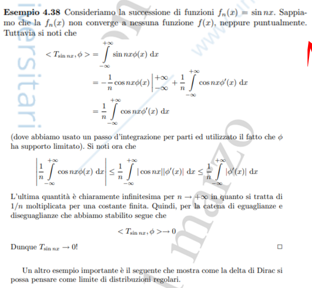
1 **Esercizio.** Si dimostri che per ogni coppia di interi positivi n, k, indicando con $\delta^{(k)}$ la derivata di ordine k della distribuzione δ_0, si ha:

$$x^n \delta^{(k)} = 0 \text{ se } k < n$$
$$x^n \delta^{(n)} = (-1)^n n! \delta$$

Suggerimento: dopo aver riscritto opportunamente $\langle x^n \delta^{(k)}, \phi \rangle$, si ragioni sullo sviluppo di MacLaurin di ϕ.

2 **Esercizio.** Calcolare le seguenti distribuzioni, riscrivendole nel modo più semplice possibile.

a. $D_3 \left(\chi_{[1,2]} (x) \right)'$
b. $\tau_2 \left(e^{-x} \delta' \right)$
c. $e^{-x^2} \left(D_2 \left(\delta_1' \right) \right)$.



Esempio 4.38 Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) = \sin nx$. Sappiamo che la $f_n(x)$ non converge a nessuna funzione $f(x)$, neppure puntualmente. Tuttavia si noti che

$$< T_{\sin nx}, \phi > = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin nx\phi(x)\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx\phi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\phi'(x)\, dx = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\phi'(x)\, dx$$

(dove abbiamo usato un passo d'integrazione per parti ed utilizzato il fatto che ϕ ha supporto limitato). Si noti ora che

$$\left|\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos nx\phi(x)\, dx\right| \le \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\cos nx||\phi'(x)|\, dx \le \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi'(x)|\, dx$$

L'ultima quantità è chiaramente infinitesima per $n \to +\infty$ in quanto si tratta di $1/n$ moltiplicata per una costante finita. Quindi, per la catena di eguaglianze e diseguaglianze che abbiamo stabilito segue che

$$< T_{\sin nx}, \phi > \to 0$$

Dunque $T_{\sin nx} \to 0$! □

Un altro esempio importante è il seguente che mostra come la delta di Dirac si possa pensare come limite di distribuzioni regolari.

3 **Esercizio.** Dimostrare che $\sin(nx) \to 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Suggerimento: scrivere la trasformata di Fourier della funzione test e ragionarci sopra...

4 **Esercizio.** Dimostrare che la seguente serie converge nel senso delle distribuzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(nx).$$

5 **Esercizio.** Si consideri la distribuzione "treno di impulsi"

$$\Delta_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{na} \text{ per } a > 0 \text{ fissato.}$$

Rispondere alle domande:

a. Δ_a è pari? E' dispari? E' periodica?
b. Δ_a è una misura (sulla σ-agebra dei Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}$)?
c. Δ_a è una distribuzione a supporto compatto?
d. Calcolare la derivata di Δ_a.
e. Calcolare (e riscrivere nel modo più semplice possibile):

$$\tau_2(\Delta_1);\tau_2(\Delta_\pi);D_2(\Delta_1);e^x\Delta_a;(\sin x)\cdot\Delta_{\frac{\pi}{2}}.$$

6 **Esercizio.** Si consideri l'operatore:

$$L:\mathcal{D}'(\mathbb{R})\to\mathcal{D}'(\mathbb{R})$$
$$L:T\longmapsto T*\delta'$$

Riconoscere di che operatore si tratta. (Cioè: riscrivere in modo più semplice il modo in cui agisce sulle T).

7 **Esercizio.** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x)=e^{x^2}\chi_{(-n,n)}(x).$$

Dimostrare che:
1. $T_{f_n}\in\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$;
2. esiste $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che $T_{f_n}\to T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$;
3. tuttavia $T\notin\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$.

Possiamo commentare questi fatti dicendo che "$\mathcal{D}'_0(\mathbb{R})$ è un sottospazio non chiuso di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$".

Svolgere i seguenti esercizi da temi d esame degli anni passati (scaricabili dalla pagina web del corso, con svolgimento).

A.A. 2018/2019.
Seconda prova in itinere, Es. 2
Quarto appello, Es. 3
Secondo appello, Es. 3 (a lezione è stato svolto solo in parte)

A.A. 2016/2017
Seconda prova in itinere, Es. 3