Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Terzo appello. 31 agosto 2020

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione **e si dimostrino** il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy.$$

Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

B. Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi pre-hilbertiani per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

C. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata (limitarsi alla derivata prima). Utilizzando le formule delle derivate, ricavare la formula per la trasformata della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

D. Le formule per il *calcolo della derivata* della traslata, dilatata, riflessa di una distribuzione T e per il prodotto gT con g funzione regolare: enunciarle e **dimostrarle**.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Verificare che $\widehat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

2. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 16 \int_0^t (t-\tau)\, e^{-3(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-2t}$, semplificando l'espressione ottenuta.

3. (5 punti). *a.* Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'espressione il più possibile esplicita e semplificata della distribuzione:

$$T = \delta_2' * \left(D_{\frac{1}{3}} \left(e^x \tau_{-2} (\delta_{-1}) \right) \right).$$

(Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $T = ...$ e NON $\langle T, \phi \rangle = ...$). Riportare i passaggi intermedi. (Si consiglia di calcolare prima $\left(D_{\frac{1}{3}} \left(e^x \tau_{-2} (\delta_{-1}) \right) \right)$ e poi la convoluzione, sfruttando le proprietà note della δ_{x_0}).

b. Calcolare $\widehat{T}$ (sfruttando il risultato del punto precedente), riscrivendo il risultato nella forma il più possibile esplicita e semplificata. (Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $\widehat{T} = ...$ e NON $\left\langle \widehat{T}, \phi \right\rangle = ...$). Riportare i passaggi intermedi.

Esame di Analisi Funzionale e Trasformate

Terzo appello. 31 agosto 2020

A.A. 2019/2020. Prof. M. Bramanti

Svolgimento

Domande di teoria (rispondere a 3 domande su 4, a propria scelta)

A. Nel contesto della teoria dell'integrale di Lebesgue, si enuncino con precisione **e si dimostrino** il teorema sulla continuità di un integrale dipendente da un parametro e il teorema di derivazione sotto il segno di integrale per un integrale dipendente da un parametro, cioè una funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, y)\, dy.$$

Fare anche un esempio significativo incontrato nel corso, di applicazione teorica di ciascuno dei due teoremi.

B. Enunciare e **dimostrare** il teorema di Pitagora negli spazi pre-hilbertiani per un numero finito di vettori. Quindi enunciare e **dimostrare** la versione di teorema di Pitagora che vale in uno spazio di Hilbert per una successione di vettori.

C. Dare la definizione di trasformata di Fourier di una funzione $L^1(\mathbb{R}^n)$ e enunciare con precisione le sue proprietà che riguardano: la trasformata come operatore lineare continuo tra opportuni spazi; trasformata della derivata; derivata della trasformata (limitarsi alla derivata prima). Utilizzando le formule delle derivate, ricavare la formula per la trasformata della gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$.

D. Le formule per il *calcolo della derivata* della traslata, dilatata, riflessa di una distribuzione T e per il prodotto gT con g funzione regolare: enunciarle e **dimostrarle**.

Svolgere i seguenti esercizi

1. (5 punti). Sia

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}.$$

a. Quali proprietà della trasformata di Fourier $\widehat{f}$ si possono prevedere, in base alle proprietà di questa funzione f?

Rispondere sui seguenti punti: $\widehat{f}$ eventualmente reale o immaginaria, eventualmente simmetrica pari o dispari, spazi funzionali a cui appartiene $\widehat{f}$ (C^0_*, L^1, L^2, $\mathcal{S}$...), sua regolarità, velocità di convergenza a zero.

b. Calcolare $\widehat{f}$ col metodo dei residui. Verificare che $\widehat{f}$ ha effettivamente le proprietà previste.

a. f è reale, pari, C^∞, L^1, $x^2 f \in L^1, x^3 f \notin L^1$, quindi: $\widehat{f}$ reale, pari, tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza $1/x^n$, sarà $C^0_* \cap C^2$ ma ci aspettiamo non C^3.

b. Calcoliamo $\widehat{f}(\xi)$ per $\xi > 0$, sfruttando la simmetria.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

$$z^4 + 4z^2 + 4 = \left(z^2 + 2\right)^2 = 0 \text{ per } z = \pm i\sqrt{2} \text{ poli del } 2^\circ \text{ ordine.}$$

$$\widehat{f}(\xi) = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\left(z^2+2\right)^2} e^{-2\pi i \xi z}, -i\sqrt{2}\right) = -2\pi i \left(\frac{1}{\left(z - i\sqrt{2}\right)^2} e^{-2\pi i \xi z}\right)' \left(-i\sqrt{2}\right)$$

$$= -2\pi i \left(e^{-2\pi i \xi z}\left[-2\pi i \xi \frac{1}{\left(z - i\sqrt{2}\right)^2} - 2\frac{1}{\left(z - i\sqrt{2}\right)^3}\right]\right)_{/z = -i\sqrt{2}}$$

$$= -2\pi i e^{-2\sqrt{2}\pi\xi}\left[-2\pi i \xi \frac{1}{\left(-2i\sqrt{2}\right)^2} - 2\frac{1}{\left(-2i\sqrt{2}\right)^3}\right]$$

$$= -2\pi i e^{-2\sqrt{2}\pi\xi}\left[-2\pi i \xi \frac{1}{-8} - 2\frac{1}{16 i\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}\pi\xi}\left(2\sqrt{2}\pi\xi + 1\right) \text{ per } \xi > 0.$$

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{2}\pi|\xi|}\left(2\sqrt{2}\pi|\xi| + 1\right).$$

2. (5 punti). Risolvere, col metodo della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$y(t) - 16\int_0^t (t-\tau) e^{-3(t-\tau)} y(\tau)\, d\tau = f(t)$$

nella funzione incognita y, per un generico termine noto f supposto $\mathcal{L}$-trasformabile. Successivamente, determinare la soluzione corrispondente a $f(t) = e^{-2t}$, semplificando l'espressione ottenuta.

Indicando con $Y(s), F(s)$ le trasformate di Laplace di $y(t), f(t)$ si ha:

$$Y(s) - 16Y(s)\,\mathcal{L}\left(te^{-3t}\right)(s) = F(s)$$
$$Y(s)\left(1 - 16 \cdot \frac{1}{(s+3)^2}\right) = F(s)$$
$$Y(s)\left(\frac{s^2+6s-7}{s^2+6s+9}\right) = F(s)$$
$$Y(s) = F(s)\left(\frac{s^2+6s-7+16}{s^2+6s-7}\right) = F(s) + F(s)\cdot\frac{16}{(s-1)(s+7)}$$

Ora,
$$\frac{16}{(s-1)(s+7)} = 2\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+7}\right) = \mathcal{L}\left(2\left(e^t - e^{-7t}\right)\right)$$
perciò
$$Y(s) = \mathcal{L}\left(f(t) + f(t) * 2\left(e^t - e^{-7t}\right)\right)$$
e
$$y(t) = f(t) + 2\int_0^t \left(e^{t-\tau} - e^{-7(t-\tau)}\right) f(\tau)\,d\tau.$$

Sia ora $f(t) = e^{-2t}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-2t} + 2\int_0^t \left(e^{t-\tau} - e^{-7(t-\tau)}\right) e^{-2\tau}\,d\tau \\
&= e^{-2t} + 2\left(e^t\int_0^t e^{-3\tau}d\tau - e^{-7t}\int_0^t e^{5\tau}d\tau\right) \\
&= e^{-2t} + 2\left[e^t\left(-\frac{1}{3}\left(e^{-3t}-1\right)\right) - e^{-7t}\left(\frac{1}{5}\left(e^{5t}-1\right)\right)\right] \\
&= e^{-2t} - \frac{2}{3}\left(e^{-2t}-e^t\right) - \frac{2}{5}\left(e^{-2t}-e^{-7t}\right) \\
&= e^{-2t}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \frac{2}{3}e^t + \frac{2}{5}e^{-7t} \\
&= -\frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t + \frac{2}{5}e^{-7t}.
\end{aligned}$$

3. (5 punti). *a.* Calcolare, nello spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'espressione il più possibile esplicita e semplificata della distribuzione:

$$T = \delta_2' * \left(D_{\frac{1}{3}}\left(e^x\tau_{-2}(\delta_{-1})\right)\right).$$

(Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $T = \ldots$ e NON $\langle T, \phi\rangle = \ldots$). Riportare i passaggi intermedi. (Si consiglia di calcolare prima $\left(D_{\frac{1}{3}}\left(e^x\tau_{-2}(\delta_{-1})\right)\right)$ e poi la convoluzione, sfruttando le proprietà note della δ_{x_0}).

b. Calcolare $\widehat{T}$ (sfruttando il risultato del punto precedente), riscrivendo il risultato nella forma il più possibile esplicita e semplificata. (Il risultato finale va scritto nella forma esplicita $\widehat{T} = ...$ e NON $\left\langle \widehat{T}, \phi \right\rangle = ...$). Riportare i passaggi intermedi.

a.

$$\begin{aligned}
\tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right) &= \delta_{2-1} = \delta_1 \\
e^x \tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right) &= e^x \delta_1 = e\delta_1 \\
D_{\frac{1}{3}}\left(e^x \tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right)\right) &= D_{\frac{1}{3}}\left(e\delta_1\right) = 3e\delta_3 \\
\delta_2' * \left(D_{\frac{1}{3}}\left(e^x \tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right)\right)\right) &= \delta_2' * 3e\delta_3 = 3e\left(\delta_2' * \delta_3\right) = 3e\left(\delta_2 * \delta_3\right)' = 3e\delta_5'. \\
T &= 3e\delta_5'
\end{aligned}$$

Procedimento alternativo:

$$\begin{aligned}
\left\langle D_{\frac{1}{3}}\left(e^x \tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right)\right), \phi \right\rangle &= 3\left\langle e^x \tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right), \phi\left(3x\right)\right\rangle = 3\left\langle \tau_{-2}\left(\delta_{-1}\right), e^x \phi\left(3x\right)\right\rangle \\
&= 3\left\langle \delta_{-1}, e^{x+2}\phi\left(3\left(x+2\right)\right)\right\rangle = 3e^{-1+2}\phi\left(3\left(-1+2\right)\right) = 3e\phi\left(3\right) = \left\langle 3e\delta_3, \phi\right\rangle
\end{aligned}$$

e poi la convoluzione si calcola come sopra.

b.

$$\widehat{T} = \mathcal{F}\left(3e\delta_5'\right) = 3e \cdot \left(2\pi i\xi\right)\mathcal{F}\left(\delta_5\right) = 6\pi e i\xi e^{-10\pi i\xi}.$$