

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Secondo appello. 28 Luglio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**.

B. (6 punti). Dare la definizione di problema di Sturm-Liouville regolare e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, **dimostrando** le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la \mathcal{L} -trasformata della convoluzione, la formula del t -shift e dell' s -shift per la \mathcal{L} -trasformata.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di distribuzione a supporto compatto e di convoluzione di distribuzioni, sotto opportune ipotesi. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|} f(y)}{1+|y|} dy.$$

a. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in (1, \infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si richiede di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ con una stima esplicita della costante c .

b. Per $p = \infty, q = 1$ l'operatore è continuo? Dimostrare di sì o provare con un contreesempio che non lo è.

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di Volterra

$$y(t) - \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \cos(2(t-\tau)) y(\tau) d\tau = f(t) \quad \text{per } t > 0$$

con f assegnata e y incognita.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, ottenere una formula risolutiva esplicita per il generico termine noto $f(t)$, che si suppone L -trasformabile.

b. Particolarizzare quindi la formula ottenuta al caso $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$, calcolando esplicitamente la soluzione in questo caso.

3. (5 punti). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti distribuzioni temperate, semplificando l'espressione ottenuta e separando parte reale e immaginaria della trasformata.

$$S_1 = (x+1)^2 \sin(3x);$$

$$S_2 = \frac{(x+1)^2}{x^2+4}.$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Secondo appello. 28 Luglio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**.

[Risposta: v. Dispensa, §2.4]

B. (6 punti). Dare la definizione di problema di Sturm-Liouville regolare e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, **dimostrando** le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

[Risposta: v. Dispensa, §4.7.1]

C. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la \mathcal{L} -trasformata della convoluzione, la formula del t -shift e dell' s -shift per la \mathcal{L} -trasformata.

[Risposta: v. Dispensa, §6.2]

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di distribuzione a supporto compatto e di convoluzione di distribuzioni, sotto opportune ipotesi. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac.

[Risposta: v. Dispensa, §7.3]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|} f(y)}{1+|y|} dy.$$

a. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in (1, \infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si richiede di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ con una stima esplicita della costante c .

b. Per $p = \infty, q = 1$ l'operatore è continuo? Dimostrare di sì o provare con un contreesempio che non lo è.

a.

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|} |f(y)|}{1+|y|} dy \leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-q|x-y|}}{(1+|y|)^q} dy \right)^{1/q} \\ \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-q|x-y|}}{(1+|y|)^q} dy \right) dx \\ &= \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|)^q} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-q|x-y|} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Ora:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-q|x-y|} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-q|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-qx} dx = \frac{2}{q},$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \frac{2}{q} \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(1+|y|)^q} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(1+|y|)^q} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)^q} = 2 \left[\frac{(1+y)^{1-q}}{1-q} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{q-1} \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \frac{2}{q} \frac{2}{q-1} \|f\|_p^q \\ \|Tf\|_p &\leq \left(\frac{4}{q(q-1)} \right)^{1/p} \|f\|_p \end{aligned}$$

b. Mostriamo che l'operatore non è continuo da L^∞ a L^1 verificando che $\|T1\|_1 = \infty$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |T1(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{1+|y|} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|y|} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} dx \right) dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+|y|} = \infty. \end{aligned}$$

L'uguaglianza degli integrali iterati vale per il teorema di Tonelli, quindi la catena di uguaglianze mostra che effettivamente è $\|T1\|_1 = \infty$.

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di Volterra

$$y(t) - \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \cos(2(t-\tau)) y(\tau) d\tau = f(t) \text{ per } t > 0$$

con f assegnata e y incognita.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, ottenere una formula risolutiva esplicita per il generico termine noto $f(t)$, che si suppone L -trasformabile.

b. Particolarizzare quindi la formula ottenuta al caso $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$, calcolando esplicitamente la soluzione in questo caso.

a. Applichiamo la trasformata di Laplace. Si ha:

$$Y(s) - \mathcal{L}(2e^{-t} \cos 2t)(s) Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) - 2 \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 4} Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 2s + 5 - 2s - 2}{s^2 + 2s + 5} \right) = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 3}{s^2 + 2s + 5} \right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \left(\frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3} \right)$$

$$Y(s) = F(s) \left(1 + \frac{2s + 2}{s^2 + 3} \right)$$

$$Y(s) = F(s) + F(s) \frac{2(s+1)}{s^2 + 3}$$

e poiché

$$\frac{2(s+1)}{s^2 + 3} = \mathcal{L} \left(2 \left(\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right) \right) (s)$$

si ha:

$$y(t) = f(t) + \int_0^t \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) f(\tau) d\tau.$$

b. Per $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ si ha

$$y(t) = \begin{cases} \text{se } t \in [0, 1] & 1 + \int_0^t \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) d\tau \\ \text{se } t > 1 & \int_0^1 \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) d\tau \end{cases}$$

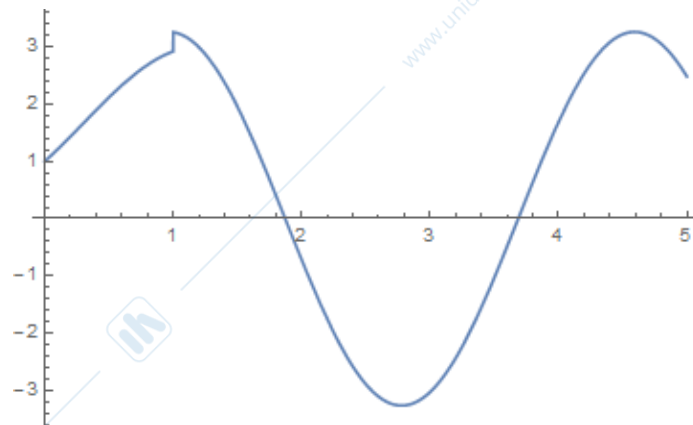
e calcolando la primitiva

$$\int \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) d\tau$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}(t-\tau))$$

si ha

$$y(t) = \begin{cases} \text{se } t \in [0, 1] & \frac{5}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}t) \\ \text{se } t > 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-1)) + \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}(t-1)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$$



3. (5 punti). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti distribuzioni temperate, semplificando l'espressione ottenuta e separando parte reale e immaginaria della trasformata.

$$S_1 = (x+1)^2 \sin(3x);$$

$$S_2 = \frac{(x+1)^2}{x^2+4}.$$

a. Ricordiamo che

$$\mathcal{F}(\sin \omega x) = \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{\omega}{2\pi}} - \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}} \right\}$$

$$\mathcal{F}(\sin 3x) = \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left((x+1)^2 \sin 3x\right) &= \mathcal{F}\left(x^2 \sin 3x + 2x \sin 3x + \sin 3x\right) \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\}'' + 2 \frac{1}{-2\pi i} \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\}' + \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}'' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}'' \right\} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}' \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}' \right\} + i \left[\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}'' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}'' \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

b.

$$S_2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4} = \frac{(x^2 + 4) + (2x - 3)}{x^2 + 4} = 1 + \frac{2x - 3}{x^2 + 4}$$

Ora $\mathcal{F}(1) = \delta$, mentre $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$ è una funzione $L^2(\mathbb{R})$, razionale, e la sua trasformata si calcola col metodo dei residui. Poiché $f(z)$ ha poli del prim'ordine in $z = \pm 2i$,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2x-3}{x^2+4} e^{-2\pi i x \xi} dx = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2z-3}{z^2+4} e^{-2\pi i z \xi}, 2i\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2z-3}{z^2+4} e^{-2\pi i z \xi}, -2i\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{2z-3}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{z=2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{2z-3}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{z=-2i} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2} (4i - 3) e^{4\pi \xi} \\ \text{se } \xi > 0 & -\frac{\pi}{2} (4i + 3) e^{-4\pi \xi} \end{cases} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-4\pi |\xi|} (3 + 4i \operatorname{sgn}(\xi)) \end{aligned}$$

In definitiva

$$\mathcal{F}(S_2) = \delta - \frac{\pi}{2} e^{-4\pi |\xi|} (3 + 4i \operatorname{sgn}(\xi)).$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero del primo compito. 28 Luglio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare quindi (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f . Mostrare quindi con esempi che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

B. (6 punti). Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enunciino con precisione il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy,$$

e il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro, e **si dimostri** il teorema di derivazione. Si citi poi qualche applicazione significativa di questo teorema vista nel corso.

C. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**.

D. (6 punti). Dare la definizione di problema di Sturm-Liouville regolare e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, **dimostrando** le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. Dopo aver calcolato il limite puntuale $f(x)$ di $f_n(x)$ per $n \rightarrow \infty$, si stabilisca se

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma } C^0(\mathbb{R})$$

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma } L^1(\mathbb{R})$$

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma } C^1(\mathbb{R})$$

giustificando le proprie conclusioni.

(Suggerimento: non si richiede -e può non essere la strada più semplice- di calcolare il valore esatto della norma; si possono fare maggiorazioni e applicare opportuni teoremi).

2. (5 punti) Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|} f(y)}{1 + |y|} dy.$$

a. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in (1, \infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si richiede di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ con una stima esplicita della costante c .

b. Per $p = \infty, q = 1$ l'operatore è continuo? Dimostrare di sì o provare con un contreesempio che non lo è.

3. (5 punti).

a. Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, e^{-|x|} dx)$ le funzioni $1, x, x^2$.

Si richiede di procedere ordinatamente, calcolando anzitutto gli integrali $I_k = \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-|x|} dx$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, e successivamente calcolando i vari integrali che occorrono riconducendosi a questi integrali notevoli (e non facendo ogni volta un calcolo indipendente). Prestare anche attenzione alle simmetrie (integrali di funzioni pari o dispari), sfruttandole per semplificare i calcoli.

b. Determinare il polinomio di grado ≤ 2 che meglio approssima la funzione $f(x) = e^{|x|/4}$ nello spazio $L^2(\mathbb{R}, e^{-|x|} dx)$.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero del primo compito. 28 Luglio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). Per una successione di funzioni $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definire le nozioni di convergenza puntuale e convergenza uniforme. Enunciare quindi (senza dimostrazione) i vari teoremi studiati che, sotto opportune ipotesi che coinvolgono il concetto di convergenza uniforme, garantiscono che certe proprietà di f_n si trasferiscono al limite f . Mostrare quindi con esempi che, se viene a cadere l'ipotesi di convergenza uniforme, le conclusioni dei precedenti teoremi possono venire a cadere.

[Risposta: v. Dispensa, §1.2.1]

B. (6 punti). Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enunciano con precisione il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y) dy,$$

e il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro, e **si dimostri** il teorema di derivazione. Si citi poi qualche applicazione significativa di questo teorema vista nel corso.

[Risposta: v. Dispensa, §2.3.4]

C. (6 punti). Definire gli spazi $L^p(\Omega)$ su uno spazio di misura astratto, per $p \in [1, \infty]$ e illustrarne le principali proprietà studiate (in particolare, ma non solo, la disuguaglianza di Hölder). Quindi illustrare le relazioni di inclusione che valgono tra spazi $L^p(\Omega)$ quando Ω ha misura finita, **dimostrandole**.

[Risposta: v. Dispensa, §2.4]

D. (6 punti). Dare la definizione di problema di Sturm-Liouville regolare e enunciare il teorema relativo ai suoi autovalori e autofunzioni, **dimostrando** le due affermazioni riguardanti la positività degli autovalori e l'ortogonalità delle autofunzioni.

[Risposta: v. Dispensa, §4.7.1]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si consideri la successione di funzioni

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. Dopo aver calcolato il limite puntuale $f(x)$ di $f_n(x)$ per $n \rightarrow \infty$, si stabilisca se

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma } C^0(\mathbb{R})$$

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma } L^1(\mathbb{R})$$

$$f_n \rightarrow f \text{ in norma } C^1(\mathbb{R})$$

giustificando le proprie conclusioni.

(Suggerimento: non si richiede -e può non essere la strada più semplice- di calcolare il valore esatto della norma; si possono fare maggiorazioni e applicare opportuni teoremi).

$$\frac{1}{2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}} \rightarrow \frac{1}{2 + x^2} \equiv f(x).$$

Ora:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}} - \frac{1}{2 + x^2} \right| = \left| \frac{\frac{\sin(nx)}{n}}{\left(2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}\right)(2 + x^2)} \right|$$

$$= \frac{\frac{|\sin(nx)|}{n}}{\left(2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}\right)(2 + x^2)} \leq \frac{\frac{1}{n}}{(1 + x^2)(2 + x^2)}$$

perché $2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n} \geq 2 + x^2 - 1 = 1 + x^2$.

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + x^2)(2 + x^2)} = \frac{c}{n} \rightarrow 0,$$

perciò la convergenza è uniforme.

Poiché

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + x^2},$$

maggiorante integrabile indipendente da n , per il teorema di Lebesgue $f_n \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R})$.

Per studiare la convergenza in $C^1(\mathbb{R})$, calcoliamo:

$$f'_n(x) - f'(x) = -\frac{2x + \cos(nx)}{\left(2 + x^2 + \frac{\sin(nx)}{n}\right)^2} + \frac{2x}{(2 + x^2)^2} \equiv g_n(x).$$

Osserviamo che

$$g_n(0) = -\frac{1}{4} \text{ per ogni } n.$$

Quindi

$$\sup_{\mathbb{R}} |f'_n(x) - f'(x)| \geq \frac{1}{4}$$

e non può esserci convergenza in $C^1(\mathbb{R})$.

2. (5 punti) Sia T l'operatore definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|} f(y)}{1+|y|} dy.$$

a. Dimostrare che T è lineare continuo come operatore

$$T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$$

per ogni $p \in (1, \infty)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si richiede di dimostrare stime di continuità $\|Tf\|_q \leq c \|f\|_p$ con una stima esplicita della costante c .

b. Per $p = \infty, q = 1$ l'operatore è continuo? Dimostrare di sì o provare con un contreesempio che non lo è.

a.

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|} |f(y)|}{1+|y|} dy \leq \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-q|x-y|}}{(1+|y|)^q} dy \right)^{1/q} \\ \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-q|x-y|}}{(1+|y|)^q} dy \right) dx \\ &= \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|y|)^q} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-q|x-y|} dx \right) dy. \end{aligned}$$

Ora:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-q|x-y|} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-q|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-qx} dx = \frac{2}{q},$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \frac{2}{q} \|f\|_p^q \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(1+|y|)^q} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(1+|y|)^q} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)^q} = 2 \left[\frac{(1+y)^{1-q}}{1-q} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{q-1} \end{aligned}$$

perciò

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^q dx &\leq \frac{2}{q} \frac{2}{q-1} \|f\|_p^q \\ \|Tf\|_p &\leq \left(\frac{4}{q(q-1)} \right)^{1/p} \|f\|_p \end{aligned}$$

b. Mostriamo che l'operatore non è continuo da L^∞ a L^1 verificando che $\|T1\|_1 = \infty$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |T1(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x-y|}}{1+|y|} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|y|} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|} dx \right) dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+|y|} = \infty. \end{aligned}$$

L'uguaglianza degli integrali iterati vale per il teorema di Tonelli, quindi la catena di uguaglianze mostra che effettivamente è $\|T1\|_1 = \infty$.

3. (5 punti).

a. Ortonormalizzare nello spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}, e^{-|x|} dx)$ le funzioni $1, x, x^2$.

Si richiede di procedere ordinatamente, calcolando anzitutto gli integrali $I_k = \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-|x|} dx$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, e successivamente calcolando i vari integrali che occorrono riconducendosi a questi integrali notevoli (e non facendo ogni volta un calcolo indipendente). Prestare anche attenzione alle simmetrie (integrali di funzioni pari o dispari), sfruttandole per semplificare i calcoli.

b. Determinare il polinomio di grado ≤ 2 che meglio approssima la funzione $f(x) = e^{|x|/4}$ nello spazio $L^2(\mathbb{R}, e^{-|x|} dx)$.

a. Sia

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-|x|} dx. \\ I_{2k+1} &= 0 \\ I_{2k} &= 2 \int_0^{+\infty} x^{2k} e^{-x} dx. \\ I_0 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2 \\ I_2 &= 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 4 \\ I_4 &= 2 \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 48. \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} e_0 &= \text{vers}(1) \\ \|1\| &= \sqrt{I_0} = \sqrt{2} \\ e_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x, e_0 \rangle &= 0 \\ e_1 &= \text{vers}(x) \\ \|x\| &= \sqrt{I_2} = 2 \\ e_1 &= \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

$$\langle x^2, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\langle x^2, e_1 \rangle = 0$$

$$e_2 = \text{vers}\left(x^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}e_0\right) = \text{vers}(x^2 - 2)$$

$$\begin{aligned}\|x^2 - 2\| &= \left(\int_{\mathbb{R}} (x^4 - 4x^2 + 4) e^{-|x|} dx\right)^{1/2} = (I_4 - 4I_2 + 4I_0)^{1/2} \\ &= (48 - 16 + 32)^{1/2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ e_2 &= \frac{x^2 - 2}{2\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Il sistema ortonormale è:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{x}{2}, \frac{x^2 - 2}{2\sqrt{10}}.$$

b. Dovremo calcolare la proiezione di f sullo spazio generato da e_0, e_1, e_2 . Ci serviranno per questo gli integrali:

$$I_k = \langle f, x^k \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^k e^{|x|/4} e^{-|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\frac{3}{4}|x|} dx \text{ per } k = 0, 1, 2.$$

Per simmetria $I_1 = 0$, mentre

$$\begin{aligned}I_0 &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3}{4}x} dx = \frac{8}{3} \\ I_2 &= 2 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{3}{4}x} dx = 2 \cdot \frac{128}{27}.\end{aligned}$$

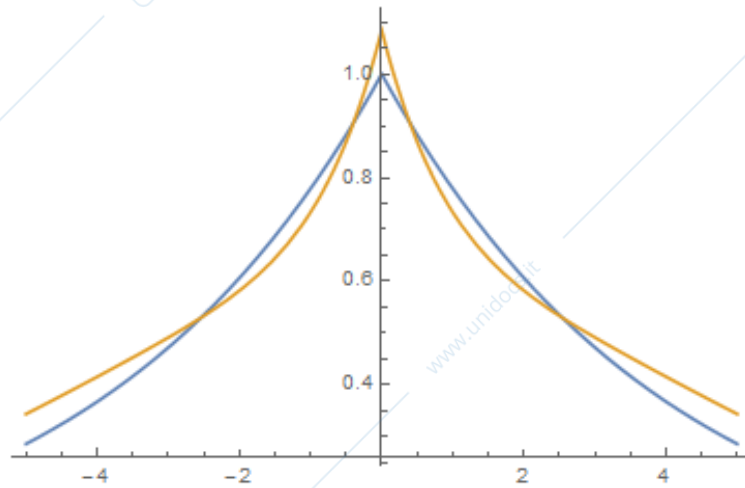
$$\langle f, e_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = \frac{8}{3\sqrt{2}}$$

$$\langle f, e_1 \rangle = 0$$

$$\langle f, e_2 \rangle = \frac{I_2 - I_0}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \left(2 \cdot \frac{128}{27} - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\frac{128}{27} - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{92}{27}$$

$$\begin{aligned}P_{V_2} f(x) &= \langle f, e_0 \rangle e_0 + \langle f, e_2 \rangle e_2 = \frac{8}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \frac{92}{27} \frac{x^2 - 2}{2\sqrt{10}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{23}{185} (x^2 - 2).\end{aligned}$$

Grafico di $(P_{V_2}f)(x)e^{-|x|/2}$ e $f(x)e^{-|x|/2}$:



Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero del secondo compitino. 28 Luglio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Cognome:	
Nome	
N° matr. o cod. persona:	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). La trasformata di Fourier in L^2 : dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà, mostrare come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$, **dimostrando** che si ottiene un operatore lineare continuo su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la \mathcal{L} -trasformata della convoluzione, la formula del t -shift e dell' s -shift per la \mathcal{L} -trasformata.

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, **ricavare (con i calcoli dettagliati)** la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspidi, oppure di discontinuità a salto.

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di distribuzione a supporto compatto e di convoluzione di distribuzioni, sotto opportune ipotesi. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = x \sin x \chi_{(-\pi, \pi)}(x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quali spazi funzionali appartiene f e a quale apparterrà perciò \hat{f} ; cosa è possibile prevedere riguardo a $\hat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se \hat{f} è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se \hat{f} è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà \hat{f} ; con che velocità tenderà a zero \hat{f} .

b. Calcolare quindi \hat{f} , sfruttando opportunamente le proprietà studiate per semplificare i calcoli. Riscrivere l'espressione trovata per $\hat{f}(\xi)$ in forma semplificata.

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di Volterra

$$y(t) - \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \cos(2(t-\tau)) y(\tau) d\tau = f(t) \text{ per } t > 0$$

con f assegnata e y incognita.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, ottenere una formula risolutiva esplicita per il generico termine noto $f(t)$, che si suppone L -trasformabile.

b. Particolarizzare quindi la formula ottenuta al caso $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$, calcolando esplicitamente la soluzione in questo caso.

3. (5 punti). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti distribuzioni temperate, semplificando l'espressione ottenuta e separando parte reale e immaginaria della trasformata.

$$S_1 = (x+1)^2 \sin(3x);$$

$$S_2 = \frac{(x+1)^2}{x^2+4}.$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate
 Recupero del secondo compitino. 28 Luglio 2017
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. (6 punti). La trasformata di Fourier in L^2 : dopo aver definito lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescenza rapida e averne enunciato le proprietà, mostrare come sfruttando queste proprietà è possibile definire la trasformata di Fourier di una funzione $L^2(\mathbb{R}^n)$, **dimostrando** che si ottiene un operatore lineare continuo su $L^2(\mathbb{R}^n)$.

[Risposta: v. Dispensa, §5.5.2]

B. (6 punti). Dopo aver ricordato la definizione di trasformata di Laplace e ascissa di convergenza, enunciare con precisione e **dimostrare** le proprietà che riguardano la \mathcal{L} -trasformata della convoluzione, la formula del t -shift e dell' s -shift per la \mathcal{L} -trasformata.

[Risposta: v. Dispensa, §6.2]

C. (6 punti). Dopo aver richiamato la definizione di derivata di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, **ricavare (con i calcoli dettagliati)** la derivata distribuzionale delle funzioni $|x|$ e $u(x)$ (gradino) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Enunciare poi con precisione il teorema che mostra come si calcola la derivata distribuzionale di una funzione regolare a tratti che presenta qualche punto angoloso, oppure di cuspidi, oppure di discontinuità a salto.

[Risposta: v. Dispensa, §7.2.2]

D. (6 punti). Discutere il problema di definire la convoluzione di due distribuzioni in modo da estendere la definizione di convoluzione di funzioni e mostrare come si arriva alla definizione di distribuzione a supporto compatto e di convoluzione di distribuzioni, sotto opportune ipotesi. Enunciare e **dimostrare** il teorema sulla derivata della convoluzione distribuzionale e sulla convoluzione di una distribuzione con la δ di Dirac.

[Risposta: v. Dispensa, §7.3]

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Si vuole calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = x \sin x \chi_{(-\pi, \pi)}(x).$$

a. Osservando la funzione $f(x)$, prima di eseguire qualsiasi calcolo, dire a quali spazi funzionali appartiene f e a quale apparterrà perciò \widehat{f} ; cosa è possibile prevedere riguardo a $\widehat{f}(\xi)$ in base alla teoria, riguardo ai seguenti punti: se \widehat{f} è reale, immaginaria pura, o nessuna delle due; se \widehat{f} è pari, dispari, o nessuna delle due; che regolarità avrà \widehat{f} ; con che velocità tenderà a zero \widehat{f} .

b. Calcolare quindi \widehat{f} , sfruttando opportunamente le proprietà studiate per semplificare i calcoli. Riscrivere l'espressione trovata per $\widehat{f}(\xi)$ in forma semplificata.

a. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, quindi sarà $\widehat{f} \in C^0_*(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; f è reale pari, perciò \widehat{f} sarà reale e pari; f è continua e regolare a tratti ma non C^1 , quindi \widehat{f} tenderà a zero all'infinito $o(1/x)$; f è a supporto compatto, perciò \widehat{f} sarà $C^\infty(\mathbb{R})$.

b. Sia prima

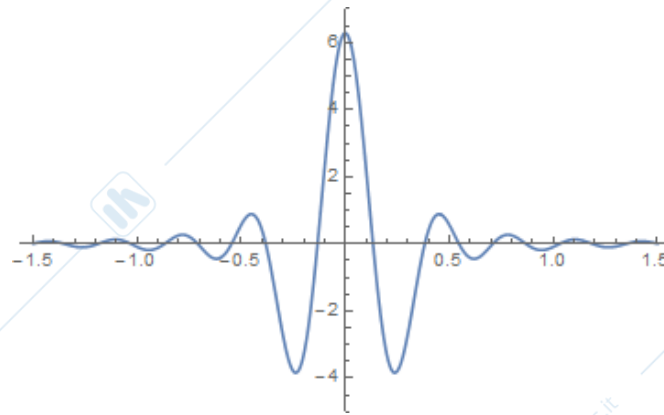
$$g(x) = \sin x \chi_{(-\pi, \pi)}(x)$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\xi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x e^{-2\pi i x \xi} dx = -2i \int_0^{\pi} \sin x \sin(2\pi x \xi) dx = \\ &= -2i \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(x(1-2\pi\xi)) - \cos(x(1+2\pi\xi))] dx \\ &= -i \left[\frac{\sin(x(1-2\pi\xi))}{(1-2\pi\xi)} - \frac{\sin(x(1+2\pi\xi))}{(1+2\pi\xi)} \right]_0^{\pi} \\ &= -i \left[\frac{\sin(\pi - 2\pi^2\xi)}{(1-2\pi\xi)} - \frac{\sin(\pi + 2\pi^2\xi)}{(1+2\pi\xi)} \right] \\ &= -i \left[\frac{\sin(2\pi^2\xi)}{1-2\pi\xi} + \frac{\sin(2\pi^2\xi)}{1+2\pi\xi} \right] \end{aligned}$$

Ora sfruttiamo la relazione:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\xi) &= \mathcal{F}(xg(x))(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)} \widehat{g}'(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)} (-i) \left[\frac{\sin(2\pi^2\xi)}{1-2\pi\xi} + \frac{\sin(2\pi^2\xi)}{1+2\pi\xi} \right]' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi^2 \cos(2\pi^2\xi)(1-2\pi\xi) + 2\pi \sin(2\pi^2\xi)}{(1-2\pi\xi)^2} + \frac{2\pi^2 \cos(2\pi^2\xi)(1+2\pi\xi) - 2\pi \sin(2\pi^2\xi)}{(1+2\pi\xi)^2} \right] \\
 &= \frac{\pi \cos(2\pi^2\xi)(1-2\pi\xi) + \sin(2\pi^2\xi)}{(1-2\pi\xi)^2} + \frac{\pi \cos(2\pi^2\xi)(1+2\pi\xi) - \sin(2\pi^2\xi)}{(1+2\pi\xi)^2} \\
 &= \frac{[\pi \cos(2\pi^2\xi)(1-2\pi\xi) + \sin(2\pi^2\xi)](1+2\pi\xi)^2 + [\pi \cos(2\pi^2\xi)(1+2\pi\xi) - \sin(2\pi^2\xi)](1-2\pi\xi)^2}{(1-4\pi^2\xi^2)^2} \\
 &= \frac{2\pi \cos(2\pi^2\xi)(1-4\pi^2\xi^2) + 8\pi\xi \sin(2\pi^2\xi)}{(1-4\pi^2\xi^2)^2}
 \end{aligned}$$



2. (5 punti). Si consideri l'equazione integrale di Volterra

$$y(t) - \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} \cos(2(t-\tau)) y(\tau) d\tau = f(t) \text{ per } t > 0$$

con f assegnata e y incognita.

a. Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, ottenere una formula risolutiva esplicita per il generico termine noto $f(t)$, che si suppone L -trasformabile.

b. Particolarizzare quindi la formula ottenuta al caso $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$, calcolando esplicitamente la soluzione in questo caso.

a. Applichiamo la trasformata di Laplace. Si ha:

$$Y(s) - \mathcal{L}(2e^{-t} \cos 2t)(s) Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) - 2 \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 4} Y(s) = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 2s + 5 - 2s - 2}{s^2 + 2s + 5} \right) = F(s)$$

$$Y(s) \left(\frac{s^2 + 3}{s^2 + 2s + 5} \right) = F(s)$$

$$Y(s) = F(s) \left(\frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3} \right)$$

$$Y(s) = F(s) \left(1 + \frac{2s + 2}{s^2 + 3} \right)$$

$$Y(s) = F(s) + F(s) \frac{2(s+1)}{s^2 + 3}$$

e poiché

$$\frac{2(s+1)}{s^2 + 3} = \mathcal{L} \left(2 \left(\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) \right) \right) (s)$$

si ha:

$$y(t) = f(t) + \int_0^t \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) f(\tau) d\tau.$$

b. Per $f(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ si ha

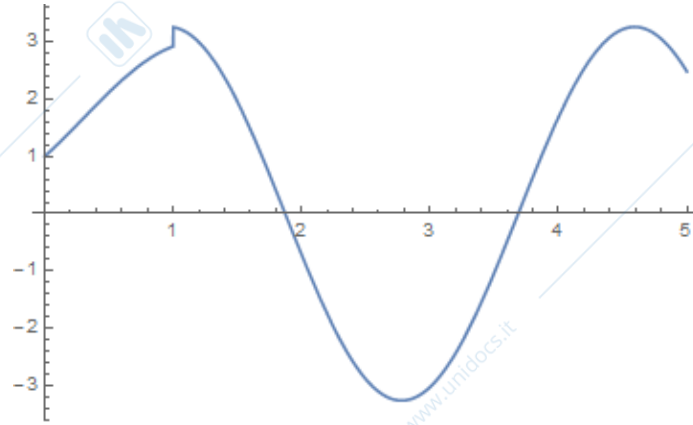
$$y(t) = \begin{cases} \text{se } t \in [0, 1] & 1 + \int_0^t \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) d\tau \\ \text{se } t > 1 & \int_0^1 \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) d\tau \end{cases}$$

e calcolando la primitiva

$$\begin{aligned} & \int \left(2 \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) \right) d\tau \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-\tau)) + \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}(t-\tau)) \end{aligned}$$

si ha

$$y(t) = \begin{cases} \text{se } t \in [0, 1] & \frac{5}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}t) \\ \text{se } t > 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}(t-1)) + \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}(t-1)) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) - \frac{2}{3} \cos(\sqrt{3}t) \end{cases}$$



3. (5 punti). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti distribuzioni temperate, semplificando l'espressione ottenuta e separando parte reale e immaginaria della trasformata.

$$S_1 = (x + 1)^2 \sin(3x);$$

$$S_2 = \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 4}.$$

a. Ricordiamo che

$$\mathcal{F}(\sin \omega x) = \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{\omega}{2\pi}} - \delta_{-\frac{\omega}{2\pi}} \right\}$$

$$\mathcal{F}(\sin 3x) = \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left((x + 1)^2 \sin 3x\right) &= \mathcal{F}\left(x^2 \sin 3x + 2x \sin 3x + \sin 3x\right) \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^2} \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\}'' + 2 \frac{1}{-2\pi i} \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\}' + \frac{1}{2i} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\} \\ &= \frac{i}{8\pi^2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}'' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}'' \right\} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}' \right\} - \frac{i}{2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}' \right\} + i \left[\frac{1}{8\pi^2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}}'' - \delta_{-\frac{3}{2\pi}}'' \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \delta_{\frac{3}{2\pi}} - \delta_{-\frac{3}{2\pi}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

b.

$$S_2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4} = \frac{(x^2 + 4) + (2x - 3)}{x^2 + 4} = 1 + \frac{2x - 3}{x^2 + 4}$$

Ora $\mathcal{F}(1) = \delta$, mentre $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$ è una funzione $L^2(\mathbb{R})$, razionale, e la sua trasformata si calcola col metodo dei residui. Poiché $f(z)$ ha poli del prim'ordine

in $z = \pm 2i$,

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2x-3}{x^2+4} e^{-2\pi i x \xi} dx = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2z-3}{z^2+4} e^{-2\pi i z \xi}, 2i\right) \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{2z-3}{z^2+4} e^{-2\pi i z \xi}, -2i\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & 2\pi i \left(\frac{2z-3}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{/z=2i} \\ \text{se } \xi > 0 & -2\pi i \left(\frac{2z-3}{2z} e^{-2\pi i z \xi}\right)_{/z=-2i} \end{cases} = \begin{cases} \text{se } \xi < 0 & \frac{\pi}{2} (4i-3) e^{4\pi \xi} \\ \text{se } \xi > 0 & -\frac{\pi}{2} (4i+3) e^{-4\pi \xi} \end{cases} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-4\pi |\xi|} (3 + 4i \operatorname{sgn}(\xi))\end{aligned}$$

In definitiva

$$\mathcal{F}(S_2) = \delta - \frac{\pi}{2} e^{-4\pi |\xi|} (3 + 4i \operatorname{sgn}(\xi)).$$