Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate
a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano
Settimana 4
Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la quarta settimana:
Libro di testo: Cap.2, § 2.3.3, 2.3.4, 2.5, 2.6.

Esercizi

Spazi L^p:
Esercizio 2.25;
Esercizio 2 tabilire per quali $p \in [1, +\infty]$ si ha $f \in L^p(\mathbb{R})$, con

$$f(x) = \frac{1}{|x-1|^{1/2}\left(1+|x|^{1/3}\right)}; f(x) = \frac{\sin x}{|x|^{3/2}}.$$

Integrali doppi:
Studiare gli Esempi 2.22-2.23 pp.78-79, svolgere l'**Esercizio 2.23**.

Convoluzione di funzioni 2.29
Esercizi 2.28, 2.32, 2.33.
Esercizio 7 Calcolare esplicitamente le seguenti convoluzioni, sfruttando, quando possibile, le simmetrie che si possono prevedere a priori:
(*a*) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$, semplificando l'espressione ottenuta. Verificare che la funzione è derivabile ovunque.
(*b*) $e^{-x}\chi_{(0,+\infty)}(x) * \chi_{(-1,1)}(x)$, semplificando l'espressione ottenuta. Verificare che la funzione è continua ovunque.
(*c*) $xe^{-|x|} * \chi_{(-1,1)}(x)$, semplificando l'espressione ottenuta. Verificare che la funzione è continua ovunque.
(*d*) $\frac{1}{1+x^2} * \chi_{(-1,1)}$, verificando a posteriori che la funzione ottenuta è effettivamente pari e tende a zero all'infinito. Dimostrare che la funzione ottenuta è effettivamente integrabile all'infinito è un esercizio di analisi 1 non facile; se qualche coraggioso ci vuole provare...; senza fare nessun esercizio di analisi 1, cosa si potrebbe dire sul valore dell'integrale di $\frac{1}{1+x^2} * \chi_{(-1,1)}$?

Esercizi di riepilogo su spazi di funzioni continue, derivabili, integrabili:
Svolgere gli **Esercizi 2.35, 2.36, 2.37** (ad eccezione delle domande che coinvolgono spazi L^p_{loc}, di cui non abbiamo ancora parlato).

Dopo aver studiato la teoria indicata, rispondere alle seguenti domande di comprensione

- Integrali doppi: si rifletta sulla relazione tra quanto afferma il teorema di Fubini-Tonelli per funzioni di due variabili e quanto studiato in analisi 2 per gli integrali doppi di funzioni continue su domini semplici: si può affermare che il risultato studiato in analisi 2 è un caso particolare contenuto nel teorema di Fubini-Tonelli? Perché?

- Sia $u(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x)$. Si calcoli $u * u$, constatando che si trova una funzione ben definita per ogni x reale. Eppure $u \notin L^1(\mathbb{R})$. Perché questo non contraddice quanto visto a lezione?

- Consideriamo una funzione del tipo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x,y)\, dy \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

  Rispondere vero o falso alle seguenti affermazioni, giustificando la risposta.

  - Affinché $u(x)$ sia continua è necessario che $k(x,y)$ sia continua rispetto a y per x fissato.
  - Affinché $u(x)$ sia continua è necessario che $k(x,y)$ sia continua rispetto a x per y fissato.
  - Se $u(x)$ esiste per ogni x e inoltre esiste $\frac{\partial k}{\partial x}(x_0,y) \in L^1(\mathbb{R})$ allora si può affermare che

$$u'(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial k}{\partial x}(x_0,y)\, dy.$$

  - Se per ogni $x \in \mathbb{R}$ le funzioni $y \mapsto k(x,y)$ e $y \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$ allora si può affermare che per ogni x è:

$$u'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial k}{\partial x}(x,y)\, dy.$$

Approfondimento opzionale. *Per chi è interessato alle applicazioni degli strumenti studiati alle equazioni alle derivate parziali:*

Studiare gli Esempi 2.15 e/o 2.16 (pp.69-71) sulle applicazioni del teorema di derivazione sotto il segno di integrale alle formule integrali di Poisson.