

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate  
 Quarto appello. Gennaio 2018  
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

<b>Cognome:</b>	
<b>Nome</b>	
<b>N° matr. o cod. persona:</b>	

**Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)**

**A. (6 punti).** Si definisca cosa si intende per convoluzione di due funzioni in  $\mathbb{R}^n$  e si enunci e dimostri un risultato preciso che riguarda la convoluzione di due funzioni  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si enunci poi il risultato analogo che estende il precedente a spazi  $L^p$ . Infine, si dica come si esprime la convoluzione di due funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che si annullano per  $x < 0$ , e sotto quali ipotesi è ben definito.

**B. (6 punti).** Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

**C. (6 punti).** Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione; trasformata e dilatazioni. **Dimostrare** quindi due delle precedenti proprietà.

(Si ricorda che “enunciare una proprietà” non significa semplicemente scrivere una formula, ma enunciare un teorema con ipotesi e tesi precise).

**D. (6 punti).** Lo spazio di distribuzioni  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  o tutto  $\mathbb{R}^n$ ): definirlo (facendo i necessari richiami sullo spazio  $\mathcal{D}(\Omega)$  e la nozione di convergenza di successioni in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ), fare esempi di classi di distribuzioni, dimostrando che quelle definite sono effettivamente distribuzioni. Mostrare in particolare in che senso il concetto di distribuzione generalizza quello di funzione e quello di misura.

### Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia  $T$  l'operatore lineare definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1+x^2+|y|} dy.$$

Dimostrare che per ogni  $p \in (1, \infty)$  l'operatore  $T$  risulta continuo da  $L^p(\mathbb{R})$  a  $L^p(\mathbb{R})$ , ottenendo una stima esplicita della norma dell'operatore.

(Suggerimento: seguire i seguenti passi, ordinatamente: 1) maggiorare  $|Tf(x)|$  mediante un'opportuna norma di  $f$  moltiplicata per un integrale, che va calcolato esplicitamente ottenendo una funzione della sola  $x$ ; solo a questo punto, maggiorare l'integrale di  $|Tf(x)|^p$  e fare gli opportuni calcoli).

2. (5 punti). Si consideri l'equazione integro-differenziale di un circuito  $LC$  in serie con una tensione  $v(t)$  applicata:

$$Li'(t) + \frac{1}{C} \left( q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

dove  $i(0) = 0$ ,  $q_0 = 1$  e  $L = 2$ ,  $C = 4$ .

Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la formula di rappresentazione che assegna la soluzione di questo problema per un generico termine noto  $v(t)$   $L$ -trasformabile.

3. (5 punti). Si consideri un filtro  $A$  la cui funzione di trasferimento è

$$H(\xi) = \frac{1}{3 + 4i\xi}.$$

a. Calcolare la risposta in ampiezza, la risposta all'impulso, e dire se è o non è un filtro causale, un filtro passa-basso, un filtro passa-alto.

(Per il calcolo della risposta all'impulso si chiede di eseguire e riportare esplicitamente il calcolo della trasformata richiesta, con i metodi studiati, non applicare tabelle).

b. Calcolare l'uscita del filtro corrispondente all'ingresso

$$x(t) = e^t.$$

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate  
 Quarto appello. Gennaio 2018  
 A.A. 2016/2017. Prof. M. Bramanti  
 Svolgimento

	Punti
Dom 1	
Dom 2	
Dom 3	
Es 1	
Es 2	
Es 3	
Tot.	

**Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)**

**A. (6 punti).** Si definisca cosa si intende per convoluzione di due funzioni in  $\mathbb{R}^n$  e si enunci e dimostri un risultato preciso che riguarda la convoluzione di due funzioni  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Si enunci poi il risultato analogo che estende il precedente a spazi  $L^p$ . Infine, si dica come si esprime la convoluzione di due funzioni  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che si annullano per  $x < 0$ , e sotto quali ipotesi è ben definito.

[Risposta: v. Dispensa, §2.6]

**B. (6 punti).** Dopo aver richiamato la definizione di spazio di Hilbert, enunciare e **dimostrare** il teorema della proiezione su un sottospazio finito dimensionale di uno spazio di Hilbert.

[Risposta: v. Dispensa, §4.3]

**C. (6 punti).** Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata; trasformata della convoluzione; trasformata e dilatazioni. **Dimostrare** quindi due delle precedenti proprietà.

(Si ricorda che “enunciare una proprietà” non significa semplicemente scrivere una formula, ma enunciare un teorema con ipotesi e tesi precise).

[Risposta: v. Dispensa, §5.1.1]

**D. (6 punti).** Lo spazio di distribuzioni  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  o tutto  $\mathbb{R}^n$ ): definirlo (facendo i necessari richiami sullo spazio  $\mathcal{D}(\Omega)$  e la nozione di convergenza di successioni in  $\mathcal{D}(\Omega)$ ), fare esempi di classi di distribuzioni, dimostrando che quelle definite sono effettivamente distribuzioni. Mostrare in particolare in che senso il concetto di distribuzione generalizza quello di funzione e quello di misura.

[Risposta: v. Dispensa, §7.2.1]

### Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia  $T$  l'operatore lineare definito da

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1+x^2+|y|} dy.$$

Dimostrare che per ogni  $p \in (1, \infty)$  l'operatore  $T$  risulta continuo da  $L^p(\mathbb{R})$  a  $L^p(\mathbb{R})$ , ottenendo una stima esplicita della norma dell'operatore.

(Suggerimento: seguire i seguenti passi, ordinatamente: 1) maggiorare  $|Tf(x)|$  mediante un'opportuna norma di  $f$  moltiplicata per un integrale, che va calcolato esplicitamente ottenendo una funzione della sola  $x$ ; solo a questo punto, maggiorare l'integrale di  $|Tf(x)|^p$  e fare gli opportuni calcoli).

Detto  $q$  l'esponente coniugato di  $p$ , si ha

$$|Tf(x)| \leq \|f\|_p \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2+|y|)^q} dy \right)^{1/q}.$$

Ora:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2+|y|)^q} dy &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2+y)^q} dy \\ &= 2 \left[ \frac{1}{1-q} \frac{1}{(1+x^2+y)^{q-1}} \right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

poiché  $p < \infty$  si ha  $q > 1$ , quindi:

$$= \frac{2}{q-1} \frac{1}{(1+x^2)^{q-1}}$$

e

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \|f\|_p \left( \frac{2}{q-1} \frac{1}{(1+x^2)^{q-1}} \right)^{1/q} = \|f\|_p \left( \frac{2}{q-1} \right)^{1/q} \frac{1}{(1+x^2)^{1-1/q}} \\ &= \|f\|_p \left( \frac{2}{q-1} \right)^{1/q} \frac{1}{(1+x^2)^{1/p}} \end{aligned}$$

(dove si è sfruttato il fatto che  $1/p = 1 - 1/q$ ). Perciò

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^p dx &\leq \|f\|_p^p \left( \frac{2}{q-1} \right)^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \|f\|_p^p \left( \frac{2}{q-1} \right)^{p/q} \pi \end{aligned}$$

e infine

$$\|Tf\|_p \leq \|f\|_p \left(\frac{2}{q-1}\right)^{1/q} \pi^{1/p}.$$

Quindi l'operatore è continuo, con norma

$$\|T\| \leq \left(\frac{2}{q-1}\right)^{1/q} \pi^{1/p}.$$

**2. (5 punti).** Si consideri l'equazione integro-differenziale di un circuito  $LC$  in serie con una tensione  $v(t)$  applicata:

$$Li'(t) + \frac{1}{C} \left( q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = v(t)$$

dove  $i(0) = 0, q_0 = 1$  e  $L = 2, C = 4$ .

Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, determinare la formula di rappresentazione che assegna la soluzione di questo problema per un generico termine noto  $v(t)$   $L$ -trasformabile.

Ponendo  $I(s) = \mathcal{L}(i(t))(s)$ ,  $V(s) = \mathcal{L}(v(t))(s)$  e trasformando l'equazione differenziale tenendo conto delle condizioni iniziali si ha:

$$\begin{aligned} L(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{C} \left( q_0 + \frac{I(s)}{s} \right) &= V(s) \\ LsI(s) + \frac{q_0 + I(s)}{Cs} &= V(s) \\ I(s) \left( Ls + \frac{1}{Cs} \right) &= V(s) - \frac{q_0}{Cs} \\ I(s) &= \frac{V(s)}{Ls + \frac{1}{Cs}} - \frac{q_0}{Cs \left( Ls + \frac{1}{Cs} \right)} \\ &= \frac{V(s)}{2s + \frac{1}{4s}} - \frac{1}{4s \left( 2s + \frac{1}{4s} \right)} \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s + \frac{1}{4s}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + \frac{1}{8}} = \mathcal{L} \left( \frac{1}{2} \cos \left( \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \right) (s) \\ \frac{1}{4s \left( 2s + \frac{1}{4s} \right)} &= \frac{1}{8s^2 + 1} = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{s^2 + \frac{1}{8}} = \mathcal{L} \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \left( \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \right) (s) \\ I(s) &= \mathcal{L} \left( \frac{1}{2} \cos \left( \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) * v(t) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \left( \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) \right) (s) \\ i(t) &= \frac{1}{2} \cos \left( \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) * v(t) - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \left( \frac{t}{2\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

3. (5 punti). Si consideri un filtro  $A$  la cui funzione di trasferimento è

$$H(\xi) = \frac{1}{3 + 4i\xi}.$$

a. Calcolare la risposta in ampiezza, la risposta all'impulso, e dire se è o non è un filtro causale, un filtro passa-basso, un filtro passa-alto.

(Per il calcolo della risposta all'impulso si chiede di eseguire e riportare esplicitamente il calcolo della trasformata richiesta, con i metodi studiati, non applicare tabelle).

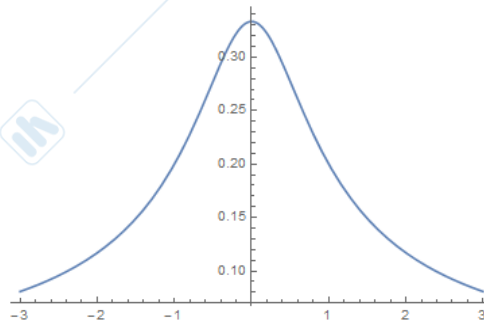
b. Calcolare l'uscita del filtro corrispondente all'ingresso

$$x(t) = e^t.$$

a. Risposta in ampiezza:

$$|H(\xi)| = \frac{1}{|3 + 4i\xi|} = \frac{1}{\sqrt{9 + 16\xi^2}}.$$

Poiché il grafico di  $|H(\xi)|$  è



questo si può considerare un filtro passa-basso.

Risposta all'impulso:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\xi))(t) = \hat{H}(-t).$$

La funzione  $H(\xi)$  non è  $L^1(\mathbb{R})$  ma è  $L^2(\mathbb{R})$  quindi la sua trasformata si può calcolare col metodo dei residui come segue.

$$\hat{H}(-t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{2\pi i \xi t}}{3 + 4i\xi} d\xi$$

Posto  $f(z) = \frac{1}{3 + 4iz}$ , che ha un polo del prim'ordine in  $z = -\frac{3}{4i} = \frac{3}{4}i$ ,

$$\begin{aligned} \hat{H}(-t) &= \begin{cases} 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z) e^{2\pi i z t}, \frac{3}{4}i\right) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi i \left(\frac{e^{2\pi i z t}}{4i}\right)_{z=\frac{3}{4}i} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3}{2}\pi t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

perciò

$$h(t) = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3}{2}\pi t} u(t)$$

e il filtro è causale, poiché  $h(t) = 0$  per  $t < 0$ .

b. La risposta del sistema all'ingresso  $x(t) = e^t$  è

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{3}{2}\pi(t-\tau)} x(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{3}{2}\pi(t-\tau)} e^{\tau} d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3}{2}\pi t} \int_{-\infty}^t e^{\tau(\frac{3}{2}\pi+1)} d\tau = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3}{2}\pi t} \left[ \frac{e^{\tau(\frac{3}{2}\pi+1)}}{(\frac{3}{2}\pi+1)} \right]_{-\infty}^t \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-\frac{3}{2}\pi t} \left( \frac{e^{t(\frac{3}{2}\pi+1)}}{(\frac{3}{2}\pi+1)} \right) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3}{2}\pi+1} e^t = \frac{\pi}{3\pi+2} e^t. \end{aligned}$$