SCHEMI ANALISI FUNZ. Sia (X,d) uno spazio metrico

- **Teo. Insieme chiuso:** l'insieme $C \subset X$ è chiuso $\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C$ t.c. $x_n \to \bar{x}$ per un certo $\bar{x} \in X$ si ha che $\bar{x} \in C$
- **Insieme denso:** un sottoins. $E \subset X$ si dice denso se $\bar{E} = X$

chiusura di $E \to \bar{E} = E + \partial E$ (aperto; frontiera di E (bordo))

↳ cioè E è denso in X se $\forall x \in X \ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ t.c. $x_n \to x$

- **Teo. Completo + chiuso:** Sia (X,d) sp. metrico COMPLETO

$C \subset X$ chiuso $\iff (C,d)$ sp. metrico COMPLETO

- **$\mathcal{C}^1[a,b]$:** $\mathcal{C}^1[a,b] = \{f:[a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue e derivabili}\}$
  - ↳ $\mathcal{C}^1[a,b]$ NON è CHIUSO (visto come sottoins. di $\mathcal{C}^0[a,b]$)
  - ↳ $\mathcal{C}^1[a,b]$ NON è COMPLETO con la norma $\|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$
  - ↳ $\mathcal{C}^1[a,b]$ è COMPLETO (BANACH) con la norma $\|f\|_{\mathcal{C}^1[a,b]} = \|f\|_{\mathcal{C}^0[a,b]} + \|f'\|_{\mathcal{C}^0[a,b]}$
- **$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$:** $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ e $\exists\, \partial^{\alpha} f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \ \forall \alpha$ con $|\alpha| \leq k\}$

con $k = 1,2,3,\dots$

Ω aperto limitato; $\bar{\Omega}$ chiusura di Ω

↳ DI BANACH con norma $\|f\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})} = \|f\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \|\partial^{\alpha} f\|_{\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})}$

- **Spaz. di funz. inf. derivabili:** $\mathcal{C}^{\infty}(a,b), \mathcal{C}^{\infty}[a,b], \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ NON hanno una norma naturale che li renda di Banach

NON normati

- **σ-algebra:** Sia Ω un insieme qualsiasi. Si dice σ-algebra (in Ω) una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di Ω ($\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) t.c.:

1. $\Omega \in \mathcal{M}$
2. $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$
3. $\mathcal{M}$ CHIUSO per unioni misurabili, cioè: $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$

succ. di insiemi

$\Longrightarrow$ Ogni insieme $\in \mathcal{M}$ si dice misurabile $\rightarrow (\Omega, \mathcal{M})$ = spazio misurabile

- **Teo. chiusura σ-algebra**: Se $\mathcal{M}$ è una σ-algebra in Ω allora $\mathcal{M}$ è chiusa anche rispetto a:
  - unioni finite
  - intersez. finite o numerab.
  - diff. insiemistica

- **Misura su uno spazio**: Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile. Si dice misura su $(\Omega, \mathcal{M})$ una funz. $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ t.c. μ sia numerab. additiva, cioè $\to$ $\forall \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$ (a 2 a 2 disgiunti) $\Longrightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

- **Teo. proprietà misura**: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. di misura. Allora:

  1. $\mu(\emptyset) = \emptyset$
  2. μ è FINITAMENTE ADDITIVA: $\forall E_1, E_2, \dots E_n \in \mathcal{M}$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$ $\Longrightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$
  3. μ è monotona, cioè $\forall A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
  4. μ è condiz. sottrattiva, cioè $\forall A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$ e $\mu(B) < \infty$ $\Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
  5. μ è numerabil. subadditiva $\to$ $\forall \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ $E_n \in \mathcal{M}$ (non nec. a 2 a 2 disg.) si ha $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

- **Teo. misura di Lebesgue**: Esiste una σ-algebra $\mathcal{L}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (σ-algebra di Lebesgue) ed esiste una misura μ su $\mathcal{L}$ con queste proprietà:

  1. $\mathcal{L}$ contiene tutti gli insiemi aperti, chiusi, le loro unioni e intersez. numer. (MA $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$)
  2. Se $I \subseteq \mathbb{R}^n$ è una n-cella, cioè $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ allora $\mu(I) = |b_1 - a_1| \cdot |b_2 - a_2| \cdot \dots \cdot |b_n - a_n|$
  3. $\forall E \in \mathcal{L} \to \mu(E) = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) : \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq E$ e I_k sono n-celle $\}$
  4. μ (misura di Lebesgue) è invariante per traslazioni
  5. μ è una MISURA COMPLETA

- **Misura completa**: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Si dice che la misura μ è COMPLETA se $\forall F \in \mathcal{M}$ t.c. $\mu(F)=0$ e $\forall E \subseteq F$ si ha $E \in \mathcal{M}$ $(\Rightarrow \mu(E)=0)$

- **Ad. num + $\mathcal{L}$-mis.**: Ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}^n$ è $\mathcal{L}$-mis. e ha misura nulla

- **Funzioni misurabili**: Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile, e sia $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ allora se vale una qualsiasi di queste 4 proprietà:

$$\left.\begin{array}{ll}
\underline{1} & \{x \in \Omega : f(x) > a\} \in \mathcal{M} \\
\underline{2} & \{x \in \Omega : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M} \\
\underline{3} & \{x \in \Omega : f(x) < a\} \in \mathcal{M} \\
\underline{4} & \{x \in \Omega : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}
\end{array}\right\} \rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ è MISURABILE}$$

- **Funzione caratteristica**: Sia $(\Omega, \mathcal{M})$ uno sp. misurab. qualsiasi e $E \subset \Omega$. La funz. caratt. di E è $\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$ $\rightarrow \chi_E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E \in \mathcal{M}$

- **Funz. uguali quasi ovunque**: Siano $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ con f misur. e $g = f$ tranne su un insieme di mis. nulla $(\mu\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\} = 0)$
$\Longrightarrow g$ è misurabile

- **Teo. funz. q.o. + numer.**: Sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ uno sp. misura con μ completa. Sia $f_n: \Omega \to \mathbb{R}$ succ. di funz. definite q.o. su Ω e misurabili, e supp. che esista per q.o. $x \in \Omega$ la funz. $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$
$\Longrightarrow f$ è misurabile
↳ "limite puntuale quasi ovunque di funz. è misurabile"