

## E. Integrali doppi

### Esercizio 2.23.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin x}{x^2 + y^2} \right| dy \right) dx &= \int_{-1}^1 |\sin x| \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{x^2 + y^2} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sin x \left[ \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} \right]_{-\infty}^{+\infty} dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \infty \end{aligned}$$

perché la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è continua e limitata in  $(0, 1)$ . Perciò  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Esercizio 2.25.** Sia  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{se } y > x \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } y < x \end{cases}$$

Calcolare i due integrali iterati di  $f$  sul quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$ , constatando che esistono finiti ma diversi tra loro. Perché questo non contraddice il teorema di Fubini-Tonelli?

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \int_0^x -\frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{x} + \left[ -\frac{1}{y} \right]_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left( -\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) dx = -1. \\ \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left( \int_0^y \frac{1}{y^2} dx + \int_y^1 -\frac{1}{x^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{y} + \left[ \frac{1}{x} \right]_y^1 \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y} \right) dy = 1. \end{aligned}$$

I due integrali iterati esistono finiti e diversi tra loro. Ciò significa che le ipotesi del teorema di Fubini-Tonelli non sono verificate, ossia: l'integrale doppio e gli integrali iterati del modulo di  $f$  sono tutti divergenti. Difatti, ad esempio:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 |f(x, y)| dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{1}{x^2} dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{x} + \left[ -\frac{1}{y} \right]_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{2}{x} - 1 \right) dx = +\infty. \end{aligned}$$

### Esercizio 2.28.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m} = \int_{\mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + m} d\mu(n)$$

dove  $\mu$  è la misura del conteggio in  $\mathbb{N}$ . Sia

$$\begin{aligned} f_m(n) &= \frac{1}{n^2 + m}. \\ \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(n) &= 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \\ 0 &< \frac{1}{n^2 + m} < \frac{1}{n^2} \in \ell^1 \end{aligned}$$

perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

quindi si può applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + m} = 0.$$

(b)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{mn^2 + 1} = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{m}{mn^2 + 1} \leq \frac{m}{mn^2} = \frac{1}{n^2} \in \ell^1,$$

quindi si può applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{mn^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{mn^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(Il valore numerico della somma della serie, che si può calcolare con metodi di analisi 2 legati alle serie di Fourier, non è essenziale nella soluzione di questo esercizio:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  è già un risultato "numerico").

(c)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{(nm+1)/(m+2)}}{n!} = \frac{2^n}{n!}.$$

Poiché

$$\frac{nm + 1}{m + 2} \leq \frac{nm + 2n}{m + 2} = n,$$

$$\frac{2^{(nm+1)/(m+2)}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} \in \ell^1$$

perciò

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(nm+1)/(m+2)}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2^{(nm+1)/(m+2)}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1,$$

perché  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .

**Esercizio 2.32.** (a) Siano  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^1_0(\mathbb{R}^n)$ , sia  $K = \text{supp } g$  allora

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_K f(x-y)g(y)dy,$$

per mostrare che questa funzione è ben definita q.o. e localmente integrabile, sia  $H$  un altro insieme chiuso e limitato, allora

$$\int_H |(f * g)(x)| dx \leq \int_H \left( \int_K |f(x-y)g(y)| dy \right) dx$$

$$= \int_K |g(y)| \left( \int_H |f(x-y)| dx \right) dy.$$

Ora al variare di  $y$  in  $K$  chiuso e limitato e di  $x$  in  $H$  chiuso e limitato, anche  $x-y$  varia in un insieme chiuso e limitato  $M$ , perciò

$$\int_H |(f * g)(x)| dx \leq \int_K |g(y)| dy \int_M |f(z)| dz < \infty.$$

(b). Se  $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  e  $\text{supp } f, \text{supp } g \subset [0, +\infty)$ , allora

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_0^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Ora  $f(x-y) \neq 0$  solo se  $x-y > 0$  quindi  $y < x$ , il che è possibile solo se  $x > 0$ . Dunque

$$(f * g)(x) = \begin{cases} \text{se } x \geq 0 & \int_0^x f(x-t)g(t)dt \\ \text{se } x < 0 & 0. \end{cases}$$

$$(a) f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^2(\mathbb{R})$$

$$h \in L^1(\mathbb{R}) \implies (f * g) * h \in L^2(\mathbb{R})$$

$$(b) f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^2(\mathbb{R})$$

$$h \in L^2(\mathbb{R}) \implies (f * g) * h \text{ può non esistere}$$

$$(c) f \in L^\infty(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$h \in L^1(\mathbb{R}) \implies (f * g) * h \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$(d) f \in L^\infty(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$$

$$h \in L^2(\mathbb{R}) \implies (f * g) * h \text{ può non esistere}$$

**Esercizio 2.35.**

(a)

$$\chi_{(0,1)} * e^{ax} = \int_0^x e^{a(x-t)} \chi_{(0,1)}(t) dt =$$

$$= \begin{cases} \text{se } x \in (0, 1) & e^{ax} \int_0^x e^{-at} dt = e^{ax} \left[ \frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^x = e^{ax} \left[ \frac{1-e^{-ax}}{a} \right] = \frac{e^{ax}-1}{a} \\ \text{se } x \geq 1 & e^{ax} \int_0^1 e^{-at} dt = e^{ax} \left[ \frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^1 = e^{ax} \left[ \frac{1-e^{-a}}{a} \right] \end{cases}$$

$$\chi_{(0,1)} * e^{ax} = \begin{cases} \text{se } x \in (0, 1) & \frac{e^{ax}-1}{a} \\ \text{se } x \geq 1 & e^{ax} \left[ \frac{1-e^{-a}}{a} \right] \end{cases}$$

(b)

$$\chi_{(0,\pi)} * \sin(2x) = \int_0^x \sin 2(x-t) \chi_{(0,\pi)}(t) dt =$$

$$= \begin{cases} \text{se } x \in (0, \pi) & \int_0^x \sin 2(x-t) dt = \left[ \frac{1}{2} \cos 2(x-t) \right]_0^x \\ \text{se } x \geq \pi & \int_0^\pi \sin 2(x-t) dt = \left[ \frac{1}{2} \cos 2(x-t) \right]_0^\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{se } x \in (0, \pi) & \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \\ \text{se } x \geq \pi & 0 \end{cases} = \begin{cases} \text{se } x \in (0, \pi) & \sin^2 x \\ \text{se } x \geq \pi & 0 \end{cases}$$

(c)

$$\cos x * x = \int_0^x \underbrace{t}_f \underbrace{\cos(x-t)}_{g'} dt = [-t \sin(x-t)]_0^x + \int_0^x \sin(x-t) dt$$

$$= \int_0^x \sin(y) dy = [-\cos y]_0^x = 1 - \cos x$$

(d)

$$e^{-x} * \sin x = \int_0^x e^{-(x-t)} \sin t dt = e^{-x} \int_0^x e^t \sin t dt$$

$$\int_0^x e^t \sin t dt = \left[ \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{2} \right]_0^x = \frac{e^x (\sin x - \cos x) + 1}{2}$$

$$e^{-x} * \sin x = e^{-x} \cdot \frac{e^x (\sin x - \cos x) + 1}{2} = \frac{\sin x - \cos x + e^{-x}}{2}$$

(e)

$$\sin x * x\chi_{(0,1)} = \int_0^x t\chi_{(0,1)}(t) \sin(x-t) dt = \begin{cases} \text{se } x \in (0,1) & \int_0^x t \sin(x-t) dt \\ \text{se } x \geq 1 & \int_0^1 t \sin(x-t) dt \end{cases}$$

$$\int t \sin(x-t) dt = \sin(x-t) + t \cos(x-t)$$

$$\sin x * x\chi_{(0,1)} = \begin{cases} \text{se } x \in (0,1) & [\sin(x-t) + t \cos(x-t)]_0^x \\ \text{se } x \geq 1 & [\sin(x-t) + t \cos(x-t)]_0^1 \end{cases}$$

$$\sin x * x\chi_{(0,1)} = \begin{cases} \text{se } x \in (0,1) & x - \sin x \\ \text{se } x \geq 1 & \sin(x-1) + \cos(x-1) - \sin x \end{cases}$$

(f)

$$\sin x * \sin 2x = \int_0^x \sin(x-t) \sin 2t dt$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin(x-t) \sin 2t = -\frac{1}{2} [\cos(x+t) - \cos(x-3t)]$$

$$\sin x * \sin 2x = -\frac{1}{2} \int_0^x [\cos(x+t) - \cos(x-3t)] dt$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ -\sin(x+t) - \frac{1}{3} \sin(x-3t) \right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ -\sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(2x) + \sin x + \frac{1}{3} \sin(x) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ -\frac{2}{3} \sin(2x) + \frac{4}{3} \sin x \right] = \frac{1}{3} \sin(2x) - \frac{2}{3} \sin x$$

(g)

$$e^{2x} * 1 = \int_0^x e^{2(x-t)} dt = e^{2x} \int_0^x e^{-2t} dt$$

$$= e^{2x} \left[ \frac{e^{-2t}}{-2} \right]_0^x = e^{2x} \left[ \frac{1 - e^{-2x}}{2} \right] = \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

## H. Esercizi di riepilogo su spazi di funzioni continue, derivabili, integrabili (capitoli 1 e 2)

### Esercizio 2.36.

(a) Vero. Una funzione continua è anche limitata su ogni intervallo  $[a, b]$ , quindi ivi integrabile.

(b) Falso, ad es.  $1/x \in C^0(0,1) \setminus L^1(0,1)$ .

(c) Falso, non ci sono inclusioni banali tra spazi  $L^p(\mathbb{R})$ . Ad esempio,

$$\chi_{(0,1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R}).$$

(d) Vero (v. risposta (a)).

(e) Falso, ad es.  $e^x \in C^0(\mathbb{R}) \setminus L^\infty(\mathbb{R})$ .

(f) Vero, una funzione continua è limitata su ogni intervallo limitato, e se all'infinito per ipotesi tende a zero è anche limitata.

(g) Falso, ad es.  $1/x \in C^0(0,1) \setminus L^\infty(0,1)$ .

(h) Falso, ad es.  $\frac{1}{1+|x|} \in C_*^0(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ .

(i) Falso, ad es.  $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0,1) \setminus L^2(0,1)$ .

(l) Vero, per il teorema di Weierstrass  $f$  è limitata in  $[a, b]$ .

(m) Vero, su un intervallo limitato  $p < q \implies L^q(a, b) \subset L^p(a, b)$ .

(n) Falso, ad es. la costante  $1 \in L^\infty(0, +\infty) \setminus L^1(0, +\infty)$ .

**Esercizio 2.37.**

- (a) Falso, es.  $f(x) = |x| \in C^0(\mathbb{R})$ ,  $g(x) = e^x \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $|x|e^x \notin C^1(\mathbb{R})$ .
- (b) Falso, es.  $f(x) = e^x \in C^0(\mathbb{R})$ ,  $g(x) = \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\frac{e^x}{1+x^2} \notin L^1(\mathbb{R})$ .
- (c) Vero,  $|fg(x)|^p \leq \|f\|_{C^0}^p |g(x)|^p$  è integrabile se  $g \in L^p(a, b)$ .
- (d) Vero, se  $g \in C^1(\mathbb{R})$  in particolare è continua, prodotto di funzioni continue è continuo.
- (e) Vero, in ogni intervallo  $[a, b]$ ,  $f$  è limitata e  $g$  integrabile, quindi  $fg$  è integrabile.
- (f) Vero, come risposta precedente.
- (g) Vero, se  $g$  è nulla fuori da un certo intervallo  $[a, b]$ , lo stesso è vero per  $fg$ ; d'altro canto  $fg$  è integrabile in  $[a, b]$  (v. risposta (e)).
- (h) Falso, ad es.  $e^x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $\frac{1}{1+x^2} \in C^0_*(\mathbb{R})$  ma  $\frac{e^x}{1+x^2} \notin L^1(\mathbb{R})$ .