Compiti di Elementi di Analisi Funzionale e Trasformate
a.a. 2020/2021. Politecnico di Milano
Settimana 2
Prof. M. Bramanti

Riferimenti di studio per la settimana 2:
Libro di testo: Cap. 1, § 1.1.2, 1.2.2, 1.2.4; Cap. 2, § 2.1, 2.2, 2.3.1 (solo inizio per ora).

Esercizi dal libro di testo:
Spazi di funzioni derivabili:
Svolgere gli esercizi 1.28, 1.29.
Misura: 2.4; 2.2 (fare solo i punti che non coinvolgono integrali, per ora).

Dopo aver studiato la teoria indicata, rispondere alle seguenti domande di comprensione

- Perché, nello spazio $C^1[a,b]$, non è una buona idea mettere la norma C^0? E perché non è una buona idea mettere la norma $\|f'\|_{C^0}$? Quindi qual è la norma naturale da mettere in $C^1[a,b]$?
- C'è qualche problema nel voler studiare lo spazio delle funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$? E come si può rispondere al problema?
- C'è qualche problema nel voler studiare lo spazio delle funzioni derivabili infinite volte su $[a,b]$?
- Perché, volendo introdurre uno spazio di funzioni integrabili su $[a,b]$, non è una buona scelta considerare lo spazio delle funzioni Riemann integrabili con la norma C^0? E perché non è una buona scelta considerare lo spazio delle funzioni Riemann integrabili con la norma integrale?
- Perché, nei primi passi della teoria della misura di Lebesgue, è necessario introdurre il concetto di σ-algebra?
- Perché nell'introdurre la definizione di misura è ragionevole richiedere la *numerabile* additività, ma non sarebbe ragionevole richiedere l'additività rispetto a unioni infinite di cardinalità qualsiasi?
- Perché, nei primi passi della teoria dell'integrazione di Lebesgue, è necessario introdurre il concetto di funzione misurabile?

Scaricare dalla pagina web del corso, e leggere, se non lo si è già fatto, i richiami sulla cardinalità degli insiemi infiniti. Non sono in senso stretto nel programma dell'esame, ma nello studio della teoria della misura e dell'integrazione di Lebesgue è importante aver chiara almeno la distinzione tra insieme (infinito) *numerabile* e *non numerabile.* Nei richiami c'è più di questo, che dovrebbe servire a inquadrare l'argomento.

Per chi vuole approfondire

L'*insieme ternario di Cantor* è un esempio interessante di sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non numerabile che ha misura nulla; il *ternario di Cantor generalizato* è un esempio interessante di sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non numerabile che ha misura positiva e che permette a sua volta di costruire un esempio di successione di funzioni Riemann integrabili che è di Cauchy in norma integrale ma non converge a una funzione Riemann integrabile. Chi è interessato può scaricare dalla pagina web del corso l'**Approfondimento sul ternario di Cantor (fuori programma)**.

Chi è curioso di conoscere un **esempio di insieme non Lebesgue misurabile** può scaricare (fuori programma) dalla pagina web del corso l'approfondimento su questo tema (fuori programma).